



دانشگاه گیلان
۱۳۵۳-۱۹۷۴

معادلات دیفرانسیل عادی

نظریه کیفی

چاپ اول

تألیف:

لوئیس بارئیرا کلاودیا والس

مرکز نشر دانشگاه گیلان

ترجمه:

دکتر مژگان اکبری خشکبیجاری
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان
دکتر ساناز لامعی جوان
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

ترجمه: مژگان اکبری خشکبیجاری، ساناز لامعی جوان

Ordinary Differential Equations

Qualitative Theory

By:

Luis Barreira, Claudia Valls

Translated by:

Mozhgan Akbari Khoshkebijari, Ph.D
Sanaz Lamei, Ph.D

University of Guilan Press

این کتاب مقدمه‌ای جامع بر نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه می‌دهد که شامل بحث در مورد وجود و منحصر به فرد بودن جواب‌ها، تصاویر فاز، معادلات خطی، نظریه پایداری، هذلولوی بودن و معادلات در صفحه است. تاکید در درجه اول بر نتایج و روش‌هایی است که اجازه می‌دهد تا خواص کیفی جواب‌ها را بدون حل صریح معادلات، تجزیه و تحلیل کرد. متن کتاب شامل مثال‌های متعددی است که مفاهیم و نتایج جدید را با جزئیات تشریح می‌کند و همچنین تمرین‌هایی در پایان هر فصل قرار دارد. این کتاب به عنوان پلی برای موضوعات مهمی است که اغلب خارج از حوزه دروس معادلات دیفرانسیل معمولی هستند. به‌طور خاص، مقدمه مختصری بر نظریه انشعاب، خمینه‌های مرکزی، فرمهای نرمال و سیستم‌های همبستگی ارائه می‌کند.

ISBN : 978-600-153-099-9



ISBN:978-600-153-099-9



معادلات دیفرانسیل عادی

نظریه کیفی

تألیف:

لویس بارئیرا
کلاودیا والس

ترجمه:

دکتر مژگان اکبری خشکیجاری
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان
دکتر ساناز لامعی جوان
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

مرکز نشر دانشگاه گیلان

۱۴۰۳



دانشگاه گیلان
۱۳۵۳-۱۹۷۴

شابک: ۹ - ۰۹۹ - ۱۵۳ - ۶۰۰ - ۹۷۸

سرشناسه	: بارتیرا، لوئیس ۱۹۶۸- م. -Barreira, Luís, 1968
عنوان و نام پدیدآور	: معادلات دیفرانسیل عادی/تالیف لوئیس بارتیرا، کلاودیا والس : ترجمه مؤگان اکبری خشکیبجاری، ساناز لامعی جوان : ویراستار علمی نصیر تقی‌زاده : ویراستار ادبی داود خجسته سالکویه.
مشخصات نشر	: رشت: دانشگاه گیلان، انتشارات، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری	: ۳۴۹ص.
شابک	: 978-600-153-099-9
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
یادداشت	: عنوان اصلی: Equações diferenciais
یادداشت	: کتاب از عنوان انگلیسی Ordinary differential equationsqualitative theory به فارسی ترجمه شده است.
موضوع	: معادله‌های دیفرانسیل -- نظریه کیفی - Differential equations - Qualitative theory
شناسه افزوده	: والس، کلاودیا، ۱۹۷۳- م. - Valls , Claudia, 1973
شناسه افزوده	: اکبری خشکیبجاری، مؤگان، ۱۳۵۹-، مترجم
شناسه افزوده	: لامعی، ساناز، ۱۳۵۸ - ، مترجم
شناسه افزوده	: تقی‌زاده، نصیر، ۱۳۲۶ -، ویراستار
شناسه افزوده	: دانشگاه گیلان، انتشارات
رده بندی کنگره	: QA372
رده بندی دیویی	: ۳۵۲/۵۱۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۴۳۵۵۵

مرکز نشر دانشگاه گیلان

عنوان کتاب	: معادلات دیفرانسیل عادی: نظریه کیفی
مؤلفان	: لوئیس بارتیرا، کلاودیا والس
مترجمان	: دکتر مؤگان اکبری خشکیبجاری، دکتر ساناز لامعی جوان
ویراستار علمی	: دکتر نصیر تقی‌زاده
ویراستار ادبی	: دکتر داود خجسته سالکویه
نوبت چاپ	: اول، ۱۴۰۳
ناشر	: مرکز نشر دانشگاه گیلان
شمارگان	: ۱۰۰۰ جلد

* هر گونه چاپ و تکثیر صرفاً در اختیار مرکز نشر دانشگاه گیلان است.

فهرست مطالب

ت	پیشگفتار مترجمین
ج	پیشگفتار مؤلفین
۱	اول مفاهیم اولیه و معادلات خطی
۲	۱ معادلات دیفرانسیل عادی
۳	۱.۱ مفاهیم اولیه
۱۵	۲.۱ وجود و یکتایی جواب‌ها
۳۴	۳.۱ خواص بیشتر
۵۳	۴.۱ وجود جواب‌ها برای میدان‌های پیوسته
۵۸	۵.۱ تصاویر فاز
۷۷	۶.۱ معادلات روی خمینه‌ها
۸۵	۷.۱ تمرین‌ها
۹۳	۲ معادلات خطی و مزدوج‌ها
۹۴	۱.۲ معادلات خطی غیر خودگردان
۱۰۳	۲.۲ معادلات با ضرایب ثابت
۱۱۹	۳.۲ فرمول تغییر پارامترها
۱۲۵	۴.۲ معادلات با ضرایب تناوبی
۱۳۸	۵.۲ مزدوج‌ها بین معادلات خطی
۱۵۸	۶.۲ تمرین‌ها
۱۶۷	دوم پایداری و هذلولوی بودن
۱۶۸	۳ پایداری و توابع لیاپانوف

۱۶۸	مفاهیم پایداری	۱.۳
۱۷۳	پایداری معادلات خطی	۲.۳
۱۸۰	پایداری تحت اختلال‌های غیر خطی	۳.۳
۱۸۶	توابع لیپانوف	۴.۳
۱۹۸	تمرین‌ها	۵.۳
۲۰۵	۴ هذلولوی بودن و مزدوج‌های توپولوژیکی	
۲۰۵	نقاط بحرانی هذلولوی	۱.۴
۲۰۹	قضیه گروپمن-هارتمن	۲.۴
۲۲۶	مزدوج‌های هولدر	۳.۴
۲۲۹	پایداری ساختاری	۴.۴
۲۳۳	تمرین‌ها	۵.۴
۲۳۸	۵ وجود خمینه‌های ناوردا	
۲۳۸	نمادهای پایه‌ای	۱.۵
۲۴۲	قضیه هادامارد-پرون	۲.۵
۲۴۴	وجود خمینه‌های لیپشیتز ناوردا	۳.۵
۲۵۶	همواری خمینه‌های ناوردا	۴.۵
۲۷۱	تمرین‌ها	۵.۵
۲۷۳	سوم معادلات در صفحه	
۲۷۴	۶ نظریه شاخص	
۲۷۴	شاخص میدان‌های برداری در صفحه	۱.۶
۲۸۱	کاربردهایی از مفهوم شاخص	۲.۶
۲۸۷	شاخص یک نقطه بحرانی تنها	۳.۶
۲۹۴	۷ قضیه پوانکاره-بندیکسون	
۲۹۴	مجموعه‌های حدی	۱.۷
۳۰۳	قضیه پوانکاره-بندیکسون	۲.۷
۳۱۵	چهارم موضوعات بیشتر	
۳۱۶	۸ انشعاب و خمینه‌های مرکزی	
۳۱۶	معرفی نظریه انشعاب	۱.۸
۳۲۴	خمینه‌های مرکزی و کاربردها	۲.۸
۳۳۸	نظریه صورت‌های نرمال	۳.۸

۳۵۴	دستگاه‌های همیلتونی	۹
۳۵۴	مفاهیم پایه‌ای	۱.۹
۳۶۱	دستگاه همیلتونی خطی	۲.۹
۳۶۵	پایداری تعادل‌ها	۳.۹
۳۷۲	انتگرال‌پذیری و مختصات زاویه-کنش	۴.۹
۳۷۹	قضیه KAM	۵.۹
۳۸۳	کتاب‌نامه	
۳۸۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۳۹۲	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۳۹۷	نمایه	

پیشگفتار مترجمین

کتاب حاضر، تألیف دو تن از برجسته‌ترین و شناخته‌شده‌ترین ریاضی‌دانان در حوزه معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی است. تحقیقات و تئوری‌های ایشان موجب پیشرفت زیادی در این گرایش‌ها شده است. این کتاب، از جمله کتاب‌های مفیدی است که به مفاهیم پایه‌ای در نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل می‌پردازد. مباحث کتاب با مطالعه دستگاه‌های خطی در معادلات دیفرانسیل عادی آغاز می‌شود ولی از آنجایی که اغلب دستگاه‌های غیرخطی قابل حل نیستند، نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل ارائه می‌گردد. قلمرو موضوعی این کتاب، بیان و بررسی وجود و یکتایی جواب‌ها، تصاویر فاز، معادلات خطی و اختلال‌های آنها، پایداری و توابع لیاپانوف، هذلولوی بودن، و معادلات در صفحه است.

مباحث این کتاب، همه سرفصل‌های دروس "معادلات دیفرانسیل عادی ۱" و "دستگاه‌های دینامیکی ۱" از گرایش معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی مقطع کارشناسی ارشد را به‌طور کامل پوشش می‌دهد. فصل‌های ۱، ۲ و ۳ کتاب همه ریز مواد درس معادلات دیفرانسیل عادی ۱ و فصل‌های ۳، ۴، ۷، ۸ و ۹ کتاب همه ریز مواد درس دستگاه‌های دینامیکی ۱ را به‌طور کامل پوشش می‌دهد. همچنین قسمتی از فصل‌های ۱ و ۲ کتاب ریز مواد درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی در مقطع کارشناسی را در بر دارد. از آنجایی که کتاب‌های کمی به‌صورت تألیف یا ترجمه به زبان فارسی در زمینه نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی موجود است، مترجمین تصمیم به ترجمه این کتاب گرفتند که به‌صورت الکترونیکی به چاپ خواهد رسید.

این کتاب ابتدا به زبان پرتغالی تألیف و توسط انتشارات IST منتشر شد و سپس توسط انتشارات AMS به انگلیسی برگردانده شد. مترجمین برای ترجمه این کتاب دارای اجازه‌نامه رسمی از نویسندگان و هر دو ناشر

پرتغالی و امریکایی این کتاب هستند و مراتب قدردانی از همکاری و حمایت نویسندگان و ناشران برای ترجمه کتاب به عمل می‌آید. در ترجمه فارسی کتاب سعی شده است تا حداکثر وفاداری به متن اصلی حفظ شود ولی سلامت و روانی خواندن مطالب نیز مدنظر بوده است. در این کتاب، از قواعد آیین نگارش مصوب فرهنگستان زبان و ادب فارسی و همچنین از کتاب واژه‌نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران استفاده شده است.

از جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده که ویراستاری علمی کتاب را برعهده گرفتند و از جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه که ویراستاری ادبی را به نحو شایسته‌ای انجام دادند سپاسگزاری می‌شود. از اعضای محترم شورای انتشارات دانشگاه گیلان که چاپ کتاب را به تصویب رسانده و در تمام مراحل چاپ مساعدت نمودند، قدردانی می‌گردد.

مؤگان اکبری خشکبیجاری و ساناز لامعی جوان

شهریور ۱۴۰۲

پیشگفتار مؤلفین

هدف اصلی این کتاب ارائه مقدمه‌ای جامع بر نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل عادی است. به‌طور خاص، از میان موضوعات دیگر، وجود و یکتایی جواب‌ها، تصاویر فاز، معادلات خطی و اختلال‌های آنها، پایداری و توابع لیاپانوف، هذلولوی بودن، و معادلات در صفحه را مطالعه می‌کنیم.

این کتاب همچنین به‌عنوان پلی برای موضوعات مهمی است که اغلب از دومین درس معادلات دیفرانسیل عادی حذف می‌شوند. مثال‌ها شامل وابستگی هموار جواب‌ها به شرایط اولیه، وجود مزدوج‌های توپولوژیکی و دیفرانسیل‌پذیری بین دستگاه‌های خطی، و پیوستگی هولدر مزدوج‌ها در قضیه گروپمن-هارتمن است. همچنین مقدمه‌ای مختصر بر نظریه انشعاب، خمینه‌های مرکزی، صورت‌های متعارف، و دستگاه‌های همیتونی ارائه می‌دهیم. ما عمدتاً مفاهیم، نتایج و روش‌هایی را توصیف می‌کنیم که به فرد اجازه می‌دهد تا در مورد خواص کیفی جواب‌های یک معادله بدون حل صریح آن بحث کند. این را می‌توان هدف اصلی نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل عادی دانست.

این کتاب می‌تواند به‌عنوان پایه‌ای برای دومین درس معادلات دیفرانسیل عادی استفاده شود. با این وجود، مطالب آن نسبت به دروس استاندارد بیشتر است و بنابراین، در واقع می‌توان از آن به روش‌های مختلف و در سطوح مختلف استفاده کرد. در میان سایر امکانات، ما درس‌های زیر را پیشنهاد می‌کنیم

(الف) کارشناسی ارشد/ دومین درس دوره کارشناسی: فصل‌های ۱-۵ و ۷-۸ (بدون بخش‌های ۴.۱، ۵.۲)

و ۸.۳، و بدون اثبات قضایای گروپمن-هارتمن و هادامارد-پرون)؛

(ب) کارشناسی ارشد/ دوره کارشناسی روی معادلات در صفحه: فصل‌های ۱-۳ و ۶-۷؛

(ج) دوره تحصیلات تکمیلی پیشرفته روی پایداری: فصل‌های ۱-۳ و ۸-۹؛

(د) دوره تحصیلات تکمیلی پیشرفته روی هذلولوی بودن: فصل‌های ۱-۵.

انتخاب‌های دیگر نیز بسته به مخاطب و زمان دسترسی برای دوره، امکان‌پذیر است. علاوه بر این، برخی از بخش‌ها مانند بخش‌های ۲.۳.۱، ۴.۱، ۵.۲، ۳.۳، ۶.۲ و ۸.۳ را می‌توان برای نمایش‌های کوتاه استفاده کرد. به غیر از برخی پیش‌نیازهای اساسی جبرخطی و حساب دیفرانسیل و انتگرال، تمام مفاهیم و نتایج به کار رفته در کتاب در طول مسیر یادآوری می‌شود. علاوه بر این، (تقریباً) همه چیز، به استثنای برخی از نتایج در فصل‌های ۸ و ۹ در مورد موضوعات پیشرفته‌تر نظریه انشعاب، خمینه‌های مرکزی، صورت‌های متعارف و دستگاه‌های همبستگی ثابت شده است. از آنجایی که کتاب مستقل است، می‌تواند به عنوان مرجع یا برای مطالعه مستقل نیز مورد استفاده قرار گیرد.

اکنون به شرح مفصل‌تری از مطالب کتاب می‌پردازیم.

بخش ۱ به مفاهیم پایه و معادلات خطی اختصاص دارد.

● در فصل ۱ مفاهیم اساسی و نتایج نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، به‌ویژه در مورد وجود و یکتایی جواب‌ها (قضیه پیکارد-لیندلف) و وابستگی جواب‌ها به شرایط اولیه را معرفی می‌کنیم. همچنین وجود جواب معادلات با یک میدان برداری پیوسته (قضیه پتانو) را مشخص می‌کنیم. سرانجام، مقدمه‌ای برای توصیف رفتار کیفی جواب‌ها در فضای فاز ارائه می‌کنیم.

● در فصل ۲ معادلات خطی خاص (غیرخودگردان) را در نظر می‌گیریم و جواب‌های اساسی آنها را مطالعه می‌کنیم. اغلب مفید است که یک معادله را به عنوان اختلال یک معادله خطی ببینیم و جواب‌ها را (حتی به‌طور ضمنی) با استفاده از فرمول تغییر پارامترها به دست آوریم. این دیدگاه اغلب در کتاب استفاده می‌شود. سپس موارد خاص معادلات با ضرایب ثابت و معادلات با ضرایب تناوبی را در نظر می‌گیریم. موضوعات پیشرفته‌تر شامل وابستگی C^1 جواب‌ها به شرایط اولیه و وجود مزدوج‌های توپولوژیکی بین معادلات خطی با ماتریس‌های هذلولوی ضرایب است.

بخش ۲ به مطالعه پایداری و هذلولوی بودن اختصاص دارد.

- در فصل ۳، پس از معرفی پایداری و پایداری مجانبی، مورد خاص معادلات خطی را در نظر می‌گیریم که می‌توان توصیف کاملی از این مفاهیم از نظر جواب‌های اساسی ارائه داد. همچنین موارد خاصی از معادلات با ضرایب ثابت و معادلات با ضرایب تناوبی را در نظر می‌گیریم. سپس در مورد تداوم پایداری مجانبی تحت اختلال‌های به اندازه کافی کوچک یک معادله خطی به‌طور مجانبی پایدار بحث می‌کنیم. همچنین مقدمه‌ای بر نظریه توابع لیاپانوف ارائه می‌کنیم که گاهی یک جواب معین را به‌روش کم‌ویش خودکار به‌دست می‌دهد.

- در فصل‌های ۴ و ۵ مفهوم هذلولوی بودن را معرفی می‌کنیم و برخی از پیامدهای آن را مطالعه می‌کنیم؛ یعنی ما دو نتیجه کلیدی در مورد رفتار جواب‌ها در همسایگی یک نقطه بحرانی هذلولوی ایجاد می‌کنیم: قضایای گروپمن-هارتمن و هادامارد-پرون. اولی نشان می‌دهد که جواب‌های یک اختلال به‌اندازه کافی کوچک از یک معادله خطی با نقطه بحرانی هذلولوی مزدوج توپولوژیکی با جواب‌های معادله خطی هستند. دومی نشان می‌دهد که خمینه‌های ثابت مماس بر فضاها پایدار و ناپایدار یک نقطه بحرانی هذلولوی وجود دارد. به‌عنوان یک مبحث پیشرفته‌تر، نشان می‌دهیم که همه مزدوج‌ها در قضیه گروپمن-هارتمن پیوسته هولدر هستند. توجه می‌کنیم که فصل ۵ بیشتر فنی است: توضیح تقریباً کاملی به اثبات قضیه هادامارد-پرون اختصاص داده شده است. برخلاف آنچه در متون دیگر اتفاق می‌افتد، اثبات‌ها نیازی به گسسته‌سازی مسئله یا تکنیک‌های اضافی ندارد که تنها در اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرد. توجه داریم که مطالب بخش‌های ۵.۳ و ۵.۴ در هیچ جای دیگر کتاب استفاده نشده است.

در بخش ۳ نتایج و روش‌هایی را شرح می‌دهیم که به‌ویژه در مطالعه معادلات در صفحه مفید است.

- در فصل ۶ مقدمه‌ای بر نظریه شاخص و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل در صفحه ارائه می‌دهیم. به‌طور خاص، توضیح می‌دهیم که چگونه شاخص یک مسیر بسته با توجه به یک میدان برداری با مسیر و با میدان برداری تغییر می‌کند. سپس چندین کاربرد، از جمله اثبات وجود یک نقطه بحرانی در داخل هر مدار تناوبی، به معنای قضیه منحنی جردن ارائه می‌کنیم.

- در فصل ۷ مقدمه‌ای بر نظریه پوانکاره-بندیکسون ارائه می‌کنیم. پس از معرفی مفاهیم مجموعه‌های

α -حد و ω -حد، نشان می‌دهیم که نیمه‌مدارهای کراندار دارای مجموعه‌های α -حد و ω -حد ناتهی، فشرده و همبند هستند. سپس یکی از نتایج مهم نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل عادی در صفحه، قضیه پوانکاره-بندیکسون را ایجاد می‌کنیم. به‌ویژه معیاری برای وجود مدارهای تناوبی به‌دست می‌دهد.

بخش ۴ تا حدودی ماهیت متفاوتی دارد و فقط اینجاست که همه چیز ثابت نمی‌شود. هدف اصلی ما ایجاد پل ارتباطی با موضوعات مهمی است که اغلب از دومین درس معادلات دیفرانسیل عادی حذف می‌شوند.

● در فصل ۸ مقدمه‌ای بر نظریه انشعاب با تأکید بر مثال‌ها ارائه می‌کنیم. سپس مقدمه‌ای بر نظریه خمینه‌های مرکزی ارائه می‌کنیم، که اغلب به ما امکان می‌دهد تا ترتیب معادله را در مطالعه پایداری یا وجود انشعاب‌ها کاهش دهیم. همچنین مقدمه‌ای بر نظریه صورت‌های متعارف ارائه می‌دهیم که هدف آن حذف تمام اصطلاحات ممکن در معادله اصلی از طریق تغییر متغیرها است.

● سرانجام، در فصل ۹ مقدمه‌ای بر نظریه دستگاه‌های همیلتونی ارائه می‌کنیم. پس از معرفی برخی مفاهیم اساسی، چندین نتیجه در مورد پایداری دستگاه‌های خطی و غیرخطی همیلتونی را شرح می‌دهیم. همچنین مفهوم انتگرال‌پذیری و قضیه لیوویل-آرنولد در مورد ساختار مجموعه‌های تراز انتگرال‌های مستقل در برگشت را در نظر می‌گیریم. علاوه بر این، ایده‌های اساسی نظریه KAM را شرح می‌دهیم.

این کتاب شامل مثال‌های متعددی است که مفاهیم و نتایج جدید و همچنین تمرین‌هایی را در پایان هر فصل به تفصیل نشان می‌دهند.

لوئیس باریرا و کلودیا ویلز

لیبسون، فوریه ۲۰۱۲

بخش اول

مفاهیم اولیه و معادلات خطی

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل عادی

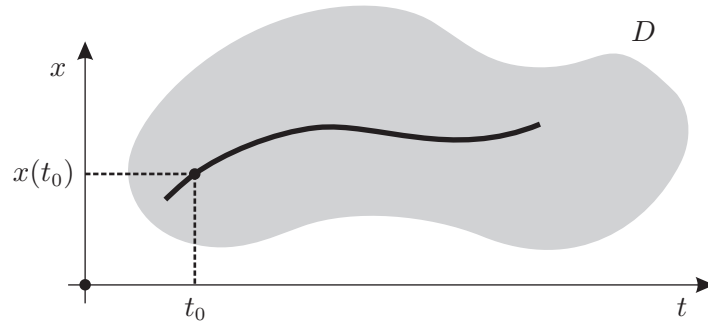
در این فصل به معرفی مفاهیم اولیه نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، از جمله مفاهیم جواب و مسئله با مقدار اولیه می‌پردازیم. همچنین در مورد وجود و یکتایی جواب‌ها، وابستگی آنها به شرایط اولیه و رفتار آنها در نقاط پایانی بازه ماکسیمال وجود بحث می‌کنیم. برای این منظور، مطالب مربوط به انقباضات و انقباضات تار را یادآوری می‌کنیم. به علاوه، نشان می‌دهیم که چگونه جواب‌های یک معادله خودگردان ممکن است باعث ایجاد شار شوند. در پایان، با بحث در مورد بسیاری از معادلات و تصاویر فاز آنها، مقدمه‌ای بر نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل ارائه می‌دهیم. این مطالعه شامل حالت خاصی از معادلات پایستار، یعنی معادلات با یک انتگرال است. برای موضوعات اضافی، خواننده را به [۲، ۹، ۱۳، ۱۵] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این بخش به معرفی مفاهیم جواب معادله دیفرانسیل عادی و مسئله با مقدار اولیه می‌پردازیم و آنها را با مثال‌های مختلف شرح می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه جواب‌های یک معادله خودگردان^۱ (یعنی معادله‌ای که به‌طور صریح وابسته به زمان نیست) ممکن است باعث ایجاد شار شود.

۱.۱.۱. جواب‌ها و مسائل با مقدار اولیه. ابتدا به معرفی مفهوم جواب معادله دیفرانسیل عادی می‌پردازیم. برای

^۱Autonomous



شکل ۱.۱: جواب $x(t)$ از معادله $x' = f(t, x)$.

تابع پیوسته $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ، معادله دیفرانسیل (عادی) زیر را در نظر بگیرید

$$x' = f(t, x). \quad (1.1)$$

مجهول این معادله تابع $x = x(t)$ است.

تعریف ۱.۱. تابع $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 (با $a \geq -\infty$ و $b \leq +\infty$)، جواب معادله (۱.۱) گفته

می‌شود هرگاه (شکل ۱.۱ را ببینید)

(الف) برای هر $(t, x(t)) \in D$ ، $t \in (a, b)$ ؛

(ب) برای هر $x'(t) = f(t, x(t))$ ، $t \in (a, b)$.

مثال ۲.۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x' = -x + t. \quad (2.1)$$

اگر $x = x(t)$ یک جواب از معادله (۲.۱) باشد، آنگاه

$$(e^t x)' = e^t x + e^t x' = e^t (x + x') = e^t t.$$

از آنجایی که تابع اولیه $e^t t$ ، برابر با $e^t(t-1)$ است، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$e^t x(t) = e^t(t-1) + c,$$

که در آن c یک ثابت حقیقی است. بنابراین، جواب‌های معادله (۲.۱) به صورت

$$x(t) = t - 1 + ce^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (۳.۱)$$

معین می‌شوند به طوری که $c \in \mathbb{R}$.

حال معادله‌ای را در \mathbb{R}^2 در نظر می‌گیریم.

مثال ۳.۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$(x, y)' = (y, -x), \quad (۴.۱)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases} \quad (۵.۱)$$

اگر $(x(t), y(t))$ جوابی از معادله (۵.۱) باشد، آنگاه

$$(x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = 2xy + 2y(-x) = 0. \quad (۶.۱)$$

پس، ثابت $r \geq 0$ موجود است به طوری که (برای هر t در دامنه جواب)

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2.$$

با نوشتن

$$x(t) = r \cos \theta(t), \quad y(t) = r \sin \theta(t),$$

که θ یک تابع دیفرانسیل پذیر است، از برابری $x' = y$ نتیجه می‌شود که

$$x'(t) = -r\theta'(t) \sin \theta(t) = r \sin \theta(t).$$

از این رو، $\theta'(t) = -1$. پس ثابت $c \in \mathbb{R}$ موجود است که $\theta(t) = -t + c$. بنابراین، جواب‌های معادله (۴.۱) به صورت

$$(x(t), y(t)) = (r \cos(-t + c), r \sin(-t + c)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (۷.۱)$$

معین می‌شوند به طوری که $c \in \mathbb{R}$.

مثال ۴.۱. از (۵.۱) نتیجه می‌شود که

$$x'' = (x')' = y' = -x.$$

از طرف دیگر، با شروع از معادله $x'' = -x$ و نوشتن $y = x'$ ، رابطه $y' = x'' = -x$ را به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر، دو تساوی در (۵.۱) را دوباره به دست می‌آوریم. از این رو، معادلات (۵.۱) و $x'' = -x$ معادل هستند.

به طور کلی، با نوشتن

$$X = (X_1, \dots, X_k) = (x, x', \dots, x^{(k-1)}),$$

معادله

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}),$$

را می‌توان به صورت $X' = F(t, X)$ نوشت، که

$$F(t, X) = (X_2, X_3, \dots, X_{k-1}, f(t, X)).$$

همچنین می‌توان معادلات دیفرانسیل نوشته شده در مختصات دیگر را در نظر گرفت؛ برای مثال، در مختصات قطبی.

مثال ۵.۱. معادله

$$\begin{cases} r' = r, \\ \theta' = 1, \end{cases} \quad (۸.۱)$$

را در مختصات قطبی (r, θ) در نظر بگیرید. از آنجایی که $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، رابطه‌های زیر را به دست

می‌آوریم

$$x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = r \cos \theta - r \sin \theta = x - y, \quad (۹.۱)$$

و

$$y' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = r \sin \theta + r \cos \theta = y + x. \quad (۱۰.۱)$$

پس، معادله (۸.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases} \quad (۱۱.۱)$$

علاوه بر این، می‌توان هر معادله در (۸.۱) را به طور جداگانه حل کرد تا جواب‌های زیر به دست آیند

$$\begin{cases} r(t) = ce^t, \\ \theta(t) = t + d, \end{cases} \quad (۱۲.۱)$$

که در آن $c, d \in \mathbb{R}$ ثابت‌های دلخواه هستند.

حال به معرفی مفهوم مسئله با مقدار اولیه می‌پردازیم.

تعریف ۶.۱. برای $(t_0, x_0) \in D$ ، مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (۱۳.۱)$$

عبارت از تعیین بازه‌ای مانند (a, b) شامل t_0 و جواب $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ از معادله (۱.۱) است که در شرط

$x(t_0) = x_0$ صدق نماید. شرط $x(t_0) = x_0$ شرط اولیه مسئله (۱۳.۱) نامیده می‌شود.

مثال ۷.۱. (ادامه مثال ۲.۱). مسئله با مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = -x + t, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (14.1)$$

با اختیار $t = 0$ در (۳.۱)، رابطه $x(0) = -1 + c$ را به دست می آوریم، و شرط اولیه نتیجه می دهد که $c = 1$.

از این رو، جواب مسئله با مقدار اولیه (۱۴.۱) به صورت زیر است

$$x(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

مثال ۸.۱. (ادامه مثال ۳.۱). معادله (۴.۱) و مسئله با مقدار اولیه متناظر

$$\begin{cases} (x, y)' = (y, -x), \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0), \end{cases} \quad (15.1)$$

که $t_0 \in \mathbb{R}$ و $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. با اختیار $t = t_0$ در (۷.۱) رابطه زیر را به دست می آوریم

$$(x_0, y_0) = (r \cos(-t_0 + c), r \sin(-t_0 + c)).$$

با نوشتن شرط اولیه در مختصات قطبی، یعنی،

$$(x_0, y_0) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0), \quad (16.1)$$

رابطه $c = t_0 + \theta_0$ (تا مضرب صحیح 2π) را به دست می آوریم. از این رو، جواب مسئله با مقدار اولیه (۵.۱)

به صورت زیر است

$$(x(t), y(t)) = (r \cos(-t + t_0 + \theta_0), r \sin(-t + t_0 + \theta_0)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (17.1)$$

یک معادل و توصیف هندسی بیشتری از جواب (۱۷.۱) برای مسئله (۱۵.۱) در ادامه می آید. با توجه به روابط

(۱۶.۱) و (۱۷.۱)، داریم

$$x(t) = r \cos \theta_0 \cos(-t + t_0) - r \sin \theta_0 \sin(-t + t_0)$$

$$= x_0 \cos(t - t_0) + y_0 \sin(t - t_0),$$

و به‌طور مشابه (یا به سادگی مشاهده می‌کنید که $y = x'$),

$$y(t) = -x_0 \sin(t - t_0) + y_0 \cos(t - t_0).$$

از این رو، می‌توان جواب (۱۷.۱) را به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R(t - t_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (18.1)$$

که

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

یک ماتریس دوران است. در واقع، همان‌گونه که در مثال ۳.۱ نشان داده شده است، هر جواب معادله (۴.۱) در یک فاصله ثابت از مبدأ مختصات باقی می‌ماند.

در زیر مشخصه جواب‌های معادله دیفرانسیل عادی آمده است.

قضیه ۹.۱. فرض کنید تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد. برای $(t_0, x_0) \in D$ ، تابع پیوسته $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی بازه باز (a, b) شامل t_0 جوابی از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است اگر و تنها اگر برای هر $t \in (a, b)$ رابطه زیر برقرار باشد

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (19.1)$$

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که تابع $f(t, x(t))$ پیوسته است، زیرا ترکیبی از توابع پیوسته است. به‌ویژه، در هر بازه کراندار نیز انتگرال‌پذیر است. اکنون، فرض می‌کنیم که $x = x(t)$ یک جواب از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) باشد. برای هر $t \in (a, b)$ ، داریم

$$x(t) - x_0 = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

بنابراین، رابطه (۱۹.۱) برقرار است. از طرف دیگر، اگر تساوی (۱۹.۱) برای هر $t \in (a, b)$ برقرار باشد، آنگاه واضح است که $x(t_0) = x_0$ با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۱۹.۱) نسبت به t ، رابطه زیر را برای هر $t \in (a, b)$ به دست می‌آوریم

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (۲۰.۱)$$

از آنجایی که تابع $f(t, x(t)) \mapsto t$ پیوسته است، از رابطه (۲۰.۱) نتیجه می‌شود که x از کلاس C^1 است، و از این رو، جواب مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است. \square

۲.۱.۱. مفهوم شار. در این بخش، حالت خاصی از معادلات دیفرانسیل عادی که به طور صریح وابسته به زمان نیستند را در نظر می‌گیریم، و نشان می‌دهیم که به طور طبیعی باعث ایجاد شار می‌شوند.

تعریف ۱.۰.۱. معادله (۱.۱) را خودگردان می‌نامند هرگاه به t وابسته نباشد.

به عبارت دیگر، یک معادله خودگردان به صورت

$$x' = f(x),$$

است که در آن تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R}^n$ پیوسته است.

حال به معرفی مفهوم شار می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. یک خانواده از تبدیلات $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ برای $t \in \mathbb{R}$ ، به طوری که $\varphi_0 = Id$ و به ازای هر

$$t, s \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \quad (۲۱.۱)$$

یک شار نامیده می‌شود.

مثال ۱۲.۱. برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ ، خانواده تبدیلات $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ که با ضابطه

$$\varphi_t(x) = x + ty, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

تعریف می‌شود، یک شار است.

عبارت زیر نشان می‌دهد که بسیاری از معادلات خودگردان باعث ایجاد شار می‌شوند.

قضیه ۱۳.۱. اگر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد به طوری که هر مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (22.1)$$

یک جواب یکتای $x(t, x_0)$ تعریف شده برای $t \in \mathbb{R}$ داشته باشد، آنگاه خانواده تبدیلات تعریف شده با

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0), \quad (23.1)$$

یک شار است.

برهان. برای هر $s \in \mathbb{R}$ ، تابع $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ تعریف شده با ضابطه

$$y(t) = x(t + s, x_0),$$

را در نظر بگیرید. واضح است که $y(0) = x(s, x_0)$ و برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است

$$y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t)).$$

به‌ویژه، y نیز جوابی از معادله $x' = f(x)$ است. بنا به فرض، هر مسئله با مقدار اولیه (۲۲.۱) یک جواب یکتا

دارد، و ازاین‌رو

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0)),$$

یا به‌طور معادل، برای هر $t, s \in \mathbb{R}$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، رابطه زیر را داریم

$$x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0)). \quad (24.1)$$

با استفاده از تبدیلات φ_t در (23.1)، می‌توان تساوی (24.1) را به‌صورت زیر نوشت

$$\varphi_{t+s}(x_0) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0).$$

از طرف دیگر، با توجه به تعریف $x(t, x_0)$ رابطه $x(0, x_0) = x_0$ برقرار است. این نشان می‌دهد که خانواده تبدیلات φ_t یک شار است. \square

مثال 14.1. (ادامه مثال‌های 3.1 و 8.1). متذکر می‌شویم که معادله (4.1) خودگردان است. علاوه‌براین، مسئله با مقدار اولیه (15.1) دارای جواب یکتا است که روی \mathbb{R} تعریف شده است و به‌وسیله رابطه (17.1) یا (18.1) معین می‌شود. بنابراین، از قضیه 13.1 نتیجه می‌شود که خانواده تبدیلات φ_t تعریف شده با

$$\varphi_t(x_0, y_0) = (r \cos(-t + \theta_0), r \sin(-t + \theta_0)),$$

یک شار است. همچنین با استفاده از رابطه (18.1)، می‌توان نوشت

$$\varphi_t(x_0, y_0) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)R(t)^*,$$

که $R(t)^*$ ترانواده ماتریس دوران $R(t)$ است. از این‌رو، تساوی (21.1) معادل است با

$$R(t+s)^* = R(s)^*R(t)^*,$$

یا با گرفتن ترانواده، برای $t, s \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت

$$R(t+s) = R(t)R(s).$$

می‌دانیم که این تساوی بین ماتریس‌های دوران برقرار است.

مثال ۱۵.۱. (ادامه مثال ۵.۱). با اختیار $t = 0$ در رابطه (۱۲.۱)، خواهیم داشت $r(0) = c$ و $\theta(0) = d$. بنابراین، جواب‌های معادله (۸.۱) می‌تواند (در مختصات قطبی) به صورت

$$(r(t), \theta(t)) = (re^t, t + \theta_0),$$

نوشته شود که $(r_0, \theta_0) = (r(0), \theta(0))$. اگر φ_t شار معین در قضیه ۱۳.۱ برای معادله خودگردان (۱۱.۱) باشد، آنگاه در مختصات (x, y) نقطه $(r(t), \theta(t))$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} \varphi_t(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) &= (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) \\ &= (r_0 e^t \cos(t + \theta_0), r_0 e^t \sin(t + \theta_0)). \end{aligned}$$

۲.۱ وجود و یکتایی جواب‌ها

در این بخش به وجود و یکتایی جواب‌های یک معادله دیفرانسیل عادی می‌پردازیم. بعد از فرمول‌بندی نتایج، مقدمات و مفاهیمی را معرفی می‌کنیم که برای اثبات این نتایج و نتایج دیگر در این کتاب استفاده شده‌اند.

۱.۲.۱. فرمول‌بندی قضیه پیکارد-لیندلف.^۱ ابتدا مجموعه فشرده را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱. مجموعه $K \subset \mathbb{R}^n$ فشرده نامیده می‌شود هرگاه برای هر پوشش باز داده شده از K ، یعنی یک خانواده از مجموعه‌های باز $(U_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}^m$ به طوری که $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset K$ ، یک زیرپوشش متناهی وجود داشته باشد، یعنی، $N \in \mathbb{N}$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $\cup_{i=1}^N U_{\alpha_i} \supset K$.

یادآوری می‌کنیم که مجموعه $K \subset \mathbb{R}^m$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.

اکنون، مفهوم یک تابع به طور موضعی لپشیتز^۲ را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۱. تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ نسبت به x به طور موضعی لپشیتز گویند هرگاه برای

^۱Picard-Lindelof Theorem

^۲Locally Lipschitz

هر مجموعه فشرده $K \subset D$ ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(t, x), (t, y) \in K$ ،

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|. \quad (25.1)$$

با استفاده از این مفهوم، می توان نتیجه زیر را روی وجود و یکتایی جواب های معادله دیفرانسیل عادی فرمول بندی کرد.

قضیه ۱۸.۱. (قضیه پیکارد-لیندلف). اگر تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x به طور موضعی در شرط لپشیتز صدق کند، آنگاه برای هر $(t_0, x_0) \in D$ یک جواب یکتا از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) برای فاصله باز شامل t_0 وجود دارد.

برهان قضیه ۱۸.۱ با استفاده از نتایج کمکی توصیف شده در بخش ۲.۲.۱، در بخش ۳.۲.۱ خواهد آمد.

به ویژه، همه توابع C^1 به طور موضعی لپشیتز هستند.

قضیه ۱۹.۱. اگر f از کلاس C^1 باشد، آنگاه f نسبت به x به طور موضعی لپشیتز است.

برهان. ابتدا نشان می دهیم که کافی است خانواده \mathcal{K} از مجموعه های فشرده را به صورت $I \times J \subset D$ در نظر

بگیریم، که $I \subset \mathbb{R}$ بازه ای فشرده است و برای $p \in \mathbb{R}^n$ و $r > 0$

$$J = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| \leq r\}.$$

برای این منظور، نشان می دهیم که هر مجموعه فشرده $K \subset D$ داخل یک اجتماع متناهی از عناصر \mathcal{K} است. از این رو، فرض کنید $K \subset D$ یک مجموعه فشرده باشد. برای هر $p \in K$ ، $K_p \in \mathcal{K}$ را طوری اختیار می کنیم که $p \in \text{int}K_p$ ، به وضوح، $K \subset \cup_{p \in K} \text{int}K_p$ ، و به این ترتیب، از فشردگی K نتیجه می شود که $N \in \mathbb{N}$ و $p_1, \dots, p_N \in K$ وجود دارد به طوری که $K \subset \cup_{i=1}^N \text{int}K_{p_i}$. از این رو، $K \subset \cup_{i=1}^N K_{p_i} \subset D$ ، که نتیجه مطلوب را نتیجه می دهد.

اکنون، فرض کنید $I \times J$ یک مجموعه فشرده در \mathcal{K} باشد و نقاط $(t, x), (t, y) \in I \times J$ را اختیار می‌کنیم.

تابع $D \rightarrow [0, 1]$ با ضابطه

$$g(s) = f(t, y + s(x - y)),$$

از کلاس C^1 است، زیرا ترکیبی از توابع C^1 است. به علاوه،

$$\begin{aligned} f(t, x) - f(t, y) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + s(x - y))(x - y) ds, \end{aligned}$$

که $\frac{\partial f}{\partial x}$ ماتریس ژاکوبین است (با در نظر گرفتن بردار $x - y$ به عنوان یک ستون). بنابراین،

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq \sup_{s \in [0, 1]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + s(x - y)) \right\| \cdot \|x - y\| \\ &\leq \sup_{q \in J} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, q) \right\| \cdot \|x - y\|, \end{aligned} \quad (۲۶.۱)$$

زیرا پاره‌خط بین x و y داخل J است. اکنون چون f از کلاس C^1 است، تابع

$$(t, q) \mapsto \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, q) \right\|,$$

پیوسته است، و از این رو،

$$L := \max_{(t, q) \in I \times J} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, q) \right\| < +\infty.$$

بنابراین، برای هر $(t, x), (t, y) \in I \times J$ ، داریم

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|.$$

□

این نشان می‌دهد که f نسبت به x به طور موضعی لیبشیتز است.

یک نتیجه از قضیه ۱۸.۱ در زیر آمده است.

قضیه ۲۰.۱. اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 روی یک مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه برای هر $(t_0, x_0) \in D$ جواب یکتا از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) روی بازه باز شامل t_0 وجود دارد.

برهان. نتیجه بلافاصله از قضیه ۱۸.۱ به همراه قضیه ۱۹.۱ نتیجه می‌شود. \square

به هر حال، توابع لپشیتز موضعی، لزومی ندارد که دیفرانسیل پذیر باشند.

مثال ۲۱.۱. برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

از این رو، تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(t, x) = |x|$ ، با اختیار $L = 1$ در رابطه (۲۵.۱)، برای هر مجموعه فشرده $K \subset \mathbb{R}^2$ نسبت به x به طور موضعی لپشیتز است.

همچنین مثالی از یک تابع که به طور موضعی لپشیتز نیست ارائه می‌دهیم.

مثال ۲۲.۱. برای تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(t, x) = x^{\frac{2}{3}}$ ، داریم

$$|f(t, x) - f(t, 0)| = |x^{\frac{2}{3}} - 0^{\frac{2}{3}}| = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}} |x - 0|.$$

از آنجایی که $\frac{1}{|x|^{\frac{1}{3}}} \rightarrow +\infty$ وقتی که $x \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌گیریم که f نسبت به x روی هر مجموعه $D \subset \mathbb{R}^2$ که خط $\mathbb{R} \times \{0\}$ را قطع می‌کند به طور موضعی لپشیتز نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر f پیوسته، اما به طور موضعی لپشیتز نباشد، آنگاه ممکن است مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) جواب یکتا نداشته باشد.

مثال ۲۳.۱. (ادامه مثال ۲۲.۱). فرض کنید $x = x(t)$ جوابی از معادله $x' = x^{\frac{2}{3}}$ است. در این صورت،

در هر بازه باز که جواب مقدار صفر را نمی‌گیرد، داریم $\frac{x'}{x^{\frac{2}{3}}} = 1$. با انتگرال‌گیری از طرفین، خواهیم داشت

$$x(t) = \frac{(t+c)^3}{27}$$

که در آن c یک ثابت حقیقی است.

به آسانی با جای‌گذاری مستقیم در معادله، می‌توان بررسی کرد که هر یک از این جواب‌ها روی \mathbb{R} تعریف شده‌اند

(حتی اگر در $t = -c$ صفر شوند). به‌ویژه، $x(t) = \frac{t^3}{27}$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = x^{\frac{2}{3}}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

است که جواب ثابت $x(t) = 0$ را نیز دارد.

از طرف دیگر، در بخش ۴.۱ نشان می‌دهیم که برای تابع پیوسته f مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) همیشه یک

جواب دارد، اگرچه لزومی ندارد که یکتا باشد.

۲.۲.۱. انقباضات در فضاهاى متریک. این بخش حاوی مطالبی با ماهیت عرضی‌تر است و در درجه اول برای

کامل بودن نمایش گنجانده شده است. به‌طور خاص، این نظریه با در نظر گرفتن نظریه معادلات دیفرانسیل با شیوه‌ای عملگری توسعه یافته است.

ابتدا بعضی مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابع $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ یک فاصله در X گفته می‌شود هرگاه

(الف) $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$ ؛

(ب) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(y, x)$ ؛

(ج) برای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

در این صورت جفت (X, d) یک فضای متریک است.

برای مثال، فاصله در \mathbb{R}^n را می‌توان به صورت

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (27.1)$$

یا

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}, \quad (28.1)$$

از بین تمام حالت‌های مختلف دیگر تعریف کرد.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $x \in X$ و $r > 0$. گوی باز به شعاع r و مرکز x را به صورت

$$B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\},$$

و گوی بسته به شعاع r و مرکز x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$

یک کلاس خاص از فاصله‌ها از مفهوم نُرم به دست آمده است.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید X یک فضای خطی (روی \mathbb{R}) باشد. تابع $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ یک نُرم در X نامیده می‌شود هرگاه

$$(الف) \quad \|x\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0;$$

$$(ب) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad x \in X \text{ و } \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(ج) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X.$$

از این رو، جفت $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای نُرم‌دار می‌گوییم.

برای مثال، نُرم در \mathbb{R}^n را می‌توان به صورت

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (۲۹.۱)$$

یا

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}, \quad (۳۰.۱)$$

از بین بسیاری از حالت‌های دیگر تعریف کرد.

قضیه ۲۷.۱. فرض کنید جفت $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نُرم دار باشد، دراین صورت، تابع $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ با ضابطه $d(x, y) = \|x - y\|$ یک فاصله در X است.

برهان. برای خاصیت اول در فاصله، از خاصیت اول نُرم استفاده می‌کنیم. داریم

$$d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0,$$

ازاین‌رو، $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$.

برای خاصیت دوم فاصله از خاصیت دوم نُرم استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|-(x - y)\| \\ &= |-1| \|x - y\| = \|x - y\|, \end{aligned}$$

ازاین‌رو، $d(y, x) = d(x, y)$.

سرانجام، برای خاصیت آخر از خاصیت سوم نُرم استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

□

برای مثال، فاصله‌ها در (۲۷.۱) و (۲۸.۱) همان‌گونه که در قضیه ۲۷.۱ شرح داده شد، از نُرم‌ها در (۲۹.۱)

و (۳۰.۱) به دست می‌آیند.

حال مفاهیم دنباله همگرا و دنباله کوشی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنید $(x_n) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای متریک (X, d) باشد. می‌گوییم که

(الف) $(x_n)_n$ یک دنباله همگرا است هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد که وقتی $n \rightarrow \infty$ داشته باشیم

$$d(x_n, x) \rightarrow 0$$

(ب) $(x_n)_n$ یک دنباله کوشی است هرگاه برای $\epsilon > 0$ داده شده، $p \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad n, m > p$$

واضح است که هر دنباله همگرا، یک دنباله کوشی است.

تعریف ۲۹.۱. فضای متریک (X, d) کامل نامیده می شود هرگاه هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.

برای مثال، فضای \mathbb{R}^n با فاصله تعریف شده در (۲۷.۱) یا (۲۸.۱) یک فضای متریک کامل است. مثال دیگری در زیر آمده است.

قضیه ۳۰.۱. مجموعه $X = C(I)$ از همه توابع پیوسته کراندار $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ در مجموعه $I \subset \mathbb{R}^k$ با فاصله

$$d(x, y) = \sup\{\|x(t) - y(t)\| : t \in I\}, \quad (۳۱.۱)$$

یک فضای متریک کامل است.

برهان. به آسانی می توان بررسی کرد که d یک فاصله است. برای اینکه نشان دهیم X یک فضای متریک کامل است، فرض می کنیم $(x_p)_p$ یک دنباله کوشی در X باشد. برای هر $t \in I$ داریم

$$\|x_p(t) - x_q(t)\| \leq d(x_p, x_q), \quad (۳۲.۱)$$

و بنابراین، $(x_p(t))_p$ در \mathbb{R}^n یک دنباله کوشی است. در نتیجه، همگرا است (زیرا تمام دنباله های کوشی در \mathbb{R}^n همگرا هستند) و حد زیر وجود دارد

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} x_p(t). \quad (۳۳.۱)$$

این حد، تابع $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ را نتیجه می دهد. برای هر $t, s \in I$ داریم

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \|x(t) - x_p(t)\| + \|x_p(t) - x_p(s)\| + \|x_p(s) - x(s)\|. \quad (۳۴.۱)$$

از طرف دیگر، از رابطه (۳۲.۱) (و این حقیقت که $(x_p)_p$ یک دنباله کوشی است) نتیجه می‌گیریم که برای $\epsilon > 0$ ، عدد $r \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $t \in I$ و $p, q \geq r$ رابطه زیر برقرار است

$$\|x_p(t) - x_q(t)\| < \epsilon. \quad (۳۵.۱)$$

با فرض اینکه در رابطه (۳۵.۱)، $q \rightarrow \infty$ ، برای $t \in I$ و $p \geq r$ به دست می‌آوریم

$$\|x_p(t) - x(t)\| \leq \epsilon. \quad (۳۶.۱)$$

از این رو، از رابطه (۳۴.۱) (با اختیار $p = r$) نتیجه می‌شود که برای هر $t, s \in I$ ، رابطه زیر برقرار است

$$\|x(t) - x(s)\| \leq 2\epsilon + \|x_r(t) - x_r(s)\|. \quad (۳۷.۱)$$

از آنجایی که، تابع x_r پیوسته است، برای $t \in I$ ، $\delta > 0$ موجود است به طوری که هرگاه $\|t - s\| < \delta$ ، رابطه زیر برقرار است

$$\|x_r(t) - x_r(s)\| < \epsilon.$$

بنابراین، از رابطه (۳۷.۱) نتیجه می‌شود که هرگاه $\|t - s\| < \delta$ ، رابطه زیر برقرار است

$$\|x(t) - x(s)\| < 3\epsilon,$$

و تابع x پیوسته است. به هر حال، از رابطه (۳۶.۱) نتیجه می‌شود که برای $\epsilon > 0$ ، $r \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $p \geq r$ رابطه زیر برقرار است

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_p(t) - x(t)\| + \|x_p(t)\| \\ &\leq \epsilon + \sup\{\|x_p(t)\| : t \in I\} < +\infty, \end{aligned}$$

و از این رو، $x \in X$. علاوه بر این، همچنین، با توجه به رابطه (۳۶.۱)، برای هر $p \geq r$ داریم

$$d(x_p, x) = \sup\{\|x_p(t) - x(t)\| : t \in I\} \leq \epsilon,$$

□ و از این رو، وقتی که $d(x_p, x) \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$ این نشان می‌دهد که X یک فضای متریک کامل است.

تعریف ۳۱.۱. تابع $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه $I \subset \mathbb{R}^k$ لپشیتز نامیده می‌شود هرگاه $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $t, s \in I$ ، رابطه زیر برقرار باشد

$$\|x(t) - x(s)\| \leq L\|t - s\|. \quad (۳۸.۱)$$

واضح است که همه توابع لپشیتز پیوسته هستند.

قضیه ۳۲.۱. مجموعه همه توابع لپشیتز کراندار $Y \subset C(I)$ با ثابت L در رابطه (۳۸.۱)، یک فضای متریک کامل با فاصله d در رابطه (۳۱.۱) است.

برهان. با توجه به قضیه ۳۰.۱، کافی است که نشان دهیم که اگر $(x_p)_p$ یک دنباله کوشی در Y (و بنابراین در $C(I)$) باشد، آنگاه حد آن x در رابطه (۳۸.۱) صدق می‌کند. بنابراین، فرض می‌کنیم $(x_p)_p$ یک دنباله کوشی در Y باشد. برای هر $p \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|x_p(t) - x_q(t)\| \leq L\|t - s\|, \quad t, s \in I. \quad (۳۹.۱)$$

از طرف دیگر، با توجه به رابطه (۳۳.۱)، برای هر $t \in I$ ، وقتی $p \rightarrow \infty$ داریم $x_p(t) \rightarrow x(t)$ ، و بنابراین، از رابطه (۳۹.۱) نتیجه می‌گیریم که $x \in Y$.

اکنون دسته خاصی از تبدیلات را که چندین بار در اثبات‌های این کتاب ظاهر می‌شوند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳۳.۱. تبدیل $T : X \rightarrow X$ در فضای متریک (X, d) انقباضی نامیده می‌شود هرگاه $\lambda \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ ، رابطه زیر برقرار باشد

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

مثال ۳۴.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی با ضابطه $T(x) = Ax$ باشد. فاصله d در رابطه (۲۷.۱)، به دست آمده از نرم زیر را در نظر بگیرید

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

داریم

$$d(T(x), T(y)) = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\|d(x, y),$$

که در آن

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (40.1)$$

به ویژه، اگر $\|A\| < 1$ ، آنگاه تبدیل T یک انقباض است.

برای مثال، اگر A یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{(x_1, \dots, x_n) \neq 0} \frac{\|(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)\|}{\|(x_1, \dots, x_n)\|} \\ &\leq \max\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

از این رو، اگر $|\lambda_i| < 1$ برای $i = 1, \dots, n$ ، آنگاه $\|A\| < 1$ و T یک انقباض است.

می‌گوییم که $x_0 \in X$ یک نقطه ثابت تبدیل $T: X \rightarrow X$ است هرگاه $T(x_0) = x_0$. انقباضات در قضیه

نقطه ثابت زیر صدق می‌کنند، که T^n به طور بازگشتی توسط $T^{n+1} = T \circ T^n$ برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۳۵.۱. اگر $T: X \rightarrow X$ یک انقباض در فضای متریک کامل (X, d) باشد، آنگاه T یک نقطه ثابت

یکتا دارد. علاوه بر این، برای هر $x \in X$ دنباله $(T^n(x))_n$ به نقطه ثابت یکتای T همگرا است.

برهان. برای $x \in X$ ، دنباله $x_n = T^n(x)$ را برای $n \in \mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم. برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ ، با $m > n$

داریم

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + \lambda^n)d(T(x), x) \\
&= \lambda^n \frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda} d(T(x), x) \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(T(x), x). \tag{۴۱.۱}
\end{aligned}$$

بنابراین، $(x_n)_n$ یک دنباله کوشی در X است، و چون فضا کامل است، دنباله حد دارد، مثلاً $x_0 \in X$. حال توجه می‌کنیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ رابطه زیر برقرار است

$$d(T(x_n), T(x_0)) \leq \lambda d(x_n, x_0) \rightarrow 0,$$

و از این رو، دنباله $(T(x_n))_n$ به $T(x_0)$ همگرا است. اما از آنجایی که $T(x_n) = x_{n+1}$ ، دنباله $(T(x_n))_n$ همگرا به x_0 است. از یکتایی حد نتیجه می‌شود که $T(x_0) = x_0$ ، یعنی، x_0 یک نقطه ثابت از تبدیل T است. برای اینکه نشان دهیم نقطه ثابت یکتا است، فرض می‌کنیم که $y_0 \in X$ نیز یک نقطه ثابت باشد. بنابراین

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq \lambda d(x_0, y_0). \tag{۴۲.۱}$$

چون $\lambda < 1$ ، از رابطه (۴۲.۱) نتیجه می‌شود که $x_0 = y_0$. آخرین خاصیت در قضیه از یکتا بودن نقطه ثابت نتیجه می‌شود، زیرا قبلاً نشان داده‌ایم که برای هر $x \in X$ دنباله $(T^n(x))_n$ به نقطه ثابت T همگرا می‌شود. \square

از اثبات قضیه ۳۵.۱ (رابطه (۴۱.۱) را ببینید) نتیجه می‌شود که اگر $x_0 \in X$ یک نقطه ثابت یکتا از نگاشت

انقباضی $T : X \rightarrow X$ باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ و $n \in \mathbb{N}$ رابطه زیر را داریم

$$d(T^n(x), x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(T(x), x).$$

به ویژه، هر دنباله $(T^n(x))_n$ به صورت نمایی به x_0 همگرا می‌شود.

با توجه به آخرین خاصیت در قضیه ۳۵.۱، مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳۶.۱. نقطه ثابت $x_0 \in X$ از تبدیل $T : X \rightarrow X$ جاذب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ وقتی

$$n \rightarrow \infty \text{ داشته باشیم } T^n(x) \rightarrow x_0.$$

اکنون وضعیت کلی تری را در نظر می‌گیریم که در آن هنوز امکان ایجاد یک قضیه نقطه ثابت وجود دارد. برای فضاهای متریک X و Y (نه لزوماً کامل)، تبدیل $S : X \times Y \rightarrow X \times Y$ را به صورت

$$S(x, y) = (T(x), A(x, y)), \quad (۴۳.۱)$$

در نظر بگیرید که در آن $T : X \rightarrow X$ و $A : X \times Y \rightarrow Y$. هر مجموعه $\{x\} \times Y$ یک تار از $X \times Y$ نامیده می‌شود. توجه کنید که تصویر تار $\{x\} \times Y$ تحت تبدیل S داخل تار $\{T(x)\} \times Y$ است.

تعریف ۳۷.۱. تبدیل S در رابطه (۴۳.۱) یک انقباض تار نامیده می‌شود هرگاه $\lambda \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ و $y, \bar{y} \in Y$ رابطه زیر برقرار باشد

$$d_Y(A(x, y), A(x, \bar{y})) \leq \lambda d_Y(y, \bar{y}). \quad (۴۴.۱)$$

در زیر قضیه نقطه ثابت برای انقباض تار آمده است.

قضیه ۳۸.۱. (قضیه انقباض تار) برای انقباض تار پیوسته S ، اگر $x_0 \in X$ یک نقطه ثابت جاذب از T و $y_0 \in Y$ یک نقطه ثابت از $A(x_0, y) \mapsto y$ باشد، آنگاه (x_0, y_0) یک نقطه ثابت جاذب از S است.

برهان. فرض کنید d_X و d_Y به ترتیب فاصله‌ها در X و Y باشند. فاصله d در $X \times Y$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$d((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) = d_X(x, \bar{x}) + d_Y(y, \bar{y}).$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$d(S^n(x, y), (x_0, y_0)) \leq d(S^n(x, y), S^n(x, y_0)) + d(S^n(x, y_0), S^n(x_0, y_0)). \quad (۴۵.۱)$$

نشان می‌دهیم وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، هر دو عبارت در سمت راست رابطه (۴۵.۱) به صفر میل می‌کنند. فرض کنید

$x \in X$ ، تبدیل $A_x : X \rightarrow Y$ را با ضابطه $A_x(y) = A(x, y)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که

$$S(x, y) = (T(x), A_x(y)).$$

علاوه بر این، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$S^n(x, y) = (T^n(x), A_{x,n}(y)), \quad (۴۶.۱)$$

که

$$A_{x,n} = A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T(x)} \circ A_x.$$

برای عبارت نخست در رابطه (۴۵.۱)، از روابط (۴۴.۱) و (۴۶.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$d(S^n(x, y), S^n(x, y_0)) = d_Y(A_{x,n}(y), A_{x,n}(y_0)) \leq \lambda^n d_Y(y, y_0) \rightarrow 0, \quad (۴۷.۱)$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ برای عبارت دوم، توجه کنید که

$$d(S^n(x, y_0), (x_0, y_0)) \leq d_X(T^n(x), x_0) + d_Y(A_{x,n}(y_0), y_0). \quad (۴۸.۱)$$

از آنجایی که x_0 یک نقطه ثابت جاذب از T است، وقتی که $n \rightarrow \infty$ داریم $d_X(T^n(x), x_0) \rightarrow 0$. به این ترتیب نشان دادیم که (x_0, y_0) یک نقطه ثابت جاذب از S است. اکنون باید بررسی کنیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ عبارت دوم در سمت راست رابطه (۴۸.۱) به صفر میل می‌کند. برای این منظور، توجه کنید که

$$\begin{aligned} d_Y(A_{x,n}(y_0), y_0) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d_Y((A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T^i(x)})(y_0), (A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T^{i+1}(x)})(y_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i-1} d_Y(A_{T^i(x)}(y_0), y_0), \end{aligned}$$

که برای $i = n - 1$ داریم $A_{T^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ A_{T^{i+1}(x)} = Id$ از آنجایی که y_0 یک نقطه ثابت A_{x_0} است، داریم

$$c_i := d_Y(A_{T^i(x)}(y_0), y_0) = d_Y(A(T^i(x), y_0), A(x_0, y_0)). \quad (۴۹.۱)$$

از طرف دیگر، چون تبدیل A پیوسته (چون S پیوسته است) و x_0 یک نقطه ثابت جاذب از T است، از رابطه (۴۹.۱) نتیجه می‌شود که وقتی $i \rightarrow \infty$ ، دنباله c_i به صفر همگرا است. به ویژه، $c > 0$ وجود دارد به طوری که

برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $0 \leq c_i < c$. بنابراین، برای $k \in \mathbb{N}$ و $n \geq k$ ، داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} c_i &= \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{n-i} c_i + \sum_{i=k}^n \lambda^{n-i} c_i \\ &\leq c \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{n-i} + \sup_{j \geq k} c_j \sum_{i=k}^n \lambda^{n-i} \\ &\leq c \frac{\lambda^{n-k+1}}{1-\lambda} + \sup_{j \geq k} c_j \frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

بنابراین، وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، رابطه زیر برقرار است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i=0}^n \lambda^{n-i} c_i \leq \sup_{j \geq k} c_j \frac{1}{1-\lambda} \rightarrow 0.$$

این رابطه نشان می‌دهد که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، داریم

$$d_Y(A_{x,n}(y_0), y_0) \rightarrow 0,$$

و از روابط (۴۵.۱)، (۴۷.۱)، (۴۸.۱) نتیجه می‌شود که (x_0, y_0) یک نقطه ثابت جاذب از S است. \square

۳.۲.۱. برهان قضیه. اکنون از نتایج نظری ارائه شده در بخش قبل برای اثبات قضیه پیکارد-لیندلف استفاده

می‌کنیم.

برهان. (برهان قضیه ۱۸.۱). با توجه به قضیه ۹.۱، مسئله مقدار اولیه (۱۳.۱) شامل یافتن تابع $x \in C(a, b)$

در بازه باز (a, b) شامل t_0 است به طوری که برای هر $t \in (a, b)$ در معادله انتگرالی زیر صدق می‌کند

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (50.1)$$

در اینجا $C(a, b)$ مجموعه تمام توابع پیوسته کراندار \mathbb{R}^n $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. به دنبال x به عنوان نقطه ثابت

از یک انقباض هستیم.

ثابت‌های $a < t_0 < b$ و $\beta > 0$ را طوری در نظر بگیرید که

$$K := [a, b] \times \overline{B(x_0, \beta)} \subset D, \quad (51.1)$$

که در آن

$$\overline{B(x_0, \beta)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| \leq \beta\}.$$

همچنین، فرض کنید $X \subset C(a, b)$ مجموعه تمام توابع پیوسته \mathbb{R}^n $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ باشد، به طوری که برای $t \in (a, b)$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|x(t) - x_0\| \leq \beta.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که X با فاصله تعریف شده در رابطه (۳۱.۱) یک فضای متریک کامل است. دنباله کوشی $(x_p)_p$ در X را در نظر می‌گیریم، از قضیه ۳۰.۱ نتیجه می‌شود که به تابع $x \in C(a, b)$ همگرا می‌شود. بدین ترتیب، نشان دادیم که $x \in X$. متذکر می‌شویم که از آنجایی که برای $t \in (a, b)$ و $p \in \mathbb{N}$ رابطه

$$\|x_p(t) - x_0\| \leq \beta \text{ برقرار است، برای هر } t \in (a, b) \text{ خواهیم داشت}$$

$$\|x(t) - x_0\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x_p(t) - x_0\| \leq \beta.$$

علاوه بر این، در جستجوی نقاط ثابت در X و نه در $C(a, b)$ ، کلیت از بین نمی‌رود. واضح است که اگر $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته باشد که در رابطه (۵۰.۱) صدق کند، آنگاه

$$\|x(t) - x_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq |t - t_0| M \leq (b - a) M,$$

که

$$M = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in K\} < \infty, \quad (52.1)$$

زیرا f پیوسته و K فشرده است (یادآوری می‌کنیم که هر تابع پیوسته با مقادیری در \mathbb{R} ، مانند $(t, x) \mapsto \|f(t, x)\|$ در هر مجموعه فشرده ماکسیمم دارد). این نشان می‌دهد که اگر $x \in C(a, b)$ و در رابطه (۵۰.۱) صدق کند، آنگاه آن برای برخی از β ها متعلق به X است.

حال تبدیل T تعریف شده با ضابطه زیر را برای $x \in X$ در نظر بگیرید

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

متذکر می شویم که $t \mapsto T(x)(t)$ پیوسته است و

$$\|T(x)(t) - x_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq (b-a)M.$$

برای $b-a$ به اندازه کافی کوچک، داریم $(b-a)M \leq \beta$ و از این رو $T(X) \subset X$. علاوه بر این، برای $x, y \in X$ داریم

$$\begin{aligned} \|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \\ &\leq (b-a)Ld(x, y), \end{aligned}$$

که ثابت L در رابطه (۲۵.۱) برای مجموعه فشرده K تعریف شده در رابطه (۵۱.۱) است و d فاصله تعریف شده در رابطه (۳۱.۱) برای $I = (a, b)$ است. از این رو، برای هر $x, y \in X$ ، داریم

$$d(T(x), T(y)) \leq (b-a)Ld(x, y).$$

برای $b-a$ به اندازه کافی کوچک، داریم $(b-a)L < 1$. علاوه بر این، $(b-a)M \leq \beta$ و T یک انقباض در فضای متریک کامل X است. با توجه به قضیه ۳۵.۱، نتیجه می گیریم که T یک نقطه ثابت یکتای $x \in X$ دارد. این تابع پیوسته یکتایی است که در بازه (a, b) تعریف شده است که در رابطه (۵۰.۱) صدق می کند. \square

۳.۱ خواص بیشتر

در این بخش برخی از خواص دیگر جواب های معادله دیفرانسیل عادی، شامل وابستگی جواب ها به شرایط اولیه و اتفاقاتی که رخ می دهد تا جواب مفروض نتواند به بازه بزرگتر توسعه پیدا کند را مطالعه می کنیم.

۱.۳.۱. وابستگی لیشیتز به شرایط اولیه. ابتدا شرح می‌دهیم که چگونه جواب‌ها به شرایط اولیه برای تابع پیوسته f که به‌طور موضعی لیشیتز است، بستگی دارند. با یک نتیجه کمکی شروع می‌کنیم.

قضیه ۳۹.۱. (لم گرونوال).^۱ فرض کنید $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ توابع پیوسته باشند، $v \geq 0$ و $c \in \mathbb{R}$. اگر برای هر $t \in [a, b]$ رابطه

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds, \quad (53.1)$$

برقرار باشد، آنگاه برای هر $t \in [a, b]$ نامساوی زیر برقرار است

$$u(t) \leq c \exp \int_a^t v(s)ds.$$

برهان. توابع $R(t)$ و $V(t)$ را به‌صورت

$$R(t) = \int_a^t u(s)v(s)ds,$$

و

$$V(t) = \int_a^t v(s)ds,$$

در نظر بگیرید. واضح است که $R(a) = 0$ و

$$R'(t) = u(t)v(t) \leq (c + R(t))v(t).$$

بنابراین

$$R'(t) - v(t)R(t) \leq cv(t),$$

و

$$\frac{d}{dt}(e^{-V(t)}R(t)) = e^{-V(t)}(R'(t) - v(t)R(t))$$

¹Gronwall's Lemma

$$\leq cv(t)e^{-V(t)}.$$

از آنجایی که $R(a) = 0$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} e^{-V(t)}R(t) &\leq \int_a^t cv(\tau)e^{-V(\tau)}d\tau \\ &= -ce^{-V(\tau)}\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} = c(1 - e^{-V(t)}), \end{aligned}$$

و از این رو

$$R(t) \leq ce^{V(t)} - c.$$

بنابراین، از رابطه (۵۳.۱) نتیجه می‌شود که برای هر $t \in [a, b]$ ، نامساوی

$$u(t) \leq c + R(t) \leq e^{V(t)},$$

برقرار خواهد بود که این همان نامساوی مطلوب است. \square

اکنون وابستگی لپشیتز جواب‌ها را به شرایط اولیه ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴۰.۱. فرض کنید $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ به‌طور موضعی

لپشیتز باشد. برای هر $(t_0, x_1) \in D$ ، ثابت‌های $C > 0$ ، β و بازه باز I شامل t_0 وجود دارد به‌طوری‌که برای

هر $x_2 \in \mathbb{R}^n$ با $\|x_1 - x_2\| \leq \beta$ جواب‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به‌ترتیب از مسئله‌های با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_2, \end{cases} \quad (۵۴.۱)$$

برای هر $t \in I$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq C\|x_1 - x_2\|. \quad (۵۵.۱)$$

برهان. با توجه به قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱)، مسئله‌های با مقدار اولیه داده‌شده در (۵۴.۱) جواب‌های

یکتای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ روی بازه باز I شامل t_0 دارند (که می‌توانیم فرض کنیم که این جواب‌ها یکسان باشند).

علاوه بر این، با توجه به قضیه ۱۹.۱، برای هر $t \in I$ و $i = 1, 2$ داریم

$$x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (۵۶.۱)$$

برای سادگی، اثبات را فقط برای $t \geq t_0$ در نظر می‌گیریم. نتایج مشابه برای $t \leq t_0$ نیز برقرار است.

تابع $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

برای $t \geq t_0$ ، از رابطه (۵۶.۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| ds \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + L \int_{t_0}^t \|y(s)\| ds, \end{aligned}$$

که در آن L یک مقدار ثابت است (چون f نسبت به x ، به‌طور موضعی لیبشیتز است). با فرض اینکه

$$u(t) = \|y(t)\|, \quad v(t) = L, \quad c = \|x_1 - x_2\|,$$

از لم گرونوال (قضیه ۳۹.۱) نتیجه می‌شود که برای $t \in I \cap [t_0, +\infty)$ رابطه زیر برقرار است

$$u(t) \leq c \exp \int_{t_0}^t v(s) ds = \|x_1 - x_2\| e^{L(t-t_0)},$$

□ که نامساوی (۵۵.۱) را برای این مقادیر t برقرار می‌کند.

۲.۳.۱. وابستگی هموار به شرایط اولیه. در این بخش نشان می‌دهیم که برای تابع f از کلاس C^1 ، جواب‌ها

نیز از کلاس C^1 روی شرایط اولیه هستند. برای اثبات، از قضیه انقباض تار استفاده می‌کنیم (قضیه ۳۸.۱).

ابتدا یک نتیجه کمکی روی حد یک دنباله از توابع دیفرانسیل‌پذیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴۱.۱. اگر دنباله توابع دیفرانسیل پذیر $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ همگرا (نقطه به نقطه) باشد و دنباله df_n از مشتقاتشان به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه حد دنباله f_n روی U دیفرانسیل پذیر است و مشتقش حد دنباله df_n روی U است.

برهان. فرض کنید $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $g : U \rightarrow M_n$ به ترتیب حدهای (نقطه به نقطه) دنباله f_n و df_n باشند، که M_n مجموعه ماتریس های $n \times n$ با درایه های حقیقی است. برای هر $x, h \in \mathbb{R}^n$ به طوری که پاره خط بین x و $x+h$ داخل U باشد، و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_n(x+th) dt = \int_0^1 d_{x+th} f_n h dt. \quad (57.1)$$

از طرف دیگر، از آنجایی که دنباله df_n به طور یکنواخت همگرا است، برای $\delta > 0$ ، $p \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای $m, n > p$

$$\sup\{\|d_y f_n - d_y f_m\| : y \in U\} < \delta.$$

از این رو، برای $m, n > p$ ، از رابطه (57.1) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \|(f_n(x+h) - f_n(x)) - (f_m(x+h) - f_m(x))\| &= \left\| \int_0^1 (d_{x+th} f_n - d_{x+th} f_m) h dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|d_{x+th} f_n - d_{x+th} f_m\| dt \|h\| \\ &\leq \delta \|h\|. \end{aligned}$$

با فرض اینکه $m \rightarrow \infty$ ، برای هر $n > p$ ، به دست می آوریم

$$\|(f_n(x+h) - f_n(x)) - (f(x+h) - f(x))\| \leq \delta \|h\|. \quad (58.1)$$

حال نشان می دهیم که f دیفرانسیل پذیر است. برای هر $x, h \in \mathbb{R}^n$ به طوری که پاره خط واصل x و $x+h$ داخل U باشد، و برای هر $\epsilon \in (0, 1)$ داریم

$$\left\| \frac{f(x+\epsilon h) - f(x)}{\epsilon} - g(x)h \right\| \leq \left\| \frac{f(x+\epsilon h) - f(x)}{\epsilon} - \frac{f_n(x+\epsilon h) - f_n(x)}{\epsilon} \right\|$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \frac{f_n(x + \epsilon h) - f_n(x)}{\epsilon} - d_x f_n h \right\| \\
& + \|d_x f_n h - g(x)h\|. \tag{۵۹.۱}
\end{aligned}$$

از آنجایی که g حد دنباله df_n است، برای هر $\delta > 0$ ، $q \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > q$ رابطه زیر را داریم

$$\sup\{\|d_y f_n - g(y)\| : y \in U\} < \delta. \tag{۶۰.۱}$$

اکنون، $n > \max\{p, q\}$ را اختیار کنید. از آنجایی که f_n دیفرانسیل پذیر است، برای هر ϵ به اندازه کافی کوچک، داریم

$$\left\| \frac{f_n(x + \epsilon h) - f_n(x)}{\epsilon} - d_x f_n h \right\| < \delta \|h\|. \tag{۶۱.۱}$$

از رابطه (۵۹.۱) همراه با روابط (۵۸.۱)، (۶۰.۱)، (۶۱.۱) نتیجه می شود که

$$\left\| \frac{f(x + \epsilon h) - f(x)}{\epsilon} - g(x)h \right\| \leq 3\delta \|h\|.$$

بنابراین، تابع f در x دیفرانسیل پذیر است و برای هر $h \in \mathbb{R}^n$ ، رابطه $d_x f h = g(x)h$ برقرار است؛ یعنی، $df = g$ □

اکنون وابستگی C^1 جواب ها به شرایط اولیه را ثابت می کنیم.

قضیه ۴۲.۱. اگر تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 باشد، آنگاه برای هر $(t_0, x_0) \in D$ تابع $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ که $\varphi(0, x_0)$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است، در یک همسایگی از (t_0, x_0) از کلاس C^1 است.

برهان. اثبات را به چند مرحله تقسیم می کنیم.

مرحله نخست. ساخت یک فضای متریک. برای $(t_0, x_0) \in D$ ، ثابت های $\alpha, \beta > 0$ را طوری اختیار می کنیم

که

$$S := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(x_0, 2\beta)} \subset D. \quad (۶۲.۱)$$

از آنجایی که مجموعه S فشرده و f پیوسته است، داریم

$$K := \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in S\} < +\infty$$

(یادآوری می‌کنیم که یک تابع پیوسته با مقادیری در \mathbb{R} روی هر مجموعه فشرده، ماکسیمم دارد). در صورت

لزوم، $\alpha > 0$ را کوچک‌تر اختیار می‌کنیم به طوری که $\alpha K \leq \beta$ ، و مجموعه X از تمام توابع پیوسته

$\varphi : U \rightarrow B(x_0, 2\beta)$ روی مجموعه باز

$$U = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \times B(x_0, \beta), \quad (۶۳.۱)$$

مجهز با فاصله زیر را در نظر می‌گیریم

$$d(\varphi, \psi) = \sup\{\|\varphi(t, x) - \psi(t, x)\| : (t, x) \in U\}. \quad (۶۴.۱)$$

با تکرار استدلال‌ها در اثبات قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱)، به راحتی از قضیه ۳۰.۱ نتیجه می‌شود که X یک فضای متریک کامل است.

مرحله دوم. ساخت یک انقباض در X . تبدیل T در X را برای هر $(t, x) \in U$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$T(\varphi)(t, x) = x + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s, x)) ds.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $T(\varphi)$ یک تابع پیوسته است. واضح است که برای هر $x \in B(x_0, \beta)$ ، تابع

$x \mapsto T(\varphi)(t, x)$ پیوسته است. برای هر $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ ، نشان می‌دهیم که تابع $x \mapsto T(\varphi)(t, x)$

نیز پیوسته است. برای هر $x, y \in B(x_0, \beta)$ و برای مقدار ثابت L ، داریم

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(t, x) - T(\varphi)(t, y)\| &\leq \|x - y\| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s, x)) - f(s, \varphi(s, y))\| ds \right| \\ &\leq \|x - y\| + L \left| \int_{t_0}^t \|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\| ds \right|. \quad (۶۵.۱) \end{aligned}$$

واضح است که با توجه به قضیه ۱۹.۱، تابع f نسبت به x به طور موضعی لیبشیتز است، و از این رو، می توان مقدار ثابت L را در رابطه (۲۵.۱) برای مجموعه فشرده S داده شده در رابطه (۶۲.۱) در نظر گرفت. علاوه بر این، هر تابع $\varphi \in X$ روی مجموعه فشرده

$$\bar{U} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(x_0, \beta)},$$

به طور یکنواخت پیوسته است، زیرا φ پیوسته است. بنابراین، برای $\delta > 0$ ، $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ و $\|x - y\| < \epsilon$ ، داشته باشیم

$$\|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\| < \delta.$$

بدون از دست دادن کلیت، می توان همیشه فرض کرد $\delta < \epsilon$. از این رو، از رابطه (۶۵.۱) نتیجه می شود که اگر $\|x - y\| < \epsilon$ ، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$\|T(\varphi)(t, x) - T(\varphi)(t, y)\| < \epsilon + L|t - t_0|\delta < \delta(1 + L\alpha).$$

این نشان می دهد که تابع $x \mapsto T(\varphi)(t, x)$ پیوسته است. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(t, x) - x_0\| &\leq \|x - x_0\| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s, x))\| ds \right| \\ &\leq \|x - x_0\| + \alpha K < \beta + \beta = 2\beta. \end{aligned}$$

از این رو، $T(X) \subset X$.

حال بررسی می کنیم که T یک انقباض است. با همان مقدار ثابت L در رابطه (۶۵.۱)، داریم

$$\|T(\varphi)(t, x) - T(\psi)(t, x)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s, x)) - f(s, \psi(s, x))\| ds \right|$$

$$\leq Lad(\varphi, \psi), \quad (۶۶.۱)$$

بنابراین

$$d(T(\varphi), T(\psi)) \leq Lad(\varphi, \psi).$$

برای مقدار به اندازه کافی کوچک α ، داریم $L\alpha < 1$ ، به علاوه، $\alpha K \leq \beta$ ، و از این رو، T یک نگاشت انقباض است. با توجه به قضیه ۳۵.۱، نتیجه می‌گیریم که T یک نقطه ثابت یکتای $\varphi_0 \in X$ دارد، که بدین ترتیب برای هر $x \in B(x_0, \beta)$ و $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\varphi_0(t, x) = x + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s, x)) ds. \quad (۶۷.۱)$$

با توجه به قضیه ۹.۱، از رابطه (۶۷.۱) نتیجه می‌شود که تابع $t \mapsto \varphi_0(t, x_0)$ یک جواب از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است. به ویژه، از کلاس C^1 است. برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که φ_0 بر حسب x از کلاس C^1 است.

مرحله سوم. ساخت انقباض تار. دوباره فرض کنید M_n مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. همچنین فرض کنید Y مجموعه تمام توابع پیوسته $\Phi : U \rightarrow M_n$ باشد که در آن U به صورت رابطه (۶۳.۱) است، به طوری که

$$\sup\{\|\varphi(t, x)\| : (t, x) \in U\} < +\infty,$$

(نرم $\|\Phi(t, x)\|$ با رابطه (۴۰.۱) تعریف شده است). از قضیه ۳۰.۱ نتیجه می‌شود که Y یک فضای متریک کامل با فاصله زیر است

$$d(\Phi, \Psi) := \sup\{\|\Phi(t, x) - \Psi(t, x)\| : (t, x) \in U\}.$$

حال تبدیل A در $X \times Y$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$A(\varphi, \Phi)(t, x) = Id + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, x)) \Phi(s, x) ds,$$

که در آن $Id \in M_n$ ماتریس همانی است. همچنین تبدیل S در رابطه (۴۳.۱) را در نظر می‌گیریم؛ یعنی،

$$S(\varphi, \Phi) = (T(\varphi), A(\varphi, \Phi)).$$

ابتدا نشان می‌دهیم که S پیوسته است. با توجه به رابطه (۶۶.۱)، تبدیل T پیوسته است. علاوه بر این،

$$\begin{aligned} & \|A(\varphi, \Phi)(t, x) - A(\psi, \Psi)(t, x)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, x)) \Phi(s, x) ds - \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \psi(s, x)) \Psi(s, x) ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, x)) [\Phi(s, x) - \Psi(s, x)] ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(s, x)) \right) \Psi(s, x) ds \right\| \quad (۶۸.۱) \\ &\leq \alpha M d(\Phi, \Psi) \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, \psi(s, x)) \right\| \cdot \|\Psi(s, x)\| ds \right|, \end{aligned}$$

که در آن

$$M := \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| : (t, x) \in \bar{U} \right\} < +\infty.$$

با اختیار $\varphi = \psi$ در رابطه (۶۸.۱)، خواهیم داشت

$$d(A(\varphi, \Phi), A(\varphi, \Psi)) \leq \alpha M d(\Phi, \Psi). \quad (۶۹.۱)$$

به‌ویژه، تابع $A(\varphi, \Phi) \mapsto \Phi$ برای هر $\varphi \in X$ پیوسته است. از طرف دیگر، از آنجایی که $\partial f / \partial x$ روی مجموعه فشردۀ \bar{U} به‌طور یکنواخت پیوسته است، برای هر $\delta > 0$ ، $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

و $\|x - y\| < \epsilon$ داریم

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, y) \right\| < \delta.$$

از این رو، اگر $d(\varphi, \psi) < \epsilon$ (رابطه (۶۴.۱) را ببینید)، آنگاه برای $s \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ و $x \in B(x_0, \beta)$ داریم

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi(s, x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, \psi(s, x)) \right\| < \delta.$$

از رابطه (۶۹.۱) با $\Phi = \Psi$ نتیجه می‌شود که

$$\|A(\varphi, \Phi)(t, x) - A(\psi, \Psi)(t, x)\| \leq \alpha \delta \sup\{\|\Phi(t, x)\| : (t, x) \in U\},$$

و بنابراین اگر $d(\varphi, \psi) < \epsilon$ آنگاه رابطه زیر را داریم

$$d(A(\varphi, \Phi), A(\psi, \Psi)) \leq \alpha \delta \sup\{\|\Phi(t, x)\| : (t, x) \in U\}.$$

این نشان می‌دهد که تابع $\varphi \mapsto A(\varphi, \Phi)$ برای هر $\Phi \in Y$ پیوسته است، و از این رو، $A(X \times Y) \subset Y$. به علاوه، برای مقادیر به اندازه کافی کوچک α داریم $\alpha M < 1$ ، و از رابطه (۶۹.۱) نتیجه می‌گیریم که S یک انقباض تار است.

مرحله چهارم. همگرایی یکنواخت و C^1 منظم بودن. با توجه به قضیه انقباض تار (قضیه ۳۸.۱)، برای $(\varphi, \Phi) \in X \times Y$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، دنباله $S^n(\varphi, \Phi)$ به (φ_0, Φ_0) همگرا می‌شود، که Φ_0 یک نقطه ثابت یکتا از انقباض $\Phi \mapsto A(\varphi_0, \Phi)$ در فضای متریک کامل Y است. به عبارت دیگر، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، دنباله توابع $S^n(\varphi, \Phi)$ به طور یکنواخت به تابع پیوسته (φ_0, Φ_0) روی مجموعه باز U همگرا می‌شود.

از آنجایی که Φ_0 پیوسته است، اگر بتوانیم نشان دهیم که

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(t, x) = \Phi_0(t, x), \quad (۷۰.۱)$$

آنگاه φ_0 بر حسب x از کلاس C^1 است، از این رو، از کلاس C^1 است. برای این منظور، توابع φ_1 و Φ_1 را با $\varphi_1(t, x) = x$ و $\Phi_1(t, x) = Id$ در نظر می‌گیریم. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، یک جفت از توابع را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$(\varphi_n, \Phi_n) = S^{n-1}(\varphi_1, \Phi_1).$$

این‌ها را می‌توان به صورت بازگشتی از روابط زیر به دست آورد

$$\varphi_{n+1}(t, x) = x + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s, x)) ds, \quad (۷۱.۱)$$

و

$$\Phi_{n+1}(t, x) = Id + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi_n(s, x)) \Phi_n(s, x) ds. \quad (۷۲.۱)$$

می‌توان با استقرا نشان داد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ توابع φ_n بر حسب x با ضابطه زیر از کلاس C^1 هستند

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s, x)) ds \right) \\ &= Id + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi_n(s, x)) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(s, x) ds. \end{aligned} \quad (۷۳.۱)$$

برای این‌کار، مشاهده این نکته کافی است که اگر φ_n بر حسب x از کلاس C^1 باشد، آنگاه تابع $(s, x) \mapsto f(s, \varphi_n(s, x))$ نیز از کلاس C^1 است، و بنابراین، می‌توان از رابطه (۷۱.۱) همراه با قاعده لاینیتز برای به دست آوردن دیفرانسیل‌پذیری φ_{n+1} و رابطه (۷۳.۱) استفاده کرد. این بدان معناست که φ_{n+1} از کلاس C^1 است.

اکنون، نشان می‌دهیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، رابطه زیر برقرار است

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(t, x) = \Phi_n(t, x). \quad (۷۴.۱)$$

واضح است که

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) = Id = \Phi_1(t, x).$$

برای اینکه با استقرا پیش برویم، فرض می‌کنیم که رابطه (۷۴.۱) برای n معین برقرار باشد. سپس از روابط (۷۳.۱) و (۷۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x}(t, x) = Id + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varphi_n(s, x)) \Phi_n(s, x) ds = \Phi_{n+1}(t, x).$$

این تساوی مطلوب را نتیجه می‌دهد.

سرانجام، فرض کنید $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. دنباله توابع $f_n(x) = \varphi_n(t, x)$ را در نظر بگیرید. با توجه به رابطه (۷۴.۱)، داریم $d_x f_n = \Phi_n(t, x)$. از طرف دیگر، همان‌گونه که پیش از این مشاهده کردیم، با توجه به قضیه انقباض تار (قضیه ۳۸.۱) دنباله‌های f_n و df_n به ترتیب به طور یکنواخت به $\varphi_0(t, 0)$ و $\Phi_0(t, 0)$ همگرا می‌شوند. از این رو، از قضیه ۴۱.۱ نتیجه می‌شود که $(\partial\varphi_0/\partial x)(t, x)$ وجود دارد و در رابطه (۷۰.۱) صدق می‌کند. این اثبات قضیه را کامل می‌کند. \square

۳.۳.۱. بازه ماکسیمال وجود. در این بخش نشان می‌دهیم که هر جواب مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) که توسط قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱) ارائه می‌شود را می‌توان با یک روش یکتا به یک بازه ماکسیمال توسعه داد.

قضیه ۴۳.۱. اگر تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x به طور موضعی لپشیتز باشد، آنگاه برای هر $(t_0, x_0) \in D$ یک جواب یکتای $\mathbb{R}^n \rightarrow (a, b) : \varphi$ از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) وجود دارد به طوری که برای هر جواب $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ از همان مسئله داریم $I_x \subset (c, d)$ و برای $t \in I_x$ تساوی $x(t) = \varphi(t)$ برقرار است.

برهان. متذکر می‌شویم که $J = \bigcup_x I_x$ یک بازه باز است، زیرا اجتماع هر خانواده از بازه‌های باز که شامل t_0 باشد همچنان یک بازه باز (شامل t_0) است. اکنون، تابع $J \rightarrow \mathbb{R}^n : \varphi$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $t \in I_x$ فرض کنید $x(t) = \varphi(t)$. نشان می‌دهیم که تابع φ خوش تعریف است، یعنی $\varphi(t)$ وابسته به x نیست. برای این منظور، فرض کنید $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n$ جواب‌های مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) باشند. همچنین، فرض کنید I بزرگ‌ترین بازه باز شامل t_0 باشد که در آن $x = y$. نشان می‌دهیم $I = I_x \cap I_y$. در غیر این صورت، یک نقطه انتهایی s از I وجود خواهد داشت که متفاوت از نقاط انتهایی $I_x \cap I_y$ است. با توجه به پیوستگی x و y در بازه $I_x \cap I_y$ ، خواهیم داشت

$$p := \lim_{t \rightarrow s} x(t) = \lim_{t \rightarrow s} y(t).$$

از طرف دیگر، طبق قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱) اگر (t_0, x_0) را با (s, p) جایگزین کنیم، بازه باز

$$(s - \alpha, s + \alpha) \subset I_x \cap I_y,$$

وجود خواهد داشت، که در آن $x = y$. از آنجایی که $(s - \alpha, s + \alpha) \setminus I \neq \emptyset$ ، این مطلب با اینکه I بزرگترین بازه باز شامل t_0 است که $x = y$ ، تناقض دارد. بنابراین، $I = I_x \cap I_y$ و $x = y$ در $I_x \cap I_y$. واضح است که تابع $J: \mathbb{R}^n \rightarrow J$: φ یک جواب از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است. این اثبات قضیه را کامل می‌کند. \square

با توجه به قضیه ۴۳.۱، می‌توان مفهوم زیر از بازه ماکسیمال (وجود) یک جواب را معرفی کرد.

تعریف ۴۴.۱. با مفروضات قضیه ۴۳.۱، بازه ماکسیمال جواب $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ از معادله $x' = f(t, x)$ بزرگترین بازه باز (a, b) است که یک جواب منطبق با x روی I وجود دارد.

توجه کنید که بازه ماکسیمال یک جواب، همیشه برابر با \mathbb{R} نیست.

مثال ۴۵.۱. معادله $x' = x^2$ را در نظر بگیرید. به آسانی می‌توان بررسی کرد (برای مثال، با نوشتن $1 = \frac{x'}{x^2}$ و انتگرال‌گیری از طرفین) که معادله دو جواب دارد: یکی $x(t) = 0$ ، با بازه ماکسیمال \mathbb{R} ، و دیگری

$$x(t) = \frac{1}{c - t},$$

با بازه ماکسیمال $(-\infty, c)$ یا $(c, +\infty)$ ، که در آن $c \in \mathbb{R}$. به‌طور دقیق‌تر، برای $x_0 = 0$ جواب مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

تابع $x(t) = 0$ است، با بازه ماکسیمال \mathbb{R} ، برای $x_0 > 0$ جواب به صورت

$$x(t) = \frac{1}{t_0 - t + 1/x_0}, \quad (۷۵.۱)$$

با بازه ماکسیمال $(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0})$ است و، سرانجام، برای $x_0 < 0$ جواب دوباره با رابطه (۷۵.۱) معین می‌شود، اما اکنون بازه ماکسیمال $(t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty)$ است.

نتیجه زیر توضیح می‌دهد که چه اتفاقی برای جواب‌های معادله دیفرانسیل عادی وقتی که حداقل یک نقطه انتهایی از بازه ماکسیمال یک عدد متناهی است رخ می‌دهد.

قضیه ۴۶.۱. فرض کنید $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x ، به‌طور موضعی لپشیتز باشد. اگر جواب $x(t)$ از معادله $x' = f(t, x)$ بازه ماکسیمال (a, b) را داشته باشد، آنگاه برای هر مجموعه فشردۀ $K \subset D$ ، $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر

$$t \in (a, a + \epsilon) \cup (b - \epsilon, b), \quad (۷۶.۱)$$

رابطه $(t, x(t)) \in D \setminus K$ برقرار است (وقتی $a = -\infty$ ، بازه نخست تهی است و وقتی $b = +\infty$ بازه دوم تهی است).

برهان. برای نقطه انتهایی b ، قضیه را ثابت می‌کنیم (اثبات برای نقطه ابتدایی a نیز به‌طریق مشابه است). اثبات به‌برهان خلف. فرض کنید که برای مجموعه فشردۀ $K \subset D$ دنباله $(t_p)_p$ با شرط $t_p \nearrow b$ وقتی $p \rightarrow \infty$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $p \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$(t_p, x(t_p)) \in K.$$

از آنجایی که K فشردۀ است، زیردنباله $(t_{k_p})_p$ وجود دارد به‌طوری‌که $(t_{k_p}, x(t_{k_p}))$ وقتی که $p \rightarrow \infty$ به یک نقطه در K همگرا می‌شود (یادآوری می‌کنیم که مجموعه $K \subset \mathbb{R}^m$ فشردۀ است اگر و تنها اگر هر دنباله $(y_p)_p \subset K$ یک زیردنباله همگرا با حدی در K دارد). فرض کنید

$$(b, x_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (t_{k_p}, x(t_{k_p})).$$

اکنون، شرط اولیه $x(b) = x_0$ و مجموعه فشردۀ

$$K_{\alpha\beta} := [b - \alpha, b + \alpha] \times \overline{B(x_0, \beta)} \subset D,$$

را در اثبات قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱)، برای ثابت‌های $\alpha, \beta > 0$ در نظر می‌گیریم به طوری که $2M\alpha \leq \beta$ ، که در آن M به صورت زیر است

$$M = \sup \{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in K_{\alpha\beta} \}.$$

علاوه بر این، برای هر $p \in \mathbb{N}$ ، مجموعه فشرده زیر را در نظر می‌گیریم

$$L_p := [t_{k_p} - \alpha/2, t_{k_p} + \alpha/2] \times \overline{B(x(t_{k_p}), \beta/2)} \subset D.$$

برای p به اندازه کافی بزرگ، داریم $L_p \subset K_{\alpha\beta}$ و از این رو

$$2 \sup \{ \|f(t, x)\| : x \in L_p \} \alpha/2 \leq 2M\alpha/2 \leq \beta/2.$$

از این رو، با توجه به اثبات قضیه پیکارد-لیندلف، درمی‌یابیم که جواب یکتای

$$y : (t_{k_p} - \alpha/2, t_{k_p} + \alpha/2) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

از معادله $x' = f(t, x)$ با شرط اولیه $y(t_{k_p}) = x(t_{k_p})$ وجود دارد. از آنجایی که برای p به اندازه کافی بزرگ، رابطه $t_{k_p} + \alpha/2 > b$ برقرار است، یک توسیع از جواب x به بازه $(a, t_{k_p} + \alpha/2)$ را به دست می‌آوریم. اما این با این واقعیت که b نقطه انتهایی راست بازه ماکسیمال است در تضاد است. بنابراین، برای هر مجموعه فشرده $K \subset D$ ، $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in (b - \epsilon, b)$ ، رابطه $(t, x(t)) \in D \setminus K$ برقرار است. \square

در زیر یک کاربرد از قضیه ۴۶.۱ آمده است.

مثال ۴۷.۱. در مختصات قطبی معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} r' = -r, \\ \theta' = 2. \end{cases} \quad (۷۷.۱)$$

با توجه به روابط (۹.۱) و (۱۰.۱)، به دست می‌آوریم

$$x' = -r \cos \theta - 2r \sin \theta = -x - 2y,$$

و

$$y' = -r \sin \theta + 2r \cos \theta = -y + 2x.$$

مفروضات قضیه ۴۶.۱ برای مجموعه باز $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ برقرار هستند. از این رو، برای هر مجموعه فشرده $K = [c, d] \times B \subset D$ که B یک گوی بسته به مرکز مبدأ مختصات است، $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $(t, x(t), y(t)) \in D \setminus K$ ، یعنی، برای t در رابطه (۷۶.۱) داریم

$$t \notin [c, d] \quad \text{یا} \quad (x(t), y(t)) \notin B. \quad (۷۸.۱)$$

از طرف دیگر، بر طبق معادله نخست در رابطه (۷۷.۱)، فاصله هر جواب تا مبدأ مختصات با افزایش زمان کاهش می‌یابد. این بدان معناست که هر جواب $(x(t), y(t))$ با شرط اولیه $(x(t_0), y(t_0)) \in B$ برای هر $t > t_0$ در B باقی می‌ماند. از این رو، از رابطه (۷۸.۱) نتیجه می‌شود که برای t های به اندازه کافی بزرگ در بازه ماکسیمال جواب داریم $t \notin [c, d]$. اما از آنجایی که d اختیاری است، برای هر جواب با شرط اولیه در B نتیجه می‌گیریم که نقطه پایانی راست از بازه ماکسیمالش برابر با $+\infty$ است.

۴.۱ وجود جواب‌ها برای میدان‌های پیوسته

در این بخش نشان می‌دهیم که برای یک تابع پیوسته f مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) همیشه جواب دارد. با این حال، این جواب‌ها نباید یکتا باشند (همان‌گونه که در مثال ۲۳.۱ نشان داده شده است). ابتدا یک نتیجه از آنالیز تابعی را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۴۸.۱. (آرژلا-آسکولی).^۱ فرض کنید $\varphi_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، برای $k \in \mathbb{N}$ ، توابع پیوسته باشند، و (الف) عدد مثبت مانند c موجود باشد که برای هر $k \in \mathbb{N}$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\sup\{\|\varphi_k(t)\| : t \in (a, b)\} < c;$$

^۱Arzela-Ascoli

(ب) برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $t, s \in (a, b)$ با شرط

$$|t - s| < \delta \text{ داشته باشیم}$$

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)\| < \epsilon.$$

در این صورت زیردنباله‌ای از $(\varphi_k)_k$ موجود است که به طور یکنواخت روی (a, b) به تابعی پیوسته همگرا است.

برهان. دنباله $(t_m)_m \subset [a, b]$ که چگال در این بازه است را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که $(\varphi_k(t_1))_k$ کراندار است، زیردنباله همگرای $(\varphi_{p_k^1}(t_1))_k$ وجود دارد. به طور مشابه، از آنجایی که $(\varphi_{p_k^1}(t_2))_k$ کراندار است، زیردنباله همگرای $(\varphi_{p_k^2}(t_2))_k$ وجود دارد. با ادامه این روش، بعد از m مرحله زیردنباله همگرای $(\varphi_{p_k^m}(t_m))_k$ از دنباله کراندار $(\varphi_{p_k^{m-1}}(t_m))_k$ را به دست می‌آوریم. اکنون برای $k \in \mathbb{N}$ توابع $\psi_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\psi_k(t) = \varphi_{p_k^k}(t).$$

توجه کنید که دنباله $(\psi_k(t_m))_k$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ همگرا است، زیرا به استثنای m جمله نخست، یک زیردنباله از دنباله همگرای $(\varphi_{p_k^m}(t_m))_k$ است.

از طرف دیگر، بنا به فرض، برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ موجود است که برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $t, s \in (a, b)$

$$\text{با شرط } \delta < |t - s| \text{ داریم}$$

$$\|\psi_k(t) - \psi_k(s)\| = \|\varphi_{p_k^k}(t) - \varphi_{p_k^k}(s)\| < \epsilon. \quad (۷۹.۱)$$

برای $t, t_m \in (a, b)$ با شرط $|t - t_m| < \delta$ و $p, q \in \mathbb{N}$ از رابطه (۷۹.۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|\psi_p(t) - \psi_q(t)\| &\leq \|\psi_p(t) - \psi_p(t_m)\| \\ &\quad + \|\psi_p(t_m) - \psi_q(t_m)\| + \|\psi_q(t_m) - \psi_q(t)\| \end{aligned} \quad (۸۰.۱)$$

$$< 2\epsilon + \|\psi_p(t_m) - \psi_q(t_m)\|.$$

از آنجایی که دنباله $(\psi_k(t_m))_k$ همگرا است، $p_m \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $p, q \geq p_m$ داریم

$$\|\psi_p(t_m) - \psi_q(t_m)\| < \epsilon. \quad (۸۱.۱)$$

به علاوه، از آنجایی که بازه (a, b) را می توان با تعداد متناهی N از بازه های به طول 2δ پوشش داد، بدون از دست دادن کلیت در نقاط t_1, t_2, \dots, t_N متمرکز می شویم. از روابط (۸۰.۱) و (۸۱.۱) نتیجه می شود که برای هر

$$t \in (a, b) \text{ و } p, q \geq \max\{p_1, \dots, p_N\} \text{ داریم}$$

$$\|\psi_p(t) - \psi_q(t)\| < 3\epsilon.$$

این نشان می دهد که $(\psi_p)_p$ یک دنباله کوشی در فضای متریک کامل $C(a, b)$ با فاصله d داده شده در رابطه (۳۱.۱) است (قضیه ۳۰.۱ را ببینید). از این رو، دنباله به طور یکنواخت به یک تابع پیوسته روی (a, b) همگرا

□

می شود. این اثبات قضیه را کامل می کند.

اکنون، از قضیه ۴۸.۱ برای تعیین وجود جواب ها برای هر معادله دیفرانسیل عادی با سمت راست پیوسته

استفاده می کنیم.

قضیه ۴۹.۱. (پئانو)^۱. اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد، آنگاه برای هر $(t_0, x_0) \in D$ دست کم یک جواب از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) روی بازه باز شامل t_0 وجود دارد.

برهان. معادله (۵۰.۱) را در نظر بگیرید، و $a < t_0 < b$ و $\beta > 0$ را طوری اختیار کنید که شرایط (۵۱.۱) و $(b - a)M \leq \beta$ برقرار باشد، که در آن M ثابت رابطه (۵۲.۱) است. برای $\alpha > 0$ ، به طور بازگشتی تابع

پیوسته $x_\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x_0 - \int_t^{t_0 - \alpha} f(s, x_\alpha(s + \alpha)) ds, & t \in (a, t_0 - \alpha), \\ x_0, & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \\ x_0 + \int_{t_0 + \alpha}^t f(s, x_\alpha(s - \alpha)) ds, & t \in [t_0 + \alpha, b). \end{cases} \quad (۸۲.۱)$$

^۱Peano

برای مثال، برای $t \in [t_0 + \alpha, t_0 + 2\alpha]$ داریم

$$x_\alpha(t) = x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_\alpha(s-\alpha)) ds = x_0 + \int_{t_0+\alpha}^t f(s, x_0) ds,$$

و برای $t \in [t_0 - 2\alpha, t_0 - \alpha]$ داریم

$$x_\alpha(t) = x_0 - \int_t^{t_0-\alpha} f(s, x_\alpha(s+\alpha)) ds = x_0 + \int_{t_0-\alpha}^t f(s, x_0) ds.$$

از طرفی

$$\|x_\alpha(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0 \pm \alpha}^t \|f(s, x_\alpha(s \mp \alpha))\| ds \right| \leq (b-a)M \leq \beta,$$

و از این رو، خواهیم داشت

$$\|x_\alpha(t)\| \leq \|x_0\| + \beta.$$

علاوه بر این

$$\|x_\alpha(t) - x_\alpha(s)\| \leq \left| \int_s^t \|f(u, x_\alpha(u \mp \alpha))\| du \right| \leq M|t-s|. \quad (۸۳.۱)$$

این نشان می‌دهد که دو شرط قضیه ۴۸.۱ برای هر دنباله از توابع $(x_{\alpha_m})_m$ ، که $(\alpha_m)_m \subset \mathbb{R}^+$ یک دنباله دلخواه با شرط $\alpha_m \searrow 0$ وقتی که $m \rightarrow \infty$ باشد برقرار هستند. بنابراین، زیردنباله $(\beta_m)_m$ از $(\alpha_m)_m$ با این خاصیت که $(x_{\beta_m})_m$ به طور یکنواخت به تابع پیوسته $x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ همگرا است، وجود دارد. اکنون، باید نشان دهیم که x یک جواب از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است. برطبق رابطه (۸۳.۱)، داریم

$$\begin{aligned} \|x_{\beta_m}(s - \beta_m) - x(s)\| &\leq \|x_{\beta_m}(s - \beta_m) - x_{\beta_m}(s)\| + \|x_{\beta_m}(s) - x(s)\| \\ &\leq M|\beta_m| + \|x_{\beta_m}(s) - x(s)\|, \end{aligned}$$

و از این رو، دنباله توابع $s \mapsto x_{\beta_m}(s - \beta_m)$ به طور یکنواخت به x همگرا می‌شود. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که دنباله توابع $s \mapsto x_{\beta_m}(s + \beta_m)$ نیز به طور یکنواخت به x همگراست. از طرف دیگر، از رابطه (۸۲.۱)

نتیجه می‌شود که برای $t \in [t_0, b)$ داریم

$$x_{\beta_m}(t) = x_0 + \int_{t_0 + \beta_m}^t f(s, x_{\beta_m}(s - \beta_m)) ds,$$

و با فرض اینکه $m \rightarrow \infty$ ، برای هر $t \in [t_0, b)$ به دست می‌آوریم

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (۸۴.۱)$$

به طور مشابه، از رابطه (۸۲.۱) نتیجه می‌شود که برای $t \in (a, t_0]$ رابطه زیر برقرار است

$$x_{\beta_m}(t) = x_0 - \int_t^{t_0 - \beta_m} f(s, x_{\beta_m}(s + \beta_m)) ds,$$

و با فرض اینکه $m \rightarrow \infty$ ، رابطه (۸۴.۱) را برای $t \in (a, t_0]$ به دست می‌آوریم. سرانجام، از قضیه ۱۹.۱ نتیجه

□

می‌شود که x جوابی از مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) است.

۵.۱ تصاویر فاز

اگرچه تعیین صریح جواب‌های یک معادله دیفرانسیل عادی اغلب ناممکن (یا بسیار دشوار) است، اما هنوز کسب اطلاعات درباره این جواب‌ها دست‌کم از نظر ماهیت کیفی مهم است. تا حد قابل توجهی، این را می‌توان با توصیف تصویر فاز معادله دیفرانسیل انجام داد. دقت کنید که در این بخش فقط معادلات خودگردان را در نظر می‌گیریم.

۱.۵.۱. مدارها. فرض کنید $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R}^n$ باشد. معادله

خودگردان زیر را در نظر بگیرید

$$x' = f(x). \quad (۸۵.۱)$$

در این صورت، مجموعه D ، فضای فاز معادله نامیده می‌شود.

تعریف ۵۰.۱. فرض کنید $x = x(t)$ یک جواب از معادله (۸۵.۱) با بازهٔ ماکسیمال I باشد. در این صورت، مجموعهٔ $D \subset \{x(t) : t \in I\}$ یک مدار از معادله نامیده می‌شود.

در ابتدا یک دستهٔ خیلی ساده از مدارها را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵۱.۱. نقطهٔ $x_0 \in D$ با $f(x_0) = 0$ یک نقطهٔ بحرانی از معادله (۸۵.۱) نامیده می‌شود.

قضیه ۵۲.۱. اگر x_0 یک نقطهٔ بحرانی از معادله (۸۵.۱) باشد، آنگاه $\{x_0\}$ یک مدار از این معادله است.

برهان. کافی است که نشان دهیم که تابع ثابت $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ تعریف شده با $x(t) = x_0$ یک جواب از معادله (۸۵.۱) است. \square

مثال ۵۳.۱. بر طبق مثال ۴۵.۱، معادلهٔ $x' = x^2$ جواب‌های $x(t) = 0$ ، با بازهٔ ماکسیمال \mathbb{R} ، و $x(t) = 1/(c-t)$ ، برای هر $c \in \mathbb{R}$ ، با بازهٔ ماکسیمال $(-\infty, c)$ یا $(c, +\infty)$ دارد. از این رو، مدار $\{0\}$ (از نقطهٔ بحرانی صفر) و مدارهای

$$\{1/(c-t) : t \in (-\infty, c)\} = \mathbb{R}^+,$$

و

$$\{1/(c-t) : t \in (c, +\infty)\} = \mathbb{R}^-,$$

را به دست می‌آوریم.

اکنون نشان می‌دهیم که در یک همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک از یک نقطهٔ غیربحرانی، همیشه می‌توان مختصاتی را معرفی کرد که مدارها، پاره خط‌های موازی هستند که با سرعت ثابت طی می‌شوند.

قضیه ۵۴.۱. (قضیهٔ جعبه‌شار). فرض کنید $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 روی مجموعهٔ باز $D \subset \mathbb{R}^n$ باشد. برای نقطهٔ $p \in D$ با $f(p) \neq 0$ ، تغییر مختصات $y = g(x)$ در همسایگی از p وجود دارد که معادلهٔ $x' = f(x)$ را به معادلهٔ $y' = v$ برای $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ تبدیل می‌کند.

برهان. فرض کنید $\varphi_t(x_0)$ یک جواب از معادله $x' = f(x)$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$ در بازهٔ ماکسیمالش باشد. از آنجایی که $f(p) \neq 0$ ، برخی از مؤلفه‌های $f(p)$ ناصفر هستند. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که مؤلفهٔ اول ناصفر باشد، و مختصات جدید $y = (y_1, \dots, y_n)$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$x = F(y) = \varphi_{y_1}(p + \bar{y}),$$

که در آن $p = (p_1, \dots, p_n)$ و $\bar{y} = (0, y_2, y_3, \dots, y_n)$ با توجه به قضیهٔ ۴۲.۱، تابع F در یک همسایگی از صفر از کلاس C^1 است. علاوه بر این، $F(0) = p$. اکنون ماتریس ژاکوبی d_0F را محاسبه می‌کنیم. ستون اول d_0F به صورت زیر معین می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \varphi_{y_1}(p + \bar{y}) \Big|_{y=0} = f(\varphi_{y_1}(p + \bar{y})) \Big|_{y=0} = f(F(0)) = f(p).$$

از آنجایی که $\varphi_0 = Id$ ، ستون‌های باقی‌مانده برای $i = 2, \dots, n$ ، به صورت زیر هستند

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_{y_1}(p + \bar{y}) = \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_{y_1}(p_1, p_2 + y_2, p_3 + y_3, \dots, p_n + y_n) \Big|_{y=0} = e_i,$$

که (e_1, \dots, e_n) پایهٔ متعارف \mathbb{R}^n است. از این رو

$$d_0F = (f(p)e_2 \cdots e_n),$$

یک ماتریس پائین‌مثلثی با درایه‌های ناصفر در قطر است (زیرا با توجه به فرض، مؤلفهٔ نخست $f(p)$ ناصفر است). از این رو، d_0F نامنفرد است و واضح است که F تغییر مختصات در یک همسایگی از صفر است. اکنون، فرض کنید

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \varphi_t(p + q),$$

یک جواب از معادلهٔ $x' = f(x)$ باشد، که در آن $q = (0, q_2, q_3, \dots, q_n)$ و در مختصات جدید به صورت $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ نوشته می‌شود. از آنجایی که

$$\varphi_t(p + q) = F(y(t)) = \varphi_{y_1(t)}(p_1, p_2 + y_2(t), \dots, p_n + y_n(t)),$$

نتیجه می‌گیریم که

$$y(t) = (t, q_2, q_3, \dots, q_n).$$

□ با مشتق‌گیری، سرانجام، خواهیم داشت $y' = (1, 0, \dots, 0)$.

حال انواع دیگری از مدارها را در نظر می‌گیریم (شکل ۲.۱ را ببینید).

تعریف ۵۵.۱. مدار $\{x(t) : t \in (a, b)\}$ که یک نقطه بحرانی نیست گفته می‌شود

(الف) تناوبی^۱ است، هرگاه یک $T > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $t, t + T \in (a, b)$ داشته باشیم

$$x(t + T) = x(t)$$

(ب) هموکلینیک^۲ است، هرگاه یک نقطه بحرانی p وجود داشته باشد به طوری که $x(t) \rightarrow p$ هرگاه $t \rightarrow a^+$

و هرگاه $t \rightarrow b^-$.

(ج) هتروکلینیک^۳ است، هرگاه نقاط بحرانی p و q با $p \neq q$ وجود داشته باشد به طوری که $x(t) \rightarrow p$ هرگاه

$$t \rightarrow a^+ \text{ و } x(t) \rightarrow q \text{ هرگاه } t \rightarrow b^-.$$

نشان می‌دهیم که همه مدارها در تعریف ۵۵.۱ و در حالت کلی‌تر همه مدارهای داخل یک مجموعه فشرده

بازه ماکسیمال \mathbb{R} دارند.

تعریف ۵۶.۱. جواب $x = x(t)$ ، سراسری گفته می‌شود هرگاه بازه ماکسیمالش برابر با \mathbb{R} باشد.

قضیه ۵۷.۱. هر جواب معادله (۸۵.۱) که مدارش داخل یک زیرمجموعه فشرده از D قرار دارد، سراسری است.

برهان. فرض کنید $F : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه $F(t, x) = f(x)$ باشد. معادله (۸۵.۱) را می‌توان به صورت

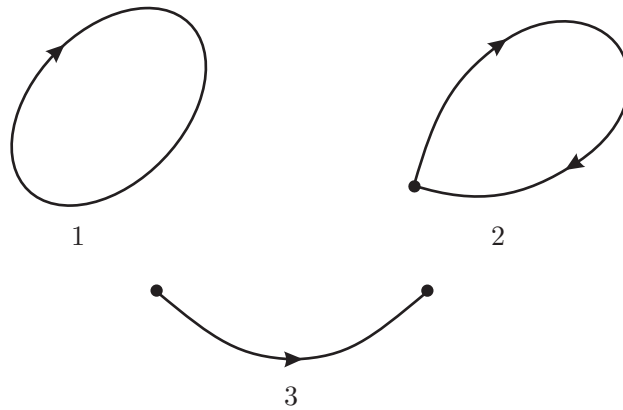
زیر نوشت

$$x' = F(t, x).$$

¹Periodic

²Homoclinic

³Heteroclinic



شکل ۲.۱: (۱) مدار تناوبی؛ (۲) مدار هموکلینیک؛ (۳) مدار هتروکلینیک.

برای مدار $\{x(t) : t \in (a, b)\}$ درون مجموعه فشردۀ D ، $K \subset D$ ، مجموعه فشردۀ $[-m, m] \times K \subset \mathbb{R} \times D$ را در نظر می‌گیریم. از قضیۀ ۴۶.۱ نتیجه می‌گیریم که یک $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in (a, a + \epsilon) \cup (b - \epsilon, b)$ داریم

$$(t, x(t)) \notin [-m, m] \times K.$$

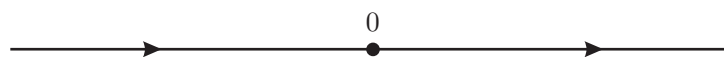
از این رو، $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای برخی مقادیر t ، $t \notin [-m, m]$ (چون مدار داخل K است). با فرض اینکه $m \rightarrow \infty$ ، نتیجه می‌گیریم که $a = -\infty$ و $b = +\infty$. \square

یک نتیجه از قضیۀ ۵۷.۱ در زیر آمده است.

قضیه ۵۸.۱. نقاط بحرانی، مدارهای تناوبی، مدارهای هموکلینیک، و مدارهای هتروکلینیک همیشه از جواب‌های سراسری به دست می‌آیند.

۲.۵.۱. تصاویر فاز. تصویر فاز یک معادله دیفرانسیل عادی خودگردان نشان دهنده مدارهای مجموعه D

است که جهت حرکت را نیز نشان می‌دهد. معمول است که جهت محورها را نشان ندهید؛ زیرا ممکن است با جهت حرکت اشتباه گرفته شود.



شکل ۳.۱: تصویر فاز معادله $x' = x^2$.

مثال ۵۹.۱. (ادامه مثال ۵۳.۱). قبلاً نشان دادیم که مدارهای معادله $x' = x^2$ ، $\{0\}$ ، \mathbb{R}^+ و \mathbb{R}^- هستند. این‌ها باعث ایجاد تصویر فاز در شکل ۳.۱ می‌شوند، که ما جهت حرکت را نیز نشان دادیم. توجه داشته باشید که برای تعیین تصویر فاز نیازی به حل صریح معادله نیست.

مثال ۶۰.۱. معادله $x' = |x|$ را در نظر بگیرید. تنها نقطه بحرانی آن مبدأ مختصات است. به علاوه، برای هر $x \neq 0$ داریم $x' = |x| > 0$ ، و از این رو، همه جواب‌ها، به جز مبدأ، صعودی هستند. دوباره، این، تصویر فاز در شکل ۳.۱ را نتیجه می‌دهد، یعنی تصاویر فاز معادلات $x' = x^2$ و $x' = |x|$ یکسان هستند. به هر حال، سرعت در طول مدارها در دو معادله یکسان نیستند.

مثال‌های ۵۹.۱ و ۶۰.۱ نشان می‌دهند که معادلات مختلف می‌توانند تصویر فاز یکسان یا به عبارت دیگر، رفتار کیفی یکسان داشته باشند. تأکید می‌کنیم که تصاویر فاز هیچ اطلاعات کمی به دست نمی‌دهند.

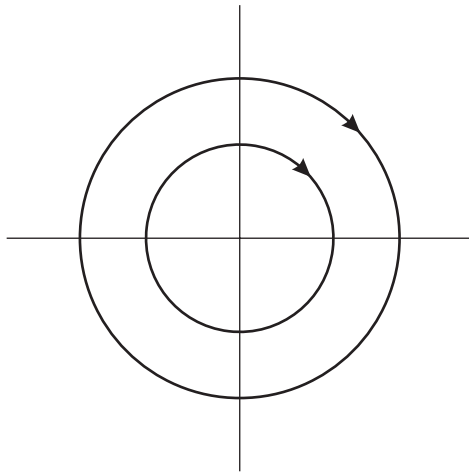
مثال ۶۱.۱. معادله

$$(x, y)' = (y, -x), \quad (۸۶.۱)$$

را در نظر بگیرید (مثال ۳.۱ را ببینید). تنها نقطه بحرانی آن $(0, 0)$ است. علاوه بر این، با توجه به (۶.۱)، اگر (x, y) یک جواب از آن باشد، آنگاه $(x^2 + y^2)' = 0$ ، و بنابراین، به غیر از مبدأ مختصات، همه مدارها دایره هستند. برای تعیین جهت حرکت، کافی است که یک نقطه از هر مدار را در نظر بگیرید. برای مثال، در $(x, y) = (x, 0)$ داریم $(x, y)' = (0, -x)$. تصویر فاز آن در شکل ۴.۱ نشان داده شده است. توجه کنید که استفاده از شکل صریح جواب‌ها در (۷.۱) ضروری نیست.

همان‌طور که در مثال زیر شرح داده می‌شود، گاهی مفید است که معادله را در یک دستگاه مختصات دیگر

بنویسیم.



شکل ۴.۱: تصویر فاز معادله $(x, y)' = (y, -x)$.

مثال ۶۲.۱. (ادامه مثال ۶۱.۱). معادله (۸۶.۱) را در مختصات قطبی می‌نویسیم. از آنجایی که $x = r \cos \theta$ و

$y = r \sin \theta$ داریم

$$r' = (\sqrt{x^2 + y^2})' = \frac{(x^2 + y^2)'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xx' + yy'}{r},$$

و

$$\theta' = \left(\arctan \frac{y}{x}\right)' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y'x - x'y}{r^2}.$$

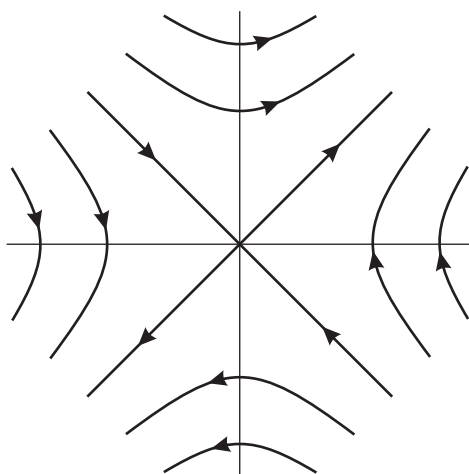
از این رو، معادله (۸۶.۱) شکل زیر را در مختصات قطبی اختیار می‌کند

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

از آنجایی که $r' = 0$ ، همه جواب‌ها در یک فاصله ثابت از مبدأ باقی می‌مانند؛ پیمایش دایره‌هایی (مرکز در مبدأ) با سرعت زاویه‌ای $\theta' = -1$. بنابراین، تصویر فاز همان است که در شکل ۴.۱ نشان داده شده است.

مثال ۶۳.۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$(x, y)' = (y, x). \quad (۸۷.۱)$$



شکل ۵.۱: تصویر فاز معادله $(x, y)' = (y, x)$.

تنها نقطه بحرانی مبدأ است. علاوه بر این، اگر (x, y) جوابی از آن باشد، آنگاه

$$(x^2 - y^2)' = 2xx' - 2yy' = 2xy - 2yx = 0.$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر مدار در یکی از هذلولی‌های تعریف شده با ضابطه $x^2 - y^2 = c$ ، برای ثابت $c \neq 0$ ، یا در یکی از خطوط مستقیم که ربع‌ها را نصف می‌کند، یعنی $x = y$ و $x = -y$ ، وجود دارد. برای تعیین جهت حرکت در هر مدار به عنوان مثال کافی است مشاهده کنید که برای $y > 0$ ، $x' > 0$ و برای $y < 0$ ، $x' < 0$. تصویر فاز در شکل ۵.۱ نشان داده شده است.

مثال ۶۴.۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = y(x^2 + 1), \\ y' = x(x^2 + 1). \end{cases} \quad (۸۸.۱)$$

همانند مثال ۶۳.۱، مبدأ تنها نقطه بحرانی است و در امتداد جواب‌ها داریم

$$(x^2 - y^2)' = 2xx' - 2yy'$$

$$= 2xy(x^2 + 1) - 2yx(x^2 + 1) = 0.$$

از آنجایی که علامت‌های $y(x^2 + 1)$ و $x(x^2 + 1)$ به ترتیب با علامت‌های y و x منطبق هستند، تصویر فاز معادله (۸۸.۱) همانند تصویر فاز معادله (۸۷.۱) است (شکل ۵.۱ را ببینید).

مثال ۶۵.۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = y(x^2 - 1), \\ y' = x(x^2 - 1). \end{cases} \quad (۸۹.۱)$$

نقاط بحرانی از حل دستگاه

$$y(x^2 - 1) = x(x^2 - 1) = 0,$$

به دست می‌آیند، که در این صورت جواب‌ها عبارتند از $(0, 0)$ ، $(1, y)$ ، $(-1, y)$ که در آن $y \in \mathbb{R}$. علاوه بر این، در امتداد جواب‌ها داریم

$$(x^2 - y^2)' = 2xx' - 2yy' = 2xy(x^2 - 1) - 2yx(x^2 - 1) = 0,$$

و از این رو، هر مدار دوباره داخل یکی از هذلولی‌های تعریف شده با $x^2 - y^2 = c$ ، برای ثابت $c \neq 0$ ، یا در یکی از خطوط راست $x = y$ و $x = -y$ قرار دارد. تصویر فاز معادله (۸۹.۱) در شکل ۶.۱ نشان داده شده است، که جهت حرکت را می‌توان به دست آورد، برای مثال، از علامت $y' = x(x^2 - 1)$ ؛ یعنی،

$$y' > 0 \quad \text{برای } x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty),$$

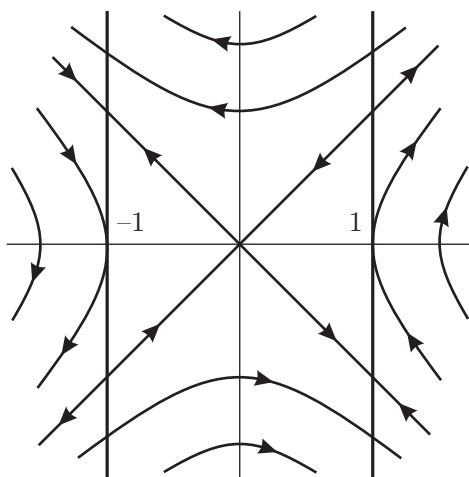
و

$$y' < 0 \quad \text{برای } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$

به ویژه، از تصویر فاز نتیجه می‌شود که هر مداری که نوار عمودی

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\},$$

را قطع کند در L قرار می‌گیرد و کراندار است، در حالی که هر مدار دیگر غیرکراندار است.



شکل ۶.۱: تصویر فاز معادله (۸۹.۱).

مثال زیر از متغیرهای مختلط استفاده می‌کند.

مثال ۶۶.۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy. \end{cases} \quad (۹۰.۱)$$

با فرض $z = x + iy$ ، به آسانی می‌توان نشان داد که معادله (۹۰.۱) معادل با $z' = z^2$ است که در آن

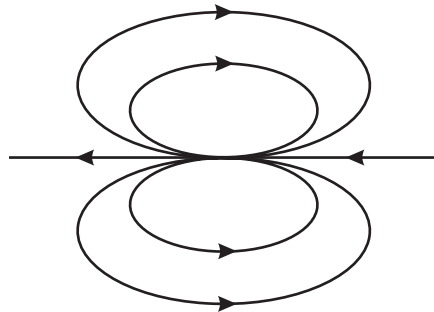
$z' = x' + iy'$ با تقسیم طرفین معادله بر z^2 ، داریم

$$\frac{z'}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' = 1,$$

که جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$z(t) = -\frac{1}{t+c}, \quad (۹۱.۱)$$

که در آن $c \in \mathbb{C}$. برای به دست آوردن $x(t)$ و $y(t)$ ، قسمت‌های حقیقی و موهومی $z(t)$ در رابطه (۹۱.۱) را



شکل ۷.۱: تصویر فاز معادله (۹۰.۱).

در نظر می‌گیریم. یعنی، اگر $c = a + ib$ با $a, b \in \mathbb{R}$ ، آنگاه رابطه زیر را داریم

$$(x(t), y(t)) = \frac{(-a - t, b)}{(a + t)^2 + b^2}.$$

از این فرمول‌ها می‌توان برای بررسی تصویر فاز که در شکل (۷.۱) نشان داده شده است، استفاده کرد.

۳.۵.۱. معادلات پایستار. در این بخش حالت خاصی از معادلات دیفرانسیل را در نظر می‌گیریم که یک

تابع داده‌شده را حفظ می‌کند. ابتدا مفهوم معادله پایستار را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶۷.۱. تابع $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^1 که روی هیچ مجموعه‌ی بازی ثابت نیست و در امتداد جواب‌های

معادله $x' = f(x)$ ثابت است یک انتگرال (یا انتگرال اول) این معادله نامیده می‌شود. وقتی که انتگرال معادله وجود داشته باشد آن را معادله پایستار می‌گویند.

توجه کنید که تابع E از کلاس C^1 در امتداد جواب‌های معادله $x' = f(x)$ ثابت است اگر و تنها اگر برای

هر جواب $x = x(t)$ داشته باشیم

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = 0.$$

به‌طور کلی‌تر، می‌توان انتگرال‌هایی در زیرمجموعه‌های D و انتگرال‌هایی که از کلاس C^1 نیستند را در نظر گرفت.

مثال ۶۸.۱. از رابطه (۶.۱) نتیجه می‌شود که تابع $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $E(x, y) = x^2 + y^2$ انتگرال معادله (۴.۱) است، و از این رو، معادله پایستار است.

مثال ۶۹.۱. فرض کنید $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از کلاس C^1 باشد که روی هیچ مجموعه بازی ثابت نیست. در این صورت، معادله

$$\begin{cases} x' = \partial E / \partial y, \\ y' = -\partial E / \partial x, \end{cases} \quad (۹۲.۱)$$

که روی $D \times D \subset \mathbb{R}^{2n}$ تعریف می‌شود، پایستار است و تابع E یک انتگرال است. در واقع، اگر (x, y) جوابی از معادله (۹۲.۱) باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x, y) &= \frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' \\ &= -y' x' + x' y' = 0, \end{aligned} \quad (۹۳.۱)$$

که نشان می‌دهد E یک انتگرال است. درحقیقت، معادله (۴.۱) از (۹۲.۱) با اختیار

$$E = \frac{x^2 + y^2}{2},$$

به دست آمده است.

مثال ۷۰.۱. اکنون، معادله (۹۲.۱) را با ضابطه

$$E(x, y) = xy(x + y - 1), \quad (۹۴.۱)$$

در نظر می‌گیریم که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2xy - x, \\ y' = -2xy - y^2 + y. \end{cases} \quad (۹۵.۱)$$

با توجه به رابطه (۹۳.۱)، برای به دست آوردن تصویر فاز معادله (۹۵.۱) باید مجموعه‌های تراز تابع E در رابطه

(۹۴.۱) را تعیین کنیم. این‌ها در شکل ۸.۱ ترسیم شده‌اند، که جهت حرکت را نیز نشان داده‌ایم.

به راحتی می‌توان نشان داد که نقاط بحرانی معادله (۹۵.۱) عبارتند از $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1/3, 1/3)$. اکنون، نشان می‌دهیم که مدارهای درون مثلث با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ ، در یک همسایگی از نقطه بحرانی $(1/3, 1/3)$ ، در حقیقت مدارهای تناوبی هستند. با نوشتن $X = x - 1/3$ و $Y = y - 1/3$ ، خواهیم داشت

$$E(x, y) = (X + \frac{1}{3})(Y + \frac{1}{3})(X + Y - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{3}(X^2 + XY + Y^2) + (X + Y)XY.$$

از آنجایی که شکل درجه دوم

$$X^2 + XY + Y^2 = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (96.1)$$

معین مثبت است (ماتریس 2×2 در رابطه (۹۶.۱) دارای مقادیر ویژه $1/2$ و $3/2$ است)، از لم مورس^۱ (قضیه ۱۶.۹) نتیجه می‌شود که تغییر مختصات $(\bar{X}, \bar{Y}) = g(X, Y)$ در یک همسایگی از $(0, 0)$ وجود دارد به طوری که

$$E(x, y) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{3}(\bar{X}^2 + \bar{X}\bar{Y} + \bar{Y}^2).$$

از آنجایی که مجموعه‌های تراز E خم‌های بسته از متغیرهای (\bar{X}, \bar{Y}) در یک همسایگی از $(0, 0)$ هستند، همین اتفاق بر حسب متغیرهای (x, y) ، اکنون، در همسایگی $(1/3, 1/3)$ رخ می‌دهد.

مثال ۷۱.۱. معادله

$$\begin{cases} x' = y, \\ y = f(x), \end{cases} \quad (97.1)$$

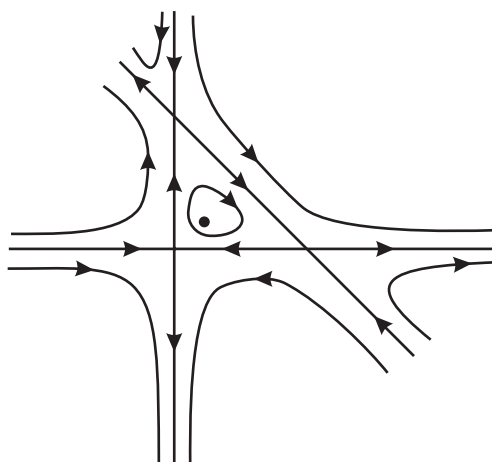
که در آن

$$f(x) = x(x-1)(x-3), \quad (98.1)$$

را در نظر بگیرید. نقاط بحرانی عبارتند از $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(3, 0)$. اکنون، تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x f(s)ds = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2.$$

¹Morse's lemma



شکل ۸.۱: تصویر فاز معادله (۹۵.۱).

اگر $(x, y) = (x(t), y(t))$ یک جواب از معادله (۹۷.۱) باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dt}E(x, y) = yy' - f(x)x' = yf(x) - f(x)y = 0, \quad (99.1)$$

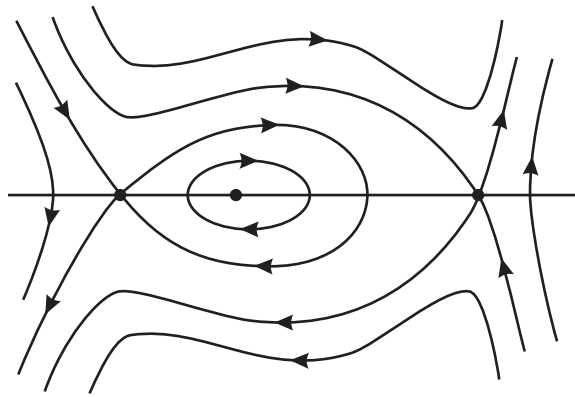
که نشان می‌دهد که تابع E یک انتگرال است. برای به‌دست آوردن تصویر فاز، باید مجموعه‌های تراز تابع E را تعیین کنیم. می‌توان نشان داد که این‌ها خم‌های ترسیم‌شده در شکل ۹.۱ هستند که تصویر فاز را تعیین می‌کنند. به‌ویژه، یک مدار هموکلینیک وجود دارد که مبدأ را به خودش وصل می‌کند.

برای تعیین مجموعه‌های تراز تابع E به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا معادله (۹۷.۱) را به‌صورت زیر

می‌نویسیم

$$x'' = y' = f(x).$$

این مربوط به اعمال نیروی $f(x)$ به ذره‌ای با جرم یک است که بدون اصطکاک حرکت می‌کند. به‌عنوان مثال، $f(x)$ می‌تواند نیروی گرانشی ناشی از قرار گرفتن ذره در ارتفاع $f(x)$ باشد. در حقیقت، برای به‌دست آوردن تصویر فاز، مهم نیست که $f(x)$ واقعاً چیست، و بنابراین در فرض اینکه $f(x)$ واقعاً نیروی گرانشی است، کلیت از بین نمی‌رود. در این متن، تساوی (۹۹.۱) مربوط به بقای انرژی کل $E(x, y)$ است که مجموع انرژی جنبشی



شکل ۹.۱: تصویر فاز معادله (۹۷.۱) با f معین شده در رابطه (۹۸.۱).

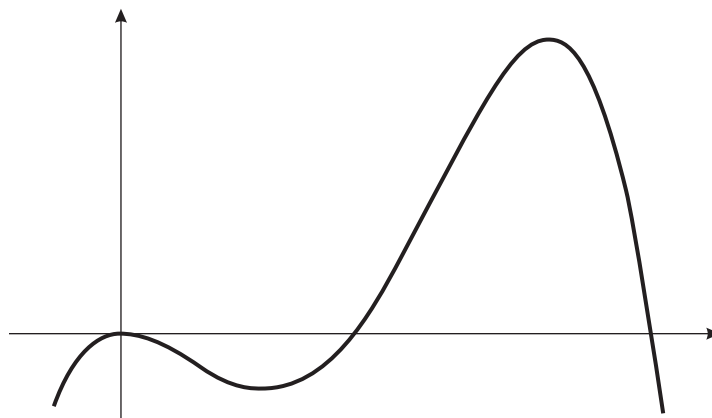
$y^2/2$ با انرژی پتانسیل زیر است

$$V(x) = - \int_0^x f(s) ds = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2.$$

تابع V دارای نموداری است که در شکل ۱۰.۱ نشان داده شده است که با توجه به آن، V' را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$V'(x) = -x(x-1)(x-3).$$

اکنون، می‌توان تصویر فاز را از ذخیره انرژی به دست آورد. به عنوان مثال، از شکل ۱۰.۱ چنین برمی‌آید که توپی که با سرعت $y = 0$ در یک نقطه x از بازه $(0, (8 - \sqrt{10})/3)$ رها می‌شود، شروع به نزول می‌کند و پس از مدتی از نقطه $x = 1$ عبور می‌کند، جایی که به حداکثر سرعت می‌رسد. سپس، در همان جهت، شروع به حرکت به سمت بالا می‌کند، تا به نقطه $x' \in (0, (8 - \sqrt{10})/3)$ با $V'(x) = V(x)$ ، که دوباره به سرعت $y = 0$ می‌رسد. این نوع رفتار به طور نامحدود تکرار می‌شود و توپ بین نقاط x و y به جلو و عقب در نوسان است. این مربوط به یکی از مدارهای تناوبی در شکل ۹.۱، در داخل مدار هموکلیتیک است. از طرف دیگر، توپی با سرعت $y > 0$ در نقطه $x \in (0, 1)$ با $y^2/2 + V(x) = 0$ رها می‌شود (در شکل ۱۰.۱ تابع V در $(0, 1)$ منفی است) در امتداد یک مسیر تا یک نقطه x' با $V(x') = V(x)$ حرکت می‌کند، اگرچه اکنون به دلیل پایستگی انرژی بدون



شکل ۱۰.۱: نمودار تابع V در مثال ۷۱.۱. نقاط تقاطع با محور افقی 0 ، $(-8 - \sqrt{10})/3$ و $(8 + \sqrt{10})/3$ هستند.

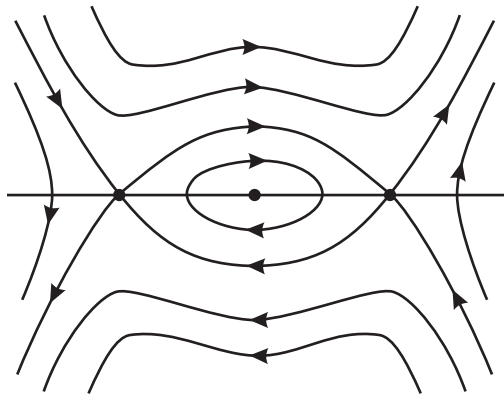
سرعت صفر است. در عوض، به حرکت خود تا نقطه $x'' \in (1, +\infty)$ با $y^2 + V(x) = V(x'')$ ادامه می‌دهد، که در نهایت به سرعت صفر می‌رسد (وجود این نقطه از شکل ۱۰.۱ و پایداری انرژی نتیجه می‌شود). سپس توپ شروع به حرکت به سمت عقب می‌کند، به‌ویژه از نقطه اولیه عبور می‌کند و به‌طور نامحدود به مبدأ نزدیک می‌شود، بدون اینکه هرگز به آنجا برسد، چون

$$y^2 + V(x) = 0 = E(0, 0).$$

به‌طور مشابه، توپی که با سرعت $y < 0$ در نقطه $x \in (0, 1)$ با $y^2/2 + V(x) = 0$ رها شده است، همان نوع رفتار را نشان می‌دهد. یعنی به‌طور نامحدود به مبدأ نزدیک می‌شود، بدون اینکه هرگز به آنجا برسد. این مربوط به مدار هموکلیتیک در شکل ۱۰.۱ است. مدارهای باقی‌مانده را می‌توان به‌روش مشابه توصیف کرد.

مثال ۷۲.۱. معادله (۹۷.۱) را با ضابطه

$$f(x) = x(x-1)(x-2), \quad (100.1)$$



شکل ۱۱.۱: تصویر فاز معادله (۹۷.۱) با f معین شده در رابطه (۱۰۰.۱).

در نظر بگیرید. نقاط بحرانی عبارتند از $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(0, 2)$. علاوه بر این، تابع

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x f(s)ds \\ &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2, \end{aligned} \quad (101.1)$$

یک انتگرال معادله (۹۷.۱) است. تصویر فاز آن در شکل ۱۱.۱ نشان داده شده است. به ویژه، دو مدار هتروکلینیک وجود دارد که نقاط بحرانی $(0, 0)$ و $(0, 2)$ را به هم متصل می‌کند.

به منظور تعیین مجموعه‌های تراز تابع E در (۱۰۱.۱)، با روشی مشابه در مثال ۷۱.۱ عمل می‌کنیم. در این

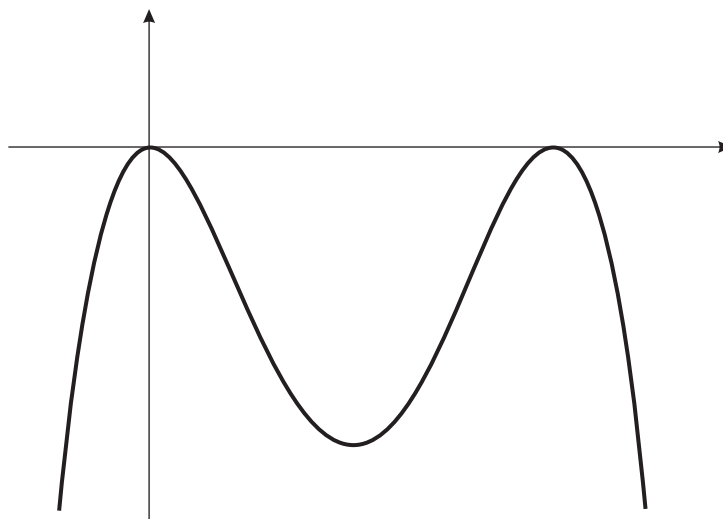
حالت، انرژی پتانسیل به صورت زیر معین می‌شود

$$V(x) = - \int_0^x f(s)ds = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2,$$

و نمودار آن در شکل ۱۲.۱ نشان داده شده است. اکنون از پایستاری انرژی برای توصیف تصویر فاز استفاده می‌کنیم. در حالت خاص، برای توپی که با سرعت $y = 0$ در نقطه $x \in (0, 2)$ رها می‌شود، یک حرکت نوسانی

بین x و $2 - x$ به دست می‌آوریم. در واقع، داریم

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 = -\frac{1}{4}x^2(x-3)^2,$$



شکل ۱۲.۱: نمودار تابع V در مثال ۷۱.۱. نقاط تقاطع با محور افقی ۰ و ۲ هستند.

و از این رو، $V(2-x) = V(x)$. این مربوط به یکی از مدارهای تناوبی در شکل ۱۱.۱ است. از طرف دیگر، توپی که با سرعت $y > 0$ در نقطه $x \in (0, 2)$ با انرژی $y^2/2 + V(x) = 0$ رها شده است، بدون اینکه به آن نقطه برسد، به طور نامحدود به نقطه ۲ نزدیک می‌شود، زیرا $E(2, 0) = 0$. همچنین با در نظر گرفتن حرکت برای زمان منفی، مدار هتروکلینیک را در نیم صفحه بالایی در شکل ۱۱.۱ به دست می‌آوریم. مدار هتروکلینیک در نیم صفحه پائینی، مربوط به مسیر توپی است که با سرعت $y < 0$ در نقطه $x \in (0, 2)$ با انرژی $y^2/2 + V(x) = 0$ رها شده است. مدارهای باقی مانده در شکل ۱۱.۱ را می‌توان به روشی مشابه توصیف کرد.

۶.۱ معادلات روی خمینه‌ها

این بخش به یک معرفی مختصر برای مطالعه معادلات دیفرانسیل عادی روی خمینه‌ها (هموار) اختصاص دارد. پس از یادآوری مفاهیم مربوط به خمینه‌ها و میدان‌های برداری، معادلات دیفرانسیل عادی تعریف شده توسط میدان‌های برداری روی خمینه‌ها را در نظر می‌گیریم و چندین مثال ارائه می‌دهیم.

۱.۶.۱. مفاهیم اولیه. در این بخش برخی از مفاهیم اساسی در مورد خمینه‌ها را یادآوری می‌کنیم. ابتدا مفهوم ساختار دیفرانسیل‌پذیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۷۳.۱. گفته می‌شود مجموعه M ساختار دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k و بُعد n را می‌پذیرد هرگاه نگاشت‌های یک‌به‌یک $\varphi_i : U_i \rightarrow M$ تعریف‌شده روی مجموعه‌های باز $U_i \subset \mathbb{R}^n$ ، برای $i \in I$ وجود داشته باشند به طوری که

$$(\text{الف}) \quad \cup_{i \in I} \varphi_i(U_i) = M$$

(ب) برای هر $i, j \in I$ با $V = \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) \neq \emptyset$ ، تصاویر اولیه $\varphi_i^{-1}(V)$ و $\varphi_j^{-1}(V)$ مجموعه‌های باز روی \mathbb{R}^n هستند، و نگاشت $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ از کلاس C^k است.

گاهی لازم است که خانواده $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ نسبت به شرایط موجود در تعریف ۷۳.۱ ماکسیمال باشد، اگرچه همیشه می‌توان آن را برای یک ماکسیمال آماده کرد. هر نگاشت $\varphi_i : U_i \rightarrow M$ ، نمودار یا دستگاه مختصات نامیده می‌شود. هر ساختار دیفرانسیل‌پذیر یک توپولوژی روی M القا می‌کند؛ یعنی، مجموعه $A \subset M$ باز گفته می‌شود هرگاه برای هر $i \in I$ ، $\varphi_i^{-1}A \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه باز باشد. اکنون مفهوم خمینه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۷۴.۱. مجموعه M یک خمینه از کلاس C^k و بُعد n گفته می‌شود هرگاه

$$(\text{الف}) \quad M \text{ یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر از کلاس } C^k \text{ و بعد } n \text{ را بپذیرد؛}$$

(ب) هنگامی که به توپولوژی القایی مربوط مجهز شود، مجموعه M یک فضای توپولوژیکی هاسدروف با پایه قابل شمارش است.

به یاد می‌آوریم که به یک فضای توپولوژیکی، هاسدروف گفته می‌شود هرگاه نقاط متمایز دارای همسایگی‌های باز مجزا باشند، و آن پایه شمارش‌پذیر گفته می‌شود هرگاه هر مجموعه باز را بتوان به‌عنوان اجتماع از عناصر یک خانواده شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز نوشت.

مثال ۷۵.۱. خط حقیقی \mathbb{R} وقتی که با ساختار دیفرانسیل پذیر متشکل از نمودار تنهای $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi$ با ضابطه $\varphi(x) = x$ مجهز شود، یک خمینه از بُعد 1 است.

مثال ۷۶.۱. دایره

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

یک خمینه از بُعد 1 است. یک ساختار دیفرانسیل پذیر توسط نگاشت‌های

$$\varphi_i : (-1, 1) \rightarrow S^1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

که با ضابطه‌های

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}), \\ \varphi_2(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2}), \\ \varphi_3(x) &= (\sqrt{1-x^2}, x), \\ \varphi_4(x) &= (-\sqrt{1-x^2}, x). \end{aligned} \quad (102.1)$$

تعریف می‌شوند، داده می‌شود. با یک روش مشابه می‌توان نشان داد که

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

که در آن

$$\|(x_1, \dots, x_{n+1})\| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

یک خمینه از بُعد n است.

مثال ۷۷.۱. چنبره n -تایی $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ یک خمینه از بُعد n است. یک ساختار دیفرانسیل پذیر

توسط نگاشت‌های $T^n \rightarrow (-1, 1)^n : \psi$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\psi_1(x_1), \dots, \psi_n(x_n)),$$

که در آن هر ψ_i هر یک از توابع $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ در رابطه (۱۰۲.۱) است.

مثال ۷۸.۱. فرض کنید $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع از کلاس C^k روی یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ باشد. از این رو، نمودار

$$M = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

یک خمینه از کلاس C^k و بُعد n است. یک ساختار دیفرانسیل پذیر توسط نگاشت $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ با ضابطه $\psi(x) = (x, \varphi(x))$ تعریف می‌شود.

مثال ۷۹.۱. فرض کنید $E : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع از کلاس C^1 روی مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ باشد. به نقطه $c \in \mathbb{R}^m$ یک مقدار بحرانی E گفته می‌شود، هرگاه $c = E(x)$ برای $x \in U$ به طوری که $d_x E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ پوشا نباشد. می‌توان از قضیه تابع معکوس برای نشان دادن اینکه اگر $c \in \mathbb{R}^m$ مقدار بحرانی E نباشد، آنگاه مجموعه تراز

$$E^{-1}c = \{x \in U : E(x) = c\},$$

یک خمینه از بُعد $n - m$ است، استفاده کرد.

برای مثال، اگر $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ یک انتگرال معادله پایستار $x' = f(x)$ باشد، آنگاه برای هر $c \in \mathbb{R}$ که مقدار بحرانی E نیست، مجموعه تراز $E^{-1}c$ یک خمینه از بُعد $n - 1$ است.

۲.۶.۱. میدان‌های برداری. برای معرفی مفهوم بردار مماس، ابتدا مفهوم نگاشت دیفرانسیل پذیر بین خمینه‌ها را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۸۰.۱. نگاشت $f : M \rightarrow N$ بین خمینه‌های M و N در نقطه $x \in M$ دیفرانسیل پذیر گفته می‌شود اگر نمودارهای M و N و $\varphi : U \rightarrow M$ و $\psi : V \rightarrow N$ وجود داشته باشند به طوری که

$$f(\varphi(U)) \subset \psi(V) \text{ و } x \in \varphi(U) \text{ (الف)}$$

$$\text{(ب) } \varphi \circ f \circ \psi^{-1} \text{ در } \varphi^{-1}(x) \text{ دیفرانسیل پذیر است.}$$

همچنین می‌گوییم که f از کلاس C^k روی مجموعه باز $W \subset M$ است هرگاه همه نگاشت‌های $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ از کلاس C^k روی $\varphi^{-1}(W)$ باشند.

حال مفهوم بردار مماس را برای یک خم معرفی می‌کنیم. فرض کنید M یک خمینه از بُعد n باشد. تابع دیفرانسیل‌پذیر $M \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) : \alpha$ یک خم نامیده می‌شود. همچنین، فرض کنید D مجموعه همه توابع $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ باشند که در نقطه داده شده $x \in M$ دیفرانسیل‌پذیر هستند.

تعریف ۸۱.۱. بردار مماس برای خم $M \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) : \alpha$ با $\alpha(0) = x$ در $t = 0$ ، یک تابع مثل $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر است

$$F(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

همچنین می‌گوییم که F بردار مماس در x است.

به آسانی می‌توان نشان داد که مجموعه $T_x M$ از همه بردارهای مماس در x یک فضای برداری از بُعد n است، که فضای مماس M در x نامیده می‌شود. کلاف مماس M ، مجموعه زیر است

$$TM = \{(x, v) : x \in M, v \in T_x M\}.$$

می‌توان نشان داد که TM یک خمینه از بُعد $2n$ است. یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. فرض کنید $\varphi : U \rightarrow M$ یک نمودار برای M باشد و (x_1, \dots, x_n) مختصات در U باشد. خم‌های $M \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) : \alpha_i$ برای $i = 1, \dots, n$ تعریف شده با ضابطه

$$\alpha_i(t) = \varphi(te_i),$$

را در نظر می‌گیریم که در آن پایه استاندارد از \mathbb{R}^n است. بردار مماس برای خم α_i در $t = 0$ با $\partial/\partial x_i$ نشان داده می‌شود. به آسانی می‌توان نشان داد که $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ پایه فضای مماس $T_{\varphi(0)} M$ است. اکنون، نگاشت $\psi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ با ضابطه

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \left(\varphi(x_1, \dots, x_n), \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

را برای نمودار $U \rightarrow M$: φ در نظر می‌گیریم. می‌توان نشان داد که نگاشت‌هایی از این شکل یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر از بُعد $2n$ در TM تعریف می‌کنند. حال مفهوم میدان برداری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۸۲.۱. یک میدان برداری روی خمینه M یک نگاشت $X : M \rightarrow TM$ است به طوری که برای هر $x \in M$ ، $X(x) \in T_x M$.

همچنین با استفاده از مفهوم دیفرانسیل‌پذیری بین خمینه‌ها، می‌توان از یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر صحبت کرد.

۳.۶.۱. معادلات دیفرانسیل. فرض کنید M یک خمینه باشد. برای میدان برداری پیوسته $X : M \rightarrow TM$ ، معادله دیفرانسیل عادی زیر را در نظر بگیرید

$$x' = X(x). \quad (۱۰۳.۱)$$

به طور کلی، می‌توان میدان‌های برداری وابسته به زمان را در نظر گرفت.

تعریف ۸۳.۱. خم $x : (a, b) \rightarrow M$ از کلاس C^1 جواب معادله (۱۰۳.۱) گفته می‌شود هرگاه برای هر $t \in (a, b)$ ، $x'(t) = X(x(t))$ ، که بردار مماس برای خم $x(t+s)$ در $s=0$ است.

با استفاده از نمودارها می‌توان نوع خمینه زیر را از قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱) تعریف کرد.

قضیه ۸۴.۱. اگر X یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد، آنگاه برای هر $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ یک جواب یکتا از مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = X(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

روی بازه باز شامل t_0 وجود دارد.

به‌طور کلی، همه ویژگی‌های موضعی نظریه معادلات دیفرانسیل در \mathbb{R}^n را می‌توان به خمینه‌های دلخواه توسعه داد. علاوه بر قضیه پیکارد-لیندلف، این شامل همه نتایج دیگر در مورد وجود جواب‌ها (مثل قضیه پتانو) و وابستگی جواب‌ها به شرایط اولیه می‌شود (قضایای ۴۰.۱ و ۴۱.۱ را ببینید).
از طرف دیگر، بعضی ویژگی‌های غیرموضعی در مورد معادلات دیفرانسیل روی خمینه‌ها تفاوت اساسی دارند. به‌ویژه، نتیجه زیر یک نتیجه از قضیه ۴۶.۱ است.

قضیه ۸۵.۱. اگر X یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی خمینه فشرده باشد، آنگاه همه جواب‌های معادله $x' = X(x)$ سراسری هستند؛ یعنی، همه جواب‌ها برای $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده‌اند.

با روشی مشابه با قضیه ۱۳.۱، این نشان می‌دهد که برای یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی خمینه فشرده، جواب‌های معادله $x' = X(x)$ باعث ایجاد شار می‌شوند. به بیان دقیق‌تر، قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۸۶.۱. اگر X یک میدان برداری دیفرانسیل‌پذیر روی خمینه فشرده M و $x(t, x_0)$ یک جواب از مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = X(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

باشد، آنگاه خانواده تبدیلات $\varphi_t : M \rightarrow M$ با ضابطه $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ یک شار است.

مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل روی خمینه‌ها در زیر آمده است.

مثال ۸۷.۱. فرض کنید $M = S^1$. برای یک میدان برداری $X : M \rightarrow TM$ ، هر بردار $X(x)$ ، صفر یا مماس بر دایره است. اگر مقدار صفر را نگیرد، آنگاه تمام S^1 یک مدار از معادله $x' = X(x)$ است. اگر X دقیقاً p صفر داشته باشد، آنگاه $2p$ مدار وجود دارد.

مثال ۸۸.۱. فرض کنید $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ و میدان برداری $X : M \rightarrow TM$ را طوری در نظر بگیرید که برای $x \in S^2$ غیر از قطب شمال و جنوب، بردار $X(x)$ ناصفر و افقی باشد. از این رو، معادله $x' = X(x)$ نقاط

بحرانی در قطب شمال و جنوب دارد و تمام مدارهای دیگر دوایر افقی هستند (از تقاطع کره با صفحات افقی به دست می‌آیند).

مثال ۸۹.۱. فرض کنید $T^2 = S^1 \times S^1$. از آنجایی که S^1 را می‌توان به‌عنوان بازه $[0, 1]$ با نقاط پایانی مشخص شده مشاهده کرد، چنبره T^2 را می‌توان به‌عنوان مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ با دو نقطه $x, y \in Q$ در هر زمان که $x - y \in \mathbb{Z}^2$ مشاهده کرد. از این رو، یک معادله دیفرانسیل در چنبره معادله‌ای به صورت

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (104.1)$$

در \mathbb{R}^2 ، که در آن $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به طوری که

$$f(x+k, y+l) = f(x, y), \quad g(x+k, y+l) = g(x, y)$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $k, l \in \mathbb{Z}$.

برای مثال، اگر $f = \alpha$ و $g = \beta$ ، که α و β ثابت‌های حقیقی‌اند، آنگاه جواب‌های معادله (۱۰۴.۱) باعث

ایجاد شار زیر می‌شوند

$$\varphi_t(x, y) = (x + \alpha t, y + \beta t) \pmod{1}.$$

اگر $\alpha = 0$ ، آنگاه تصویر هر جواب یک مدار تناوبی قائم است. اگر $\alpha \neq 0$ و $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}$ ، آنگاه تصویر هر جواب یک مدار تناوبی با شیب β/α است. سرانجام، اگر $\alpha \neq 0$ و $\beta/\alpha \notin \mathbb{Q}$ ، آنگاه تصویر هر جواب چگال در چنبره است.

مطالعه دقیق نظریه معادلات دیفرانسیل روی خمینه‌ها به‌وضوح خارج از محدوده کتاب است. به‌ویژه اینکه،

برخی از موانع توپولوژیکی بر رفتار جواب‌های معادله دیفرانسیل تاثیر می‌گذارد. برای مثال، هر میدان برداری X

روی S^2 صفرهایی دارد و از این رو، معادله $x' = X(x)$ نقاط بحرانی دارد. برای جزئیات بیشتر خواننده را به

[۱۱، ۳] ارجاع می‌دهیم.

۷.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱. برای معادله $x' = f(x)$ ، نشان دهید که اگر $\cos t$ یک جواب باشد، آنگاه $-\sin t$ نیز یک جواب است.

تمرین ۲.۱. برای معادله $x'' = f(x)$:

(الف) نشان دهید که اگر $1/(1+t)$ یک جواب باشد، آنگاه $1/(1-t)$ نیز یک جواب است؛

(ب) f را طوری پیدا کنید که $1/(1+t)$ یک جواب باشد.

تمرین ۳.۱. معادله خودگرانی را پیدا کنید که دارای یک جواب به صورت $t^2/(1+t)$ باشد.

تمرین ۴.۱. برای معادله $(x, y)' = (y, x)$ در \mathbb{R}^2 ، با نوشتن

$$x(t) = r \cosh \theta(t) \quad \text{و} \quad y(t) = r \sinh \theta(t),$$

با $r \in \mathbb{R}$ ، نشان دهید که $\theta(t) = t + c$ که در آن c یک ثابت حقیقی است.

تمرین ۵.۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع لیبشیتز و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. نشان دهید که برای معادله

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ y' = g(x)y, \end{cases}$$

مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) جواب یکتا دارد.

تمرین ۶.۱. فرض کنید تابع $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ پیوسته باشد.

(الف) نشان دهید که تابع $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده با ضابطه

$$g(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(y)} dy,$$

برای هر $x_0 \in \mathbb{R}$ معکوس پذیر است.

(ب) نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) جواب یکتا دارد.

راهنمایی: برای جواب $x(t)$ ، مشتق تابع $g(x(t))$ را محاسبه کنید.

تمرین ۷.۱. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی در \mathbb{R}^n باشد.

(الف) نشان دهید که اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، داشته باشیم $\langle f(x), x \rangle \leq 0$ ، آنگاه هر جواب مسئله با

مقدار اولیه (۱۳.۱) برای همه $t > t_0$ تعریف شده است.

(ب) نشان دهید اگر $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دیفرانسیل پذیر باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ داشته باشیم

$$g(x) \geq \|x\|^2 \quad \text{و} \quad \langle f(x), \nabla g(x) \rangle < 0,$$

(که $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ و ∇g گرادیان g است)، آنگاه هر جواب مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱) برای همه

$t > t_0$ تعریف شده است.

تمرین ۸.۱. معادله

$$\begin{cases} x' = -ay, \\ y' = ax, \end{cases}$$

را در مختصات قطبی بنویسید.

تمرین ۹.۱. معادله

$$\begin{cases} x' = \epsilon x - y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x + \epsilon y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

را در مختصات قطبی بنویسید.

تمرین ۱۰.۱. فرض کنید $u, v, w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ توابع پیوسته با $w > 0$ باشند که برای هر $t \in [a, b]$ رابطه

زیر برقرار باشد

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t w(s)u(s)ds.$$

نشان دهید که برای هر $t \in [a, b]$ رابطه زیر را خواهیم داشت

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t w(s)v(s) \exp\left(\int_s^t w(u)du\right)ds.$$

تمرین ۱۱.۱. فرض کنید $T : X \rightarrow X$ تبدیلی از یک فضای متریک کامل X باشد به طوری که برای $m \in \mathbb{N}$ ، T^m انقباضی باشد. نشان دهید

(الف) T نقطه ثابت یکتای $x_0 \in X$ دارد؛

(ب) برای هر $x \in X$ دنباله $T^n(x)$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ میل می‌کند، به همگرا می‌شود.

تمرین ۱۲.۱. نشان دهید که تابع $\|A\| \mapsto A$ تعریف شده با (۴۰.۱) یک نرم در فضای M_n از ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی است (تعریف ۲۶.۱ را ببینید).

تمرین ۱۳.۱. نشان دهید که نرم $\|\cdot\|$ تعریف شده با (۴۰.۱) برای هر $A, B \in M_n$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

تمرین ۱۴.۱. مجموعه $\mathbb{Z} \subset C(I)$ (قضیه ۳۰.۱ را ببینید) از همه توابع لیپشیتز $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ در یک مجموعه کراندار داده شده $I \subset \mathbb{R}^k$ ، با همان ثابت داده شده در رابطه (۳۸.۱)، که $x(0) = 0$ (وقتی $0 \in I$) را در نظر بگیرید. نشان دهید که \mathbb{Z} یک فضای متریک کامل با فاصله زیر است

$$\bar{d}(x, y) = \sup \left\{ \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|t\|} : t \in I \setminus \{0\} \right\}.$$

تمرین ۱۵.۱. فرض کنید φ_t شار تعریف شده با معادله $x' = f(x)$ باشد. بیان کنید چگونه f را می‌توان از شار به دست آورد.

تمرین ۱۶.۱. نشان دهید که اگر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع کراندار از کلاس C^1 باشد، آنگاه معادله $x' = f(x)$ ، شار را به گونه‌ای تعریف می‌کند که هر تابع φ_t یک همسانریخت باشد (یعنی، تابعی دوسویی پیوسته با معکوس پیوسته).

تمرین ۱۷.۱. برای $T > 0$ ، فرض کنید $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع لیپشیتز که

$$f(t, x) = f(t + T, x) \quad \text{برای } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

نشان دهید که برای هر $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ جواب $x(t, t_0, x_0)$ از مسئله مقدار اولیه (۱۳.۱) بازه ماکسیمال

\mathbb{R} دارد و

$$x(t, t_0, x_0) = x(t + T, t_0 + T, x_0) \text{ برای } t \in \mathbb{R}.$$

تمرین ۱۸.۱. تصویر فاز معادله $x'' = x^3 - x$ ، یعنی، معادله $(x, y)' = (y, x^3 - x)$ در \mathbb{R}^2 را رسم کنید.

تمرین ۱۹.۱. تصویر فاز معادله‌های زیر را رسم کنید.

$$(۱) \begin{cases} x' = y(y^2 - x^2), \\ y' = -x(y^2 - x^2); \end{cases}$$

$$(۲) \begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2); \end{cases}$$

$$(۳) \begin{cases} x' = x(10 - x^2 - y^2), \\ y' = y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

تمرین ۲۰.۱. همه مدارهای تناوبی معادلات در تمرین ۱۹.۱ را پیدا کنید.

تمرین ۲۱.۱. برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ، تصویر فاز معادله‌های زیر را به دست آورید

$$(۱) \quad x'' = \lambda x(x - 1);$$

$$(۲) \quad x'' = x(x - \lambda);$$

$$(۳) \begin{cases} x' = -y + x(\lambda - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(\lambda - x^2 - y^2). \end{cases}$$

تمرین ۲۲.۱. یک انتگرال برای معادله زیر پیدا کنید

$$\begin{cases} x' = x + 3y^2, \\ y' = -2x - y. \end{cases}$$

تمرین ۲۳.۱. معادله زیر

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = (r^2 - 1)(r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta + 1). \end{cases}$$

در مختصات قطبی را در نظر بگیرید

(الف) تصویر فاز را رسم کنید.

(ب) همه جواب‌های سراسری را پیدا کنید.

(ج) آیا معادله پایستار است یا خیر.

(د) نشان دهید که در یک همسایگی از مبدأ دوره‌های $T(r)$ از مدارهای تناوبی برای ثابت $a \neq 0$ در رابطه

زیر صدق می‌کند

$$T(r) = 2\pi + ar^2 + o(r^2),$$

برای تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به طوری که $g(x)/x^k \rightarrow 0$ وقتی $x \rightarrow 0$ می‌نویسیم $(g(x) = o(x^k))$.

جواب‌ها.

۲.۱ (ب) $f(x) = 2x^3$.

۳.۱ $[(x' + x)/(2 - x')] = 1$ ، یعنی،

$$(x, y)' = (y, 2(y - 1)(y - 2)/(2 + x)).$$

۸.۱ $(r, \theta)' = (a, 0)$.

۹.۱ $(r, \theta)' = (\epsilon r - r^3, 1)$.

۱۵.۱ $f(x) = (\partial/\partial t)\varphi_t(x)|_{t=0}$.

۲۰.۱ (الف) هیچ مدار تناوبی وجود ندارد.

(ب) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(ج) هیچ مدار تناوبی وجود ندارد.

۲۲.۱ $E(x, y) = x^2 + xy + y^3$.

۲۳.۱ (الف) همه جواب‌ها سراسری هستند.

(ج) آن پایستار است.

فصل ۲

معادلات خطی و مزدوجها

این فصل به بررسی ویژگی‌های کیفی معادلات دیفرانسیل عادی خطی و اختلال آن‌ها اختصاص دارد. ابتدا مفهوم جواب اساسی، که حاوی اطلاعات کامل دربارهٔ جواب‌های معادلهٔ خطی است را معرفی می‌کنیم. به‌ویژه، جواب‌های اساسی معادلات با ضرایب ثابت و ضرایب تناوبی را توصیف می‌کنیم. سپس شرح کاملی از تصاویر فاز معادلات با ضرایب ثابت در بعد ۱ و ۲ می‌دهیم. همچنین فرمول تغییر پارامترها را برای جواب‌های اختلال‌های یک معادلهٔ خطی ارائه می‌دهیم. سرانجام، مفهوم مزدوج بین جواب‌های دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را معرفی می‌کنیم، و در مورد خصوصیات دیفرانسیل‌پذیری، توپولوژیکی و مزدوج‌های خطی برحسب ضرایب معادلات بحث می‌کنیم. برای موضوعات اضافی خواننده را به [۴، ۱۵، ۱۷] ارجاع می‌دهیم.

۱.۲ معادلات خطی غیر خودگردان

در این بخش معادلات را روی \mathbb{R}^n به‌صورت

$$x' = A(t)x, \quad (1.2)$$

در نظر می‌گیریم که ماتریس $A(t) \in M_n$ به‌طور پیوسته با $t \in \mathbb{R}$ تغییر می‌کند (یادآوری می‌کنیم که M_n مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی است). معادلهٔ (۱.۲) معادلهٔ خطی نامیده می‌شود.

۲.۱.۱. فضای جواب‌ها. به آسانی می‌توان نشان داد که $f(t, x) = A(t)x$ پیوسته و به‌طور موضعی نسبت به x

لیپشیتز است. از قضیهٔ پیکارد-لیندلف (قضیهٔ ۱۸.۱) نتیجه می‌شود که مسئله با مقدار اولیه (۱۳.۱)، یعنی

$$\begin{cases} x' = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (۲.۲)$$

جواب یکتا روی بازهٔ باز شامل t_0 دارد.

قضیه ۱.۲. همهٔ جواب‌های معادله (۱.۲) بازهٔ ماکسیمال \mathbb{R} دارند.

برهان. ابتدا حالت $t \geq t_0$ را در نظر می‌گیریم. استدلال برای $t \leq t_0$ کاملاً مشابه است. اگر $x = x(t)$ جوابی

از معادله (۱.۲) باشد، آنگاه برای بازهٔ باز شامل t_0 ، داریم

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds,$$

و از این رو، برای $t \geq t_0$ در آن بازه، داریم

$$\|x(t)\| < \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|x(s)\| ds.$$

از لم گرونوال (قضیهٔ ۳۹.۱) نتیجه می‌شود که برای همان مقادیر t رابطهٔ زیر برقرار است

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds.$$

از آنجایی که تابع $t \mapsto A(t)$ پیوسته است، انتگرال $\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds$ خوش‌تعریف است و برای هر t_0 و t ، متناهی

است. از این رو، از قضیهٔ ۴۶.۱ نتیجه می‌شود که بازهٔ ماکسیمال جواب x ، \mathbb{R} است. \square

با استفاده از مفهوم جواب سراسری در تعریف ۵۶.۱، می‌توان قضیهٔ ۱.۲ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد: همهٔ

جواب‌های معادله (۱.۲) سراسری هستند.

نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادله (۱.۲) یک فضای خطی است.

قضیه ۲.۲. اگر $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ جواب‌های معادله (۱.۲) باشند، آنگاه برای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $c_1x_1 + c_2x_2$ جوابی از معادله (۱.۲) است.

برهان. داریم

$$\begin{aligned}(c_1x_1 + c_2x_2)' &= c_1x_1' + c_2x_2' \\ &= c_1A(t)x_1 + c_2A(t)x_2 \\ &= A(t)(c_1x_1 + c_2x_2),\end{aligned}$$

و از این رو، $c_1x_1 + c_2x_2$ جوابی از معادله (۱.۲) است. \square

مثال ۳.۲. معادله

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

که جواب‌ها توسط (۷.۱) با $r \geq 0$ و $c \in \mathbb{R}$ معین می‌شوند را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos c \cos t + r \sin c \sin t \\ -r \cos c \sin t + r \sin c \cos t \end{pmatrix} \\ &= r \cos c \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + r \sin c \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که مجموعه همه جواب‌های معادله (۳.۲) یک فضای خطی از بُعد ۲، تولید شده توسط بردارهای

(مستقل خطی) زیر است

$$(\cos t, -\sin t) \quad \text{و} \quad (\sin t, \cos t).$$

به‌طور کلی، نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۴.۲. مجموعه تمام جواب‌های معادله (۱.۲) یک فضای خطی از بُعد n است.

برهان. فرض کنید e_1, \dots, e_n یک پایه از \mathbb{R}^n باشد. برای $i = 1, \dots, n$ ، فرض کنید $x_i = x_i(t)$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه (۲.۲) با $x_0 = e_i$ باشد. برای $x_0 \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، جواب مسئله (۲.۲) را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. با نوشتن $x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ ، به آسانی می‌توان نشان داد که تابع

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t),$$

جوابی از معادله (۱.۲) با $x(t_0) = x_0$ است. به ویژه، فضای جواب‌های معادله (۱.۲) توسط توابع $x_1(t), \dots, x_n(t)$ تولید می‌شود. برای اینکه نشان دهیم این جواب‌ها مستقل خطی‌اند، فرض می‌کنیم که برای ثابت‌های $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ و هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0.$$

با اختیار $t = t_0$ ، رابطه $\sum_{i=1}^n c_i e_i = 0$ را به دست می‌آوریم، و از این رو $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ (چون \square e_1, \dots, e_n پایه است). از این رو، توابع $x_1(t), \dots, x_n(t)$ مستقل خطی هستند.

۲.۱.۲. جواب‌های اساسی. برای توصیف همه جواب‌های معادله (۱.۲) مفید است که مفهوم زیر را معرفی

کنیم.

تعریف ۵.۲. تابع $X(t)$ با مقادیری در M_n که ستون‌هایش یک پایه از فضای جواب‌های معادله (۱.۲) را تشکیل می‌دهد یک جواب اساسی از معادله نامیده می‌شود.

متذکر می‌شویم که هر جواب اساسی یک تابع $X : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ است که برای هر $t \in \mathbb{R}$ در رابطه زیر صدق

می‌کند

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (۴.۲)$$

مشتق $X(t)$ جمله‌به‌جمله محاسبه می‌شود.

حال فرض کنید $X(t)$ جواب اساسی معادله (۱.۲) باشد. برای هر بردار $c \in \mathbb{R}^n$ ، حاصل ضرب $X(t)c$ یک ترکیب خطی از ستون‌های $X(t)$ است. به‌طور دقیق‌تر، اگر $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ستون‌های $X(t)$ باشند و $c = (c_1, \dots, c_n)$ آنگاه داریم

$$X(t)c = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t).$$

این نشان می‌دهد که جواب‌های معادله (۱.۲) دقیقاً توابعی به‌صورت $X(t)c$ با $c \in \mathbb{R}^n$ هستند، که $X(t)$ جواب اساسی است.

مثال ۶.۲. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 به‌گونه‌ای باشد که معادله $x' = f(x)$ تنها جواب‌های سراسری داشته باشد. برای جواب $\varphi_t(x)$ با $\varphi_0(x) = x$ ، ماتریس‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$A(t) = d_{\varphi_t(x)} f.$$

معادله

$$y' = A(t)y,$$

معادله وردشی خطی $x' = f(x)$ در امتداد جواب $\varphi_t(x)$ نامیده می‌شود. از برابری

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = f(\varphi_t(x)),$$

نتیجه می‌شود که اگر نگاشت $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ به‌اندازه‌کافی منظم باشد، آنگاه رابطه زیر را داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} d_x \varphi_t = d_{\varphi_t(x)} f d_x \varphi_t = A(t) d_x \varphi_t.$$

این نشان می‌دهد که تابع $X(t) = d_x \varphi_t$ در تساوی زیر صدق می‌کند

$$X'(t) = A(t)X(t),$$

و از این‌رو، همچنین برای هر $c \in \mathbb{R}^n$ ، داریم

$$(X(t)c)' = A(t)(X(t)c).$$

از آنجایی که

$$X(0) = d_x \varphi_0 = d_x Id = Id,$$

ستون‌های $X(t)$ مستقل خطی هستند، و از این رو، $X(t)$ جواب اساسی معادلهٔ وردشی خطی $x' = f(x)$ در امتداد جواب $\varphi_t(x)$ است.

حال یک نتیجهٔ کمکی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۲. اگر $X(t)$ جواب اساسی معادلهٔ (۱.۲) باشد، آنگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ ستون‌هایش مستقل خطی هستند.

برهان. فرض کنید $x_n(t), \dots, x_1(t)$ ستون‌های جواب اساسی $X(t)$ باشند. برای $t_0 \in \mathbb{R}$ نشان می‌دهیم که بردارهای $x_n(t_0), \dots, x_1(t_0)$ مستقل خطی هستند. برای ثابت‌های $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ فرض کنید

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i(t_0) = 0.$$

پس جواب

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t), \quad (5.2)$$

از معادلهٔ (۱.۲) در شرط $x(t_0) = 0$ صدق می‌کند، و از یکتایی جواب‌ها نتیجه می‌شود که برای هر $t \in \mathbb{R}$ $x(t) = 0$ است. از آنجایی که توابع $x_n(t), \dots, x_1(t)$ پایه‌ای از فضای جواب‌ها تشکیل می‌دهند (زیرا $X(t)$ جواب اساسی است)، از (۵.۲) نتیجه می‌شود که $c_1 = \dots = c_n = 0$. از این رو، بردارهای $x_n(t_0), \dots, x_1(t_0)$ مستقل خطی هستند. \square

قضیهٔ ۷.۲ نتیجهٔ زیر را دارد.

قضیه ۸.۲. جواب مسئلهٔ با مقدار اولیهٔ (۲.۲) به صورت زیر معین می‌شود

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

که $X(t)$ جوابی اساسی معادلهٔ (۱.۲) است.

برهان. از قضیه ۷.۲ نتیجه می‌شود که ماتریس $X(t_0)$ معکوس پذیر است. و از این رو، تابع $x(t)$ در (۶.۲) خوش تعریف است. به علاوه

$$x(t_0) = X(t_0)X(t_0)^{-1}x_0 = x_0,$$

و از رابطه (۴.۲) نتیجه می‌شود که

$$x'(t) = X'(t)X(t_0)^{-1}x_0 = A(t)X(t)X(t_0)^{-1}x_0 = A(t)x(t).$$

این نشان می‌دهد که $x(t)$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه (۲.۲) است. □

هر دو جواب اساسی به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند.

قضیه ۹.۲. اگر $X(t)$ و $Y(t)$ جواب‌های اساسی معادله (۱.۲) باشند، آنگاه ماتریس معکوس پذیر $C \in M_n$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ $Y(t) = X(t)C$.

برهان. از آنجایی که $X(t)$ و $Y(t)$ جواب‌های اساسی هستند، هر ستون $Y(t)$ یک ترکیب خطی از ستون‌های $X(t)$ است و برعکس. از این رو، ماتریس‌های $C, D \in M_n$ وجود دارند به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، خواهیم داشت

$$Y(t) = X(t)C \quad \text{و} \quad X(t) = Y(t)D.$$

از این رو

$$Y(t) = X(t)C = Y(t)DC. \quad (۷.۲)$$

از طرف دیگر، توسط قضیه ۷.۲، ستون‌های ماتریس $Y(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ مستقل خطی هستند. بنابراین، $Y(t)$ معکوس پذیر است و از رابطه (۷.۲) نتیجه می‌شود که $DC = Id$. به ویژه، ماتریس C معکوس پذیر است. □

همچنین از قضیه ۷.۲ نتیجه می‌شود که اگر $X(t)$ جواب اساسی معادله خطی باشد، آنگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ ،

$$\det X(t) \neq 0. \quad \text{در حقیقت، یک فرمول برای دترمینان داریم.}$$

قضیه ۱۰.۲. (فرمول لیوویل).^۱ اگر $X(t)$ جواب اساسی معادله (۱.۲) باشد، آنگاه برای هر $t, t_0 \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds.$$

برهان. به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\frac{d}{dt} \det X(t) = \sum_{i=1}^n \det D_i(t), \quad (۸.۲)$$

که در آن $D_i(t)$ ماتریس $n \times n$ است که از مشتق‌گیری سطر i ام $X(t)$ به دست آمده است. با نوشتن $X(t) = (x_{ij}(t))$ و $A(t) = (a_{ij}(t))$ ، از رابطه (۴.۲) نتیجه می‌شود که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ،

$$x'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

به ویژه، سطر i ام $D_i(t)$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} (x'_{i1}(t), \dots, x'_{in}(t)) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{k1}(t), \dots, \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kn}(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)(x_{k1}(t), \dots, x_{kn}(t)). \end{aligned}$$

از آنجایی که مجموع آخر یک ترکیب خطی از سطرهای $X(t)$ است، از (۸.۲) و خواص دترمینان نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det X(t) &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \det X(t) \\ &= \operatorname{tr} A(t) \det X(t). \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، تابع $u(t) = \det X(t)$ جوابی از معادله $u' = \operatorname{tr} A(t)u$ است. در نتیجه

$$u(t) = u(t_0) \exp \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds.$$

□

بنابراین نتیجه مطلوب برقرار است.

¹Liouville's formula

۲.۲ معادلات با ضرایب ثابت

در این بخش، حالت خاصی از معادلات خطی در \mathbb{R}^n به صورت

$$x' = Ax, \quad (9.2)$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی است را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که تابع $f(t, x) = Ax$ از کلاس C^1 است، و از این رو، پیوسته و به طور موضعی نسبت به x لیبشیتز است.

۲.۲.۱. نمای یک ماتریس. برای حل معادله (۹.۲)، ابتدا مفهوم نمای یک ماتریس را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۲. نمای ماتریس $A \in M_n$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad (10.2)$$

که در آن بنا به قرارداد $e^0 = Id$.

قضیه ۱۲.۲. سری توانی (۱۰.۲) برای هر ماتریس A همگرا است.

برهان. به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر $k \in \mathbb{N}$ رابطه $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ برقرار است، و از این رو

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|} < +\infty. \quad (11.2)$$

به عبارت دیگر، سری (۱۰.۲) به طور مطلق همگرا است و از این رو، همگرا نیز است. \square

مثال ۱۳.۲. اگر $A = Id$ ، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ رابطه $A^k = Id$ برقرار است، و از این رو رابطه زیر را خواهیم

داشت

$$e^{Id} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Id = e Id.$$

مثال ۱۴.۲. اگر A یک ماتریس قطری $n \times n$ با درایه‌های قطری $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشند، آنگاه e^A به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

مثال ۱۵.۲. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix},$$

که در آن $Id \in M_n$ ماتریس همانی است را در نظر بگیرید. داریم

$$A^0 = Id, \quad A^1 = A, \quad A^2 = -Id, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = Id,$$

و از این رو، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $A^{k+4} = A^k$. بنابراین

$$\begin{aligned} e^{At} &= \left(\frac{t^0}{0!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) Id + \left(\frac{t^1}{1!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) A \\ &\quad - \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^6}{6!} + \dots \right) Id - \left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^7}{7!} + \dots \right) A \\ &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} Id + \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} A \\ &= \cos t Id + \sin t A. \end{aligned}$$

به منظور توصیف یک روش تا حدی سریع برای محاسبه‌ی نمای یک ماتریس، ابتدا یک نتیجه‌ی اساسی از جبر خطی

را به یاد می‌آوریم.

قضیه ۱۶.۲. (صورت متعارف جردن) برای هر $A \in M_n$ ، ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر S با درایه‌هایی در \mathbb{C} موجود است به طوری که

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_k \end{pmatrix}, \quad (۱۲.۲)$$

که هر بلوک R_j یک ماتریس $n_j \times n_j$ است، با $n_j \leq n$ به طوری که

$$R_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (۱۳.۲)$$

که λ_j مقدار ویژه A است.

با استفاده از صورت متعارف جردن در قضیه ۱۶.۲، نمای یک ماتریس را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

قضیه ۱۷.۲. اگر A یک ماتریس مربعی با صورت متعارف جردن در (۱۲.۲) باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$e^A = Se^{S^{-1}AS}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{R_1} & 0 \\ 0 & e^{R_k} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (۱۴.۲)$$

برهان. برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، رابطه $(S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS$ برقرار است. بنابراین، داریم

$$e^{S^{-1}AS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (S^{-1}AS)^k = S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) S = S^{-1}e^AS.$$

از طرف دیگر، به آسانی می‌توان نشان داد که نمای یک ماتریس در صورت بلوکی با محاسبه مجزای نمای هر بلوک به دست می‌آید. به این معنا که

$$e^{S^{-1}AS} = \begin{pmatrix} e^{R_1} & 0 \\ 0 & e^{R_k} \end{pmatrix}.$$

□

بنابراین، نتیجه مطلوب برقرار است.

وقتی A متشکل از بلوک منفرد R_j مانند (۱۳.۲) باشد، نمای e^A را می‌توان به‌طور صریح به‌صورت زیر محاسبه کرد.

قضیه ۱۸.۲. اگر ماتریس $A \in M_n$ به‌صورت $A = \lambda Id + N$ باشد، که در آن

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (۱۵.۲)$$

آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$e^A = e^\lambda \left(Id + N + \frac{1}{2!} N^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} N^{n-1} \right). \quad (۱۶.۲)$$

برهان. از آنجایی که ماتریس λId و N جابجا می‌شوند، می‌توان نشان داد که

$$e^A = e^{\lambda Id} e^N,$$

(تمرین ۴.۲ را ببینید). با توجه به مثال ۱۴.۲، داریم $e^{\lambda Id} = e^\lambda Id$. از طرف دیگر، چون $N^n = 0$ ، خواهیم

داشت

$$e^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k,$$

و از این رو، رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم

$$e^A = e^\lambda Id \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k = e^\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k.$$

این رابطه (۱۶.۲) را نتیجه می‌دهد. \square

۲.۲.۲. حل معادلات. در این بخش رابطه بین معادله خطی $x' = Ax$ و نمای یک ماتریس را شرح می‌دهیم.

با یک نتیجه کمکی شروع می‌کنیم.

قضیه ۱۹.۲. برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $(e^{At})' = Ae^{At}$ ، که با مشتق‌گیری درایه‌به‌درایه از e^{At} محاسبه می‌شود.

برهان. داریم

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

از آنجایی که

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|t^k A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|tA\|^k = e^{\|tA\|} < +\infty,$$

هر درایه ماتریس e^{At} یک سری توانی برحسب t با شعاع همگرایی $+\infty$ است. از این رو، برای هر $t \in \mathbb{R}$ می توان با مشتق گیری جمله به جمله از سری، رابطه زیر را به دست آورد

$$\begin{aligned} (e^{At})' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} A^k \\ &= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} = A e^{At}. \end{aligned}$$

□

حال همه جواب های معادله (۹.۲) را پیدا می کنیم.

قضیه ۲۰.۲. فرض کنید $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. جواب معادله $x' = Ax$ با شرط اولیه $x(t_0) = x_0$ توسط ضابطه زیر معین می شود

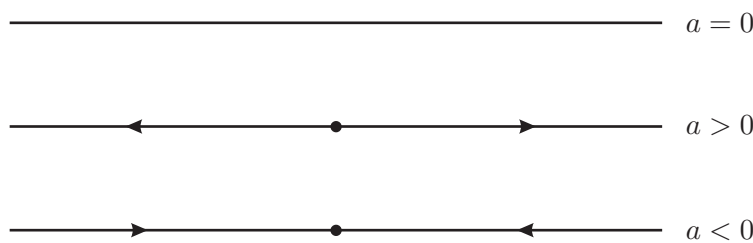
$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (17.2)$$

برهان. با توجه به قضیه پیکارد-لیندلف (قضیه ۱۸.۱)، جواب مطلوب یکتا است، و با توجه به قضیه ۱.۲ بازه ماکسیمال آن \mathbb{R} است. برای تکمیل اثبات کافی است مشاهده کنیم که برای تابع $x(t)$ در (۱۷.۲)، داریم

$$x(t_0) = e^{A0} x_0 = e^0 x_0 = Id x_0 = x_0,$$

و با توجه به قضیه ۱۹.۲، داریم

$$x'(t) = A e^{A(t-t_0)} x_0 = Ax(t).$$



شکل ۱.۲: تصویر فاز معادله $x' = ax$.

این نشان می‌دهد که $x(t)$ جواب مطلوب است. □

۳.۲.۲. تصاویر فاز. در این بخش تصاویر فاز همه معادلات خطی با ضرایب ثابت در \mathbb{R} و \mathbb{R}^2 را شرح

می‌دهیم. مثال زیر یک توصیف کاملی برای معادلات اسکالر می‌دهد.

مثال ۲.۱.۲. معادله اسکالر $x' = ax$ ، که $a \in \mathbb{R}$ است را در نظر بگیرید. تصاویر فاز آنها که در شکل ۱.۲ نشان داده شده است فقط به علامت ثابت a بستگی دارد. یعنی، وقتی $a = 0$ ، تنها نقاط بحرانی وجود دارند. از طرف دیگر، وقتی $a \neq 0$ مبدأ تنها نقطه بحرانی است، و مدارهای باقی‌مانده \mathbb{R}^+ و \mathbb{R}^- جهت نشان داده شده در شکل ۱.۲ را دارند.

اکنون معادلات خطی در \mathbb{R}^2 را در نظر می‌گیریم و تصاویر فاز آنها را براساس صورت متعارف جردن توضیح

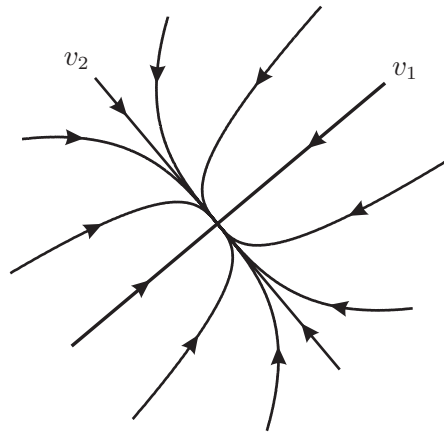
می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۲. ابتدا ماتریس $A \in M_2$ با صورت متعارف جردن را برای $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

(تأکید می‌کنیم که فرض نمی‌کنیم که A از این شکل است، بلکه فقط صورت متعارف کانونی آن این شکل است).

فرض کنید $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ بردارهای ویژه A به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 باشند. جواب‌های معادله

شکل ۲.۲: حالت $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

$x' = Ax$ را می‌توان با $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ به صورت زیر نوشت

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (18.2)$$

حال چندین حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. برای $c_2 \neq 0$ ، وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، داریم

$$\frac{x(t)}{c_2 e^{\lambda_2 t}} \rightarrow v_2 \quad (19.2)$$

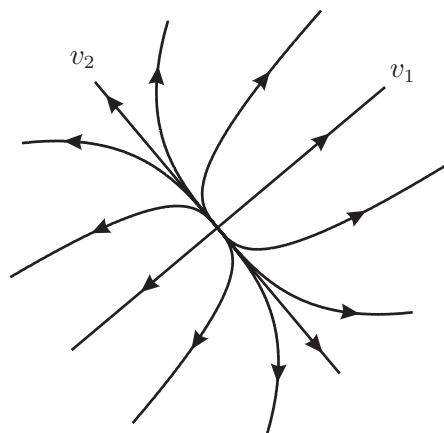
و از این رو، جواب $x(t)$ به طور مجانبی جهت v_2 را دارد (وقتی $t \rightarrow +\infty$). تصویر فاز این مورد مانند شکل ۲.۲ است، و مبدأ گره پایدار نامیده می‌شود.

حالت $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. به همین ترتیب، برای $c_2 \neq 0$ ، خاصیت (۱۹.۲) وقتی $t \rightarrow -\infty$ برقرار است، و

از این رو، جواب $x(t)$ به طور مجانبی جهت v_2 را دارد (وقتی $t \rightarrow -\infty$). تصویر فاز این مورد مانند شکل ۳.۲ است، و مبدأ مختصات یک گره ناپایدار است.

حالت $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. اکنون انبساط در جهت v_2 و انقباض در جهت v_1 وجود دارد. تصویر فاز مانند شکل

۴.۲ است، و مبدأ یک نقطه زینی است.



شکل ۳.۲: حالت $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

حالت $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 > 0$. جواب (۱۸.۲) را می‌توان با $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ به صورت زیر نوشت

$$x(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (۲۰.۲)$$

از این رو، برای $c_2 \neq 0$ جواب یک پرتو با جهت v_2 را می‌پیماید. از طرف دیگر، خط مستقیمی که از مبدأ با جهت v_1 می‌گذرد کاملاً از نقاط بحرانی تشکیل شده است. تصویر فاز این مورد مانند شکل ۵.۲ است.

حالت $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 < 0$. جواب، دوباره با توجه به (۲۰.۲) معین می‌شود. به طور مشابه، تصویر فاز همان

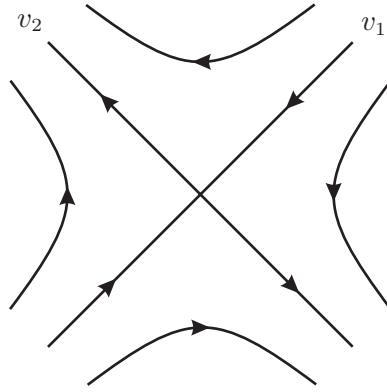
است که در شکل ۶.۲ نشان داده شده است.

حالت $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$. جواب (۱۸.۲) را اکنون می‌توان با $x_0 \in \mathbb{R}^2$ به صورت زیر نوشت

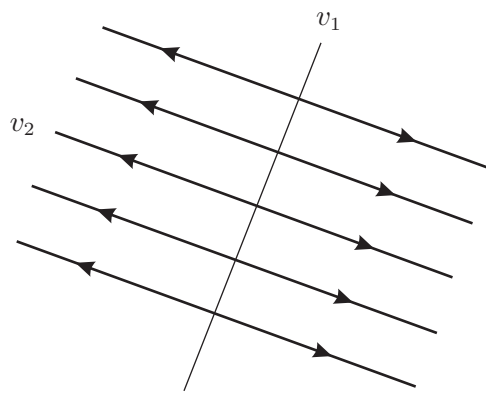
$$x(t) = e^{\lambda t} x_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

توجه می‌کنیم که برخلاف آنچه در شکل ۲.۲ اتفاق می‌افتد در جایی که مجانبی وجود دارد، هیچ جهت خاصی وجود ندارد. بنابراین، تصویر فاز همان است که در شکل ۷.۲ نشان داده شده است، و مبدأ، گره پایدار نامیده می‌شود.

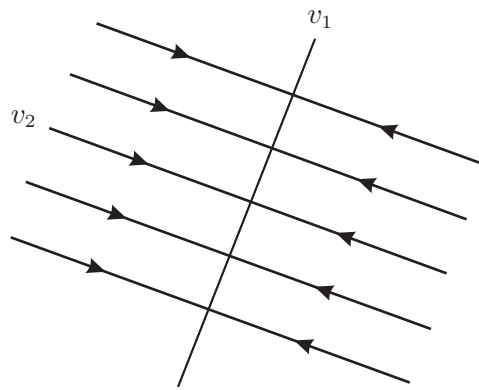
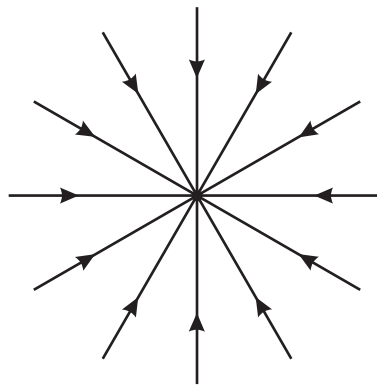
حالت $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. به طور مشابه، تصویر فاز همان است که در شکل ۸.۲ نشان داده شده است، و مبدأ،

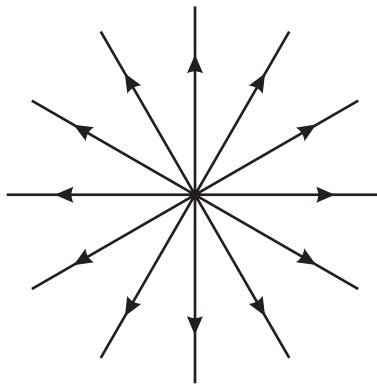


شکل ۴.۲: حالت $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.



شکل ۵.۲: حالت $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 > 0$.

شکل ۶.۲: حالت $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 < 0$.شکل ۷.۲: حالت $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

شکل ۸.۲: حالت $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

یک گره ناپایدار است.

حالت $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. در این حالت تنها نقاط بحرانی وجود دارد.

اکنون حالت صورت‌های متعارف جردن غیرقطری با مقدار ویژه حقیقی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۳.۲. ماتریس‌های $A \in M_2$ با صورت متعارف جردن زیر را برای $\lambda \in \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که جواب‌های معادله $x' = Ax$ را می‌توان با $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ به صورت زیر نوشت

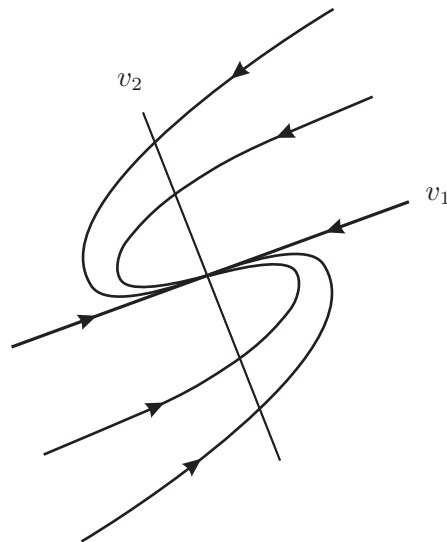
$$x(t) = [(c_1 + c_2 t)v_1 + c_2 v_2]e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (21.2)$$

که $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ بردارهایی هستند که

$$Av_1 = \lambda v_1 \quad \text{و} \quad Av_2 = \lambda v_1 + v_2. \quad (22.2)$$

هر جا که $c_1 \neq 0$ یا $c_2 \neq 0$ ، وقتی $t \rightarrow +\infty$ و $t \rightarrow -\infty$ ، داریم

$$\frac{x(t)}{(c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}} \rightarrow v_1.$$

شکل ۹.۲: حالت $\lambda < 0$.

اکنون سه حالت را در نظر می‌گیریم.

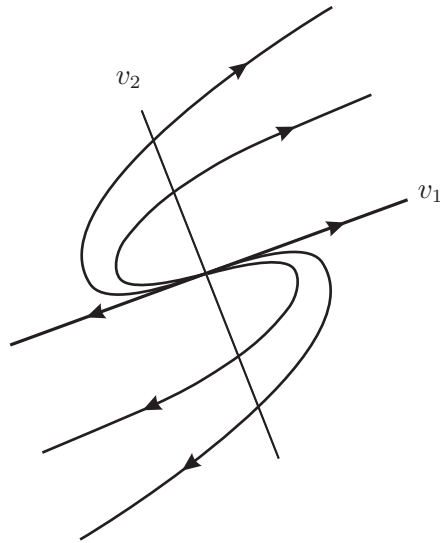
حالت $\lambda < 0$. تصویر فاز همان است که در شکل ۹.۲ نشان داده شده است، و مبدأ، گره پایدار نامیده می‌شود.

حالت $\lambda > 0$. تصویر فاز همان است که در شکل ۱۰.۲ نشان داده شده است، و مبدأ، گره ناپایدار نامیده می‌شود.

حالت $\lambda = 0$. جواب (۲۱.۲) را می‌توان اکنون با $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ به صورت زیر نوشت

$$x(t) = (c_1 v_1 + c_2 v_2) + c_2 t v_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

که $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ بردارهای صادق در رابطه (۲۲.۲) هستند. به‌ویژه، خط مستقیمی که از مبدأ با جهت v_1 می‌گذرد، کاملاً از نقاط بحرانی تشکیل شده است. تصویر فاز در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده است.

شکل ۱۰.۲: حالت $\lambda > 0$.

حالت $\lambda = 0$. جواب (۲۱.۲) را می‌توان اکنون با $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ به صورت زیر نوشت

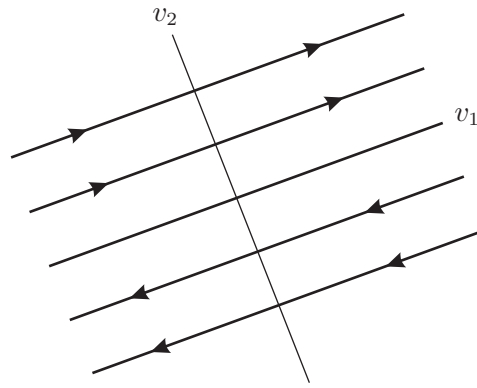
$$x(t) = (c_1 v_1 + c_2 v_2) + c_2 t v_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

که $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ بردارهای صادق در رابطه (۲۲.۲) هستند. به‌ویژه، خط مستقیمی که از مبدأ با جهت v_1 می‌گذرد، کاملاً از نقاط بحرانی تشکیل شده است. تصویر فاز در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده است. سرانجام، حالت مقادیر ویژه غیرحقیقی را در نظر می‌گیریم. به یاد می‌آوریم که برای ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی، مقادیر ویژه غیرحقیقی همیشه در جفت اعداد مختلط مزدوج ظاهر می‌شوند. به‌علاوه، بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه لزوماً در $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ هستند، و از این رو، طبیعی است که از متغیرهای مختلط استفاده کنیم.

مثال ۲۴.۲. فرض کنید $A \in M_2$ یک ماتریس 2×2 با مقادیر ویژه $a + ib$ و $a - ib$ که در آن $b \neq 0$.

جواب‌های معادله $x' = Ax$ در \mathbb{C}^2 به صورت زیر معین می‌شوند

$$x(t) = c_1 e^{(a+ib)t} v_1 + c_2 e^{(a-ib)t} v_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

شکل ۱۱.۲: حالت $\lambda = 0$.

که در آن $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ به ترتیب بردارهای ویژه متناظر با $a + ib$ و $a - ib$ هستند و $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. از آنجایی که ماتریس A درایه‌های حقیقی دارد، می‌توان v_2 را برابر \bar{v}_1 اختیار کرد. در واقع، از $Av_1 = (a + ib)v_1$ نتیجه می‌شود که

$$A\bar{v}_1 = \overline{Av_1} = \overline{(a + ib)v_1} = (a - ib)\bar{v}_1,$$

و از این رو، \bar{v}_1 بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $a - ib$ است. از این رو، با اختیار $c_2 = \bar{c}_1$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}[c_1 \cos(bt) + c_1 i \sin(bt)]v_1 + e^{at}[\bar{c}_1 \cos(bt) - \bar{c}_1 i \sin(bt)]\bar{v}_1 \\ &= 2e^{at} \cos(bt) \operatorname{Re}(c_1 v_1) - 2e^{at} \sin(bt) \operatorname{Im}(c_1 v_1). \end{aligned} \quad (23.2)$$

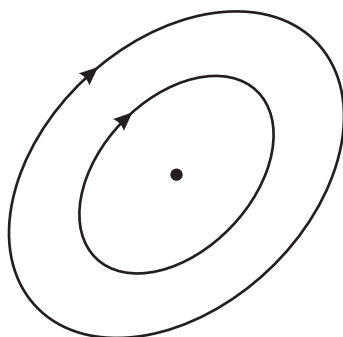
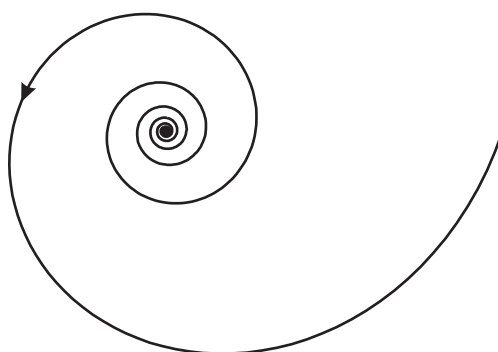
متذکر می‌شویم که بردارهای زیر در \mathbb{R}^2 هستند

$$u_1 = 2\operatorname{Re}(c_1 v_1) \quad \text{و} \quad v_2 = -2\operatorname{Im}(c_1 v_1).$$

اکنون سه حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت $a = 0$. در این حالت جواب (۲۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

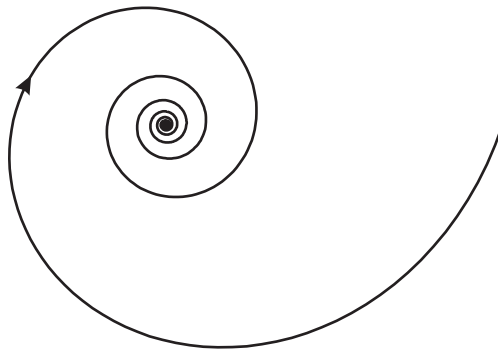
$$x(t) = \cos(bt)u_1 + \sin(bt)u_2.$$

شکل ۱۲.۲: حالت $a = 0$.شکل ۱۳.۲: حالت $a > 0$.

از این رو، تصویر فاز همان است که در شکل ۱۲.۲ نشان داده شده است یا با تغییر جهت حرکت از آن به دست می‌آید (این مربوط به تغییر علامت b است). مبدأ را مرکز می‌گویند.

حالت $a > 0$ تصویر فاز همان است که در شکل ۱۳.۲ نشان داده شده است، و مبدأ، کانون پایدار است.

حالت $a < 0$ تصویر فاز همان است که در شکل ۱۴.۲ نشان داده شده است، و مبدأ، کانون ناپایدار است.

شکل ۱۴.۲: حالت $a < 0$.

۳.۲ فرمول تغییر پارامترها

در این بخش، یک نتیجه برای جواب‌های یک کلاس از اختلالات معادلات خطی (۲.۲) را ارائه می‌کنیم. همچنان فرض می‌کنیم که ماتریس $A(t) \in M_n$ به‌طور پیوسته با $t \in \mathbb{R}$ تغییر می‌کنند.

قضیه ۲۵.۲. (فرمول تغییر پارامترها).^۱ فرض کنید $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته باشد. برای $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ، جواب مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (۲۴.۲)$$

بازۀ ماکسیمال \mathbb{R} دارد و با ضابطه زیر معین می‌شود

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X(s)^{-1}b(s)ds, \quad (۲۵.۲)$$

که $X(t)$ جواب اساسی معادله (۱.۲) است، و انتگرال، مؤلفه‌به‌مؤلفه محاسبه می‌شود.

برهان. می‌دانیم که تابع

$$f(t, x) = A(t)x + b(t),$$

^۱Variation of parameters formula

پیوسته و نسبت به x به طور موضعی لپشیتز است. از این رو، با استفاده از قضیهٔ پیکارد-لیندلف (قضیهٔ ۱۸.۱)، مسئله با مقدار اولیهٔ (۲۴.۲) جواب یکتا دارد. به علاوه، از آنجایی که تابع $s \mapsto X(t)X(s)^{-1}b(s)$ پیوسته است (چون مؤلفه‌های معکوس ماتریس B ، توابع پیوسته از مؤلفه‌های B هستند). انتگرال در رابطهٔ (۲۵.۲) خوش تعریف است و برای هر t_0 و t متناهی است. از این رو، از قضیهٔ ۴۶.۱ نتیجه می‌شود که تابع $x(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده است. به علاوه، $x(t_0) = x_0$ ، و با استفاده از (۴.۲) رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)X(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t X'(t)X(s)^{-1}b(s)ds + X(t)X(t_0)^{-1}b(t) \\ &= A(t)X(t)X(t_0)^{-1}x_0 + A(t) \int_{t_0}^t X(t)X(s)^{-1}b(s)ds + b(t) \\ &= A(t)x(t) + b(t). \end{aligned}$$

□

بنابراین نتیجهٔ مطلوب برقرار است.

معادلات

$$x' = A(t)x \quad \text{و} \quad x' = A(t)x + b(t),$$

اغلب به ترتیب به عنوان معادلهٔ همگن و معادلهٔ غیرهمگن نامیده می‌شوند. همچنین فرمول تغییر پارامترها را در حالت خاص اختلالات معادلهٔ خطی خودگردان (۹.۲) به دست می‌آوریم.

قضیه ۲۶.۲. (فرمول تغییر پارامترها). فرض کنید $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : b$ یک تابع پیوسته باشد. برای $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ، جواب مسئله با مقدار اولیهٔ

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (۲۶.۲)$$

بازهٔ ماکسیمال \mathbb{R} دارد و با ضابطهٔ زیر معین می‌شود

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds. \quad (۲۷.۲)$$

برهان. با استفاده از قضیه ۲۵.۲، مسئله مقدار اولیه (۲۶.۲) جوابی یکتا با بازه ماکسیمال \mathbb{R} دارد. از این رو، کافی است مشاهده کنیم که برای تابع $x(t)$ در (۲۷.۲) رابطه

$$x(t_0) = e^{A_0} x_0 = I x_0 = x_0,$$

همچنین رابطه زیر را داریم

$$\begin{aligned} x'(t) &= A e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t A e^{A(t-s)} b(s) ds + e^{A(t-t)} b(t) \\ &= A(e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} b(s) ds) + b(t) \\ &= Ax(t) + b(t). \end{aligned}$$

این اثبات قضیه را کامل می‌کند. \square

متذکر می‌شویم که قضیه ۲۶.۲ یک نتیجه فوری از قضیه ۲۵.۲ نیست. این، به دلیل این واقعیت است که اگر $X(t)$ جواب اساسی معادله (۱.۲) باشد، آنگاه به‌طور کلی $X(t)X(s)^{-1}$ ممکن است با $X(t-s)$ برابر نباشد، هر چند که این خاصیت برای معادلات با ضرایب ثابت برقرار است (تمرین ۳.۲ را ببینید). حال یک نتیجه کمکی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۷.۲. اگر ماتریس $A \in M_n$ تنها مقادیر ویژه A منفی داشته باشد، آنگاه ثابت‌های $c, d > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-dt}, \quad t \geq 0. \quad (28.2)$$

برهان. از آنجایی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A منفی هستند، از (۱۴.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌شود که برای هر مؤلفه $a_{ij}(t)$ از e^{At} ثابت‌های $c_{ij}, d_{ij} > 0$ و چند جمله‌ای p_{ij} وجود دارند به‌طوری‌که رابطه زیر برقرار است

$$|a_{ij}(t)| \leq c_{ij} e^{-d_{ij}t} |p_{ij}(t)|, \quad t \geq 0.$$

وقتی که p_{ij} متحد با صفر نباشد، رابطه زیر را داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \log(e^{-d_{ij}t} |p_{ij}(t)|) = -d_{ij},$$

و از این رو، برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\bar{c}_{ij} > 0$ وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار است

$$e^{-d_{ij}t} |p_{ij}(t)| \leq \bar{c}_{ij} e^{-(d_{ij}-\epsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم

$$|a_{ij}(t)| \leq c_{ij} \bar{c}_{ij} e^{-(d_{ij}-\epsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

با اختیار ϵ به اندازه کافی کوچک به صورت

$$d := \min\{d_{ij} - \epsilon : i, j = 1, \dots, n\} > 0,$$

رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$|a_{ij}(t)| \leq \bar{c} e^{-dt}, \quad t \geq 0, \quad (29.2)$$

که در آن

$$\bar{c} = \max\{c_{ij} \bar{c}_{ij} : 1, j = 1, \dots, n\}.$$

یادآوری می‌کنیم که همه نُرم‌ها در \mathbb{R}^m ، معادل هستند، یعنی، برای دو نُرم داده شده $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|'$ ، ثابت $C \geq 1$

وجود دارد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}^m$ رابطه زیر برقرار است

$$C^{-1} \|x\| \leq \|x\|' \leq C \|x\|.$$

از آنجایی که M_n را می‌توان با \mathbb{R}^{n^2} یکسان در نظر گرفت، با اختیار $m = n^2$ از رابطه (29.2) نتیجه می‌شود که

□

رابطه (28.2) برای ثابت c برقرار است.

کاربردی از قضیه ۲۶.۲ برای یک کلاس خاص از معادلات به صورت $x' = Ax + b(t)$ به شرح زیر است.

مثال ۲۸.۲. تحت مفروضات قضیه ۲۶.۲، فرض می‌کنیم که قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A همگی منفی

باشند و تابع b کراندار است. با استفاده از رابطه (۲۸.۲)، از قضیه ۲۶.۲ نتیجه می‌شود که جواب $x = x(t)$ از

مسئله با مقدار اولیه (۲۶.۲) با $t_0 = 0$ برای $t \geq 0$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|x(t)\| \leq ce^{-dt}\|x_0\| + \int_0^t ce^{-d(t-s)}Kds,$$

که در آن $K = \sup_{s>0} \|b(s)\|$ از این رو، برای $t \geq 0$ رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\|x(t)\| \leq ce^{-dt}\|x_0\| + \frac{c}{d}(1 - e^{-dt})K.$$

به ویژه، جواب در \mathbb{R}^+ کراندار است.

۴.۲ معادلات با ضرایب تناوبی

در این بخش یک حالت خاص از معادلات خطی با ضرایب تناوبی را در نظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر، در \mathbb{R}^n

معادلات

$$x' = A(t)x, \quad (30.2)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن ماتریس‌های $A(t) \in M_n$ به طور پیوسته با $t \in \mathbb{R}$ تغییر می‌کنند، و فرض می‌کنیم که

$T > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد

$$A(t+T) = A(t). \quad (31.2)$$

تعریف ۲۹.۲. برای $T > 0$ ، تابع $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $-T$ تناوبی گفته می‌شود هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر

برقرار باشد

$$F(t+T) = F(t).$$

تابع F تناوبی گفته می‌شود هرگاه برای $T, T > 0$ -تناوبی باشد.

با توجه به تعریف ۲۹.۲، توابع ثابت برای هر $T, T > 0$ -تناوبی هستند.

مثال ۳۰.۲. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x' = a(t)x,$$

که در آن $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته تناوبی است. جواب‌ها با ضابطه زیر معین می‌شوند

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)x(t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

برای مثال، وقتی $a(t) = 1$ ، داریم $x(t) = e^{t-t_0}x(t_0)$ ، و تنها جواب تناوبی تابع برابر با صفر است.

از طرف دیگر، وقتی $a(t) = \cos t$ ، داریم

$$x(t) = e^{\sin t - \sin t_0}x(t_0),$$

و برای $x(t_0) \neq 0$ جواب یک تابع 2π -تناوبی غیرثابت است.

حال جواب‌های اساسی معادلات خطی با ضرایب تناوبی را شرح می‌دهیم. همچنان مجموعه ماتریس‌های

$n \times n$ را با M_n نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۱.۲. (فلوکه)^۱. اگر $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابعی پیوسته T -تناوبی باشد، آنگاه هر جواب اساسی از معادله

(۳۰.۲) به صورت زیر است

$$X(t) = P(t)e^{Bt}, \quad (32.2)$$

که B و $P(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، ماتریس‌های $n \times n$ هستند و

$$P(t+T) = P(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (33.2)$$

¹Floquet

برهان. از رابطه (۴.۲) نتیجه می‌شود که اگر $X(t)$ جواب اساسی معادله (۳۰.۲) باشد، آنگاه برای $t \in \mathbb{R}$ می‌توان نوشت

$$X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T). \quad (۳۴.۲)$$

از این رو، $Y(t) = X(t+T)$ نیز جواب اساسی معادله (۳۰.۲) است، در نتیجه طبق قضیه ۹.۲ ماتریسی $n \times n$ معکوس‌پذیر مانند C موجود است به طوری که برای $t \in \mathbb{R}$

$$X(t+T) = X(t)C. \quad (۳۵.۲)$$

از طرف دیگر، از آنجایی که C معکوس‌پذیر است، ماتریس $n \times n$ مانند B موجود است به طوری که $e^{BT} = C$. می‌توان آن را به صورت زیر به دست آورد. فرض کنید S یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر باشد به طوری که $S^{-1}CS$ صورت متعارف جردن (۱۲.۲) را داشته باشد. برای هر ماتریس $R_j = \lambda_j Id + N_j$ ، با $\lambda_j \neq 0$ (چون C معکوس‌پذیر است) و N_j ماتریسی $n_j \times n_j$ مانند (۱۵.۲)، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \log R_j &= \log\left[\lambda_j \left(Id + \frac{N_j}{\lambda_j}\right)\right] \\ &= (\log \lambda_j) Id + \sum_{m=1}^{n_j-1} \frac{(-1)^{m+1} N_j^m}{m \lambda_j^m}, \end{aligned}$$

که $\log \lambda_j$ از شاخه لگاریتم مختلط به دست آمده است. می‌توان نشان داد که برای هر j ، $e^{\log R_j} = R_j$. (برای مثال [۱۶] را ببینید). این نتیجه می‌دهد که ماتریس

$$B = \frac{1}{T} S \begin{pmatrix} \log R_1 & 0 \\ 0 & \log R_k \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (۳۶.۲)$$

در $e^{Bt} = C$ صدق می‌کند. اکنون ماتریس $n \times n$ زیر را برای $t \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم

$$P(t) = X(t)e^{-Bt}.$$

از رابطه (۳۵.۲) (تمرین ۳.۲ را نیز ببینید) نتیجه می‌شود که رابطه زیر برقرار است

$$\begin{aligned} P(t+T) &= X(t+T)e^{-B(t+T)} \\ &= X(t)e^{BT}e^{-B(t+T)} \\ &= X(t)e^{-Bt} = P(t). \end{aligned}$$

این اثبات قضیه را کامل می‌کند. \square

توجه می‌کنیم که ماتریس B در (۳۲.۲) هیچ وقت یکتا نیست. واضح است که اگر $e^{BT} = C$ ، آنگاه برای هر $m \in \mathbb{Z}$ رابطه زیر را داریم

$$\exp[(B + m(2\pi i/T)Id)T] = C.$$

همچنین مشاهده می‌کنیم که ماتریس $P(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ معکوس پذیر است، چون با توجه به قضیه ۷.۲ همه ماتریس‌های $X(t)$ معکوس پذیر هستند.

ما همچنان تابع پیوسته $A(t)$ را $-T$ -تناوبی در نظر می‌گیریم و مفاهیم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳۲.۲. برای جواب اساسی $X(t)$ از معادله (۳۰.۲):

(الف) یک ماتریس معکوس پذیر $C \in M_n$ به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $X(t+T) = X(t)C$ برقرار

باشد، ماتریس مداری معادله (۳۰.۲) نامیده می‌شود.

(ب) مقادیر ویژه ماتریس مداری C مضارب مشخصه معادله (۳۰.۲) نامیده می‌شوند.

(ج) عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ به طوری که $e^{\lambda T}$ مضرب مشخصه است، نمای مشخصه معادله (۳۰.۲) نامیده می‌شود.

در واقع، هر دوی مضارب مشخصه و نماهای مشخصه مستقل از ماتریس مداری هستند که برای تعریف آنها

استفاده شده است. این یک نتیجه فوری از قضیه زیر است.

قضیه ۳۳.۲. فرض کنید $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابعی پیوسته T -تناوبی باشد. اگر $X(t)$ و $Y(t)$ جواب‌های اساسی معادله (۳۰.۲) برای ماتریس‌های مداری به ترتیب C و D باشند، آنگاه ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر C وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار است

$$S^{-1}CS = D. \quad (37.2)$$

برهان. ماتریس‌های مداری C و D برای هر $t \in \mathbb{R}$ در روابط زیر صدق می‌کنند

$$X(t+T) = X(t)C \quad \text{و} \quad Y(t+T) = Y(t)D. \quad (38.2)$$

از طرف دیگر، از (۳۴.۲) نتیجه می‌شود که $X(t+T)$ و $Y(t+T)$ نیز جواب‌های اساسی هستند. از این رو، با توجه به قضیه ۹.۲، ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر S وجود دارد به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است

$$Y(t+T) = X(t+T)S.$$

بنابراین، رابطه زیر را خواهیم داشت

$$Y(t+T) = X(t)CS = Y(t)S^{-1}CS. \quad (39.2)$$

با مقایسه (۳۹.۲) با برابری دوم در (۳۸.۲) رابطه (۳۷.۲) نتیجه می‌شود. \square

اکنون مثال‌هایی از معادلات خطی با ضرایب تناوبی را ارائه می‌دهیم، با حالت خاص ضرایب ثابت شروع می‌کنیم.

مثال ۳۴.۲. وقتی یک ماتریس $A \in M_n$ وجود داشته باشد به طوری که $A(t) = A$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، می‌توان ثابت $T > 0$ در رابطه (۳۱.۲) را اختیار کرد. از قضیه فلوکه (قضیه ۳۱.۲) نتیجه می‌شود که ماتریس‌های B و

$P(t)$ وجود دارند به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر را داریم

$$e^{At} = P(t)e^{Bt}. \quad (40.2)$$

از آنجایی که At و AT جابجا می‌شوند، رابطه زیر را داریم

$$e^{A(t+T)} = e^{At} \cdot e^{AT}$$

(تمرین ۳۰.۲ را ببینید)، و از این رو $C = e^{AT}$ ماتریس مداری معادله (۳۰.۲) است. حال فرض کنید S ماتریس

$n \times n$ معکوس پذیر باشد به طوری که $S^{-1}AS$ صورت متعارف جردن (۱۲.۲) را دارد. با توجه به (۳۶.۲)،

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{T} S \log(S^{-1} e^{AT} S) S^{-1} \\ &= \frac{1}{T} S \log e^{(S^{-1}AS)T} S^{-1} \\ &= \frac{1}{T} S \begin{pmatrix} \log e^{R_1 T} & 0 \\ 0 & \log e^{R_k T} \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= \frac{1}{T} S \begin{pmatrix} R_1 T & 0 \\ 0 & R_k T \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_k \end{pmatrix} S^{-1} = A, \end{aligned}$$

و از (۴۰.۲) نتیجه می‌شود که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $P(t) = Id$ برقرار است.

برای مثال، با اختیار $T = 1$ ، معادله $x' = Ax$ ، دارای ماتریس مداری $C = e^A$ است. از این رو، مضارب

مشخصه، اعداد $e^{\lambda_i} \in \mathbb{C}$ هستند که $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A هستند، و با تفاوت یک مضرب صحیح از

$2\pi i$ ، نماهای مشخصه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هستند.

مثال ۳۵.۲. معادله خطی با ضرایب -2π تناوبی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 + \sin t \\ 0 & -\cos t / (2 + \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

به آسانی می‌توان نشان داد که جواب‌ها به صورت زیر معین می‌شوند

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c + de^t \\ c / (2 + \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^t \\ 1 / (2 + \sin t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

که $c, d \in \mathbb{R}$ هستند. از این رو، جواب اساسی به صورت زیر است

$$X(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^t \\ 1/(2 + \sin t) & 0 \end{pmatrix},$$

که ماتریس مداری زیر را نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} C &= X(0)^{-1}X(2\pi) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & e^{2\pi} \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین، مضارب مشخصه 1 و $e^{2\pi}$ هستند.

نتیجه زیر نشان می‌دهد که نماهای مشخصه رفتار مجانبی جواب‌های معادله خطی با ضرایب تناوبی را

مشخص می‌کنند.

قضیه ۳۶.۲. فرض کنید $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابع پیوسته $-T$ تناوبی باشد. در این صورت، λ نمای مشخصه معادله

(۳۰.۲) است اگر و تنها اگر به ازای تابع $-T$ تناوبی ناصفر p ، تابع $e^{\lambda t}p(t)$ جوابی از معادله (۳۰.۲) باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که $e^{\lambda t}p(t)$ برای تابع $-T$ تناوبی ناصفر p جوابی از معادله (۳۰.۲) باشد. از قضیه

فلوکه (قضیه ۳۱.۲) نتیجه می‌شود که $x_0 \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که برای $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است

$$e^{\lambda t}p(t) = P(t)e^{Bt}x_0.$$

به علاوه، از (۳۳.۲) رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$e^{\lambda(t+T)}p(t) = P(t)e^{B(t+T)}x_0,$$

یعنی

$$e^{\lambda t}P(t)e^{Bt}x_0 = P(t)e^{Bt}e^{BT}x_0.$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$P(t)e^{Bt}(e^{BT} - e^{\lambda T} Id)x_0 = 0.$$

از آنجایی که $P(t)e^{Bt}$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ معکوس پذیر است، عدد $e^{\lambda T}$ یک مقدار ویژه ماتریس مداری e^{BT} است، و λ نمای مشخصه است.

اکنون فرض می‌کنیم که λ نمای مشخصه باشد. در این صورت $e^{\lambda T}$ مقدار ویژه e^{BT} است. از قضیه ۱۷.۲ و ۱۸.۲ فوراً نتیجه می‌شود که اگر μ مقدار ویژه B باشد، آنگاه $e^{\mu T}$ مقدار ویژه e^{BT} با تعداد تکرار یکسان است. این نتیجه می‌دهد که با تفاوت یک مضرب $2\pi i$ ، عدد λ مقدار ویژه B است. از این رو، $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ طوری وجود دارد که $Bx_0 = \lambda x_0$ است، و برای $t \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت

$$e^{Bt}x_0 = e^{\lambda t}x_0.$$

با ضرب $P(t)$ ، جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$P(t)e^{Bt}x_0 = e^{\lambda t}P(t)x_0 = e^{\lambda t}p(t),$$

که $p(t) = P(t)x_0$ است. واضح است که تابع p صفر نمی‌شود، و از رابطه (۲۲.۲) نتیجه می‌شود که

$$p(t+T) = P(t+T)x_0 = P(t)x_0 = p(t).$$

این اثبات قضیه را تکمیل می‌کند. \square

مثال زیر نشان می‌دهد که به‌طور کلی مقادیر ویژه ماتریس‌های $A(t)$ رفتار مجانبی جواب‌ها را مشخص نمی‌کنند.

مثال ۳۷.۲. (مارکوس-یامابه).^۱ معادله $x' = A(t)x$ در \mathbb{R}^2 با

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 + 3 \cos^2 t & 2 - 3 \sin t \cos t \\ -2 - 3 \sin t \cos t & -2 + 3 \sin^2 t \end{pmatrix}$$

^۱Markus-Yamabe

را در نظر بگیرید. به آسانی می‌توان نشان داد که مقادیر ویژه ماتریس $A(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ به صورت $(-1 \pm i\sqrt{7})/4$ هستند. به ویژه، آنها قسمت حقیقی منفی دارند. از طرف دیگر، جواب اساسی آن به صورت زیر است

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{t/2} & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}, \quad (41.2)$$

و بنابراین جواب‌هایی وجود دارند که به طور نمایی رشد می‌کنند. به هر حال، توسط قضیه ۳۶.۲، از رابطه (41.2) نتیجه می‌شود که نماهای مشخصه $1/2$ و -1 هستند.

قضیه ۳۶.۲ همچنین اجازه می‌دهد که معیاری برای وجود جواب‌های T -تناوبی پیدا کنیم.

قضیه ۳۸.۲. فرض کنید $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابع پیوسته T -تناوبی باشد. اگر 1 مضرب مشخصه معادله (۳۰.۲) باشد، آنگاه جواب T -تناوبی ناصفر وجود دارد.

برهان. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ یک نمای مشخصه باشد به طوری که $e^{\lambda T} = 1$. با توجه به قضیه ۳۶.۲، تابع T -تناوبی ناصفر p وجود دارد به طوری که $x(t) = e^{\lambda t} p(t)$ جوابی از (۳۰.۲) است. برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ، داریم

$$x(t+T) = e^{\lambda(t+T)} p(t+T) = e^{\lambda T} e^{\lambda t} p(t) = x(t),$$

و تابع x ، T -تناوبی است. \square

حال توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان اطلاعاتی درباره مضارب مشخصه و نماهای مشخصه بدون حل کردن صریح معادله به دست آورد.

قضیه ۳۹.۲. فرض کنید $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابع پیوسته T -تناوبی باشد. اگر مضارب مشخصه معادله (۳۰.۲)، $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ برای $j = 1, \dots, n$ باشند، آنگاه

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \exp \int_0^T \text{tr} A(s) ds, \quad (42.2)$$

و

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \pmod{2\pi i/T}. \quad (۴۳.۲)$$

برهان. فرض کنید $X(t)$ جواب اساسی معادله (۳۰.۲) با ماتریس مداری C باشد. از رابطه (۳۵.۲) و فرمول

لیوویل (قضیه ۱۰.۲) نتیجه می‌شود که

$$\det C = \frac{\det X(t+T)}{\det X(t)} = \exp \int_t^{t+T} \operatorname{tr} A(s) ds = \exp \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds, \quad (۴۴.۲)$$

که تساوی آخر، نتیجه تناوبی A است. از آنجایی که مضارب مشخصه مقادیر ویژه C هستند، برابری (۴۲.۲) فوراً

از (۴۴.۲) نتیجه می‌شود. برای تساوی (۴۳.۲)، ابتدا متذکر می‌شویم که

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j T} = \exp\left(T \sum_{j=1}^n \lambda_j\right).$$

از این رو، از (۴۲.۲) نتیجه می‌شود که

$$\exp\left(T \sum_{j=1}^n \lambda_j\right) = \exp \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds.$$

□

بنابراین نتیجه مطلوب برقرار است.

مثال ۴۰.۲. فرض کنید $A(t)$ تابع پیوسته T -تناوبی باشد. وجود جواب‌های بیکران برحسب علامت

$$s = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

را بررسی می‌کنیم. اگر $s > 0$ ، آنگاه زای وجود دارد به طوری که $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ و از قضیه ۳۶.۲ نتیجه می‌شود که

جواب بیکران در \mathbb{R}^+ وجود دارد. از طرف دیگر، اگر $s < 0$ ، آنگاه زای وجود دارد به طوری که $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ، و از

قضیه ۳۶.۲ نتیجه می‌شود که جواب بیکران در \mathbb{R}^- وجود دارد.

مثال ۴۱.۲. معادله خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x + (\cos^2 t)y. \end{cases} \quad (۴۵.۲)$$

متذکر می‌شویم که ماتریس

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos^2 t \end{pmatrix},$$

$-\pi$ تناوبی است. از آنجایی که

$$\int_0^\pi \operatorname{tr} A(s) ds = \int_0^\pi (1 + \cos^2 s) ds > 0,$$

از (۴۳.۲) نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \cos^2 s) ds > 0,$$

که λ_1 و λ_2 نماهای مشخصه هستند. از این رو، بنا به مثال ۴۰.۲، جوابی از معادله (۴۵.۲) وجود دارد که در \mathbb{R}^+ بیکران است.

مثال ۴۲.۲. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x'' + p(t)x = 0,$$

که $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته T -تناوبی است. با فرض اینکه $x' = y$ ، معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (46.2)$$

متذکر می‌شویم که ماتریس

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix},$$

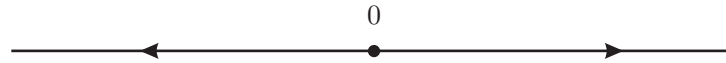
T -تناوبی است. از آنجایی که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $\operatorname{tr} A(t) = 0$ برقرار است، از قضیه ۳۹.۲ نتیجه می‌شود که

$$\rho_1 \rho_2 = \exp \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds = 1,$$

که در آن ρ_1 و ρ_2 مضارب مشخصه هستند. با اختیار $\lambda \in \mathbb{C}$ به طوری که $e^{\lambda T} = \rho_1$ و $e^{-\lambda T} = \rho_2$ ، از قضیه

۳۶.۲ نتیجه می‌شود که جواب‌های $e^{\lambda t} p_1(t)$ و $e^{-\lambda t} p_2(t)$ از معادله (۴۶.۲) وجود دارند، که p_1 و p_2 توابع

T -تناوبی غیرصفر هستند.



شکل ۱۵.۲: تصویر فاز معادلات در (۴۷.۲).

۵.۲ مزدوج‌ها بین معادلات خطی

در این بخش توضیح می‌دهیم که چطور جواب‌های دو معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را با هم مقایسه کنیم. برای این منظور، ابتدا به معرفی مفهوم مزدوج می‌پردازیم.

۱۵.۲. مفهوم مزدوج. ما با یک مثال شروع می‌کنیم تا مسائلی را که به آنها علاقه‌مندیم را نشان دهیم.

مثال ۴۳.۲. معادلات اسکالر زیر را در نظر بگیرید

$$x' = x \quad \text{و} \quad y' = 2y. \quad (۴۷.۲)$$

جواب‌ها به ترتیب به صورت زیر معین می‌شوند

$$x(t) = e^t x(0) \quad \text{و} \quad y(t) = e^{2t} y(0),$$

و بازه ماکسیمال \mathbb{R} را دارند. تصویر فاز هر دو معادله در (۴۷.۲) در شکل ۱۵.۲ نشان داده شده است.

این بدان معناست که از نظر کیفی نمی‌توان دو معادله در (۴۷.۲) را از هم متمایز کرد. با این حال، سرعت در امتداد جواب‌ها در هر دو معادله یکسان نیست. از این رو، همچنین مقایسه جواب‌ها از نظر کمی جالب است. به طور دقیق‌تر، می‌خواهیم تبدیل دوخطی $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنیم که برای هر $t, x \in \mathbb{R}$ رابطه زیر را داشته باشیم

$$h(e^t x) = e^{2t} h(x). \quad (۴۸.۲)$$

تساوی (۴۸.۲) را می‌توان توسط نمودار تعویض‌پذیر شرح داد. یعنی، برای هر $t \in \mathbb{R}$ تبدیلات $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φ_t, ψ_t

را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_t(x) = e^t x \quad \text{و} \quad \psi_t(x) = e^{2t} x.$$

به آسانی می‌توان نشان داد که خانواده تبدیلات φ_t و ψ_t شارها هستند (تعریف ۱۱.۱ را ببینید). تساوی (۴۸.۲)

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h,$$

که متناظر با نمودار تعویض پذیر زیر است

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi_t} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi_t} & \mathbb{R} \end{array}$$

وقتی تساوی (۴۸.۲) برقرار باشد، جواب $x(t) = e^t x(0)$ از معادله نخست در (۴۷.۲) به صورت دوسویی به

جواب $y(t) = e^{2t} h(x(0))$ از معادله دوم تبدیل می‌شود. به ویژه، از آنجایی که تنها نقطه بحرانی معادله نخست

باید به تنها نقطه بحرانی معادله دوم تبدیل شود (یا h به طور دوسویی جواب‌ها را به جواب‌ها تبدیل نخواهد کرد)

باید داشته باشیم $h(0) = 0$.

با فرض اینکه h دیفرانسیل پذیر است، می‌توان با مشتق‌گیری از (۴۸.۲) نسبت به t رابطه زیر را به دست آورد

$$h'(e^t x) e^t x = 2e^{2t} h(x).$$

با اختیار $t = 0$ رابطه زیر را برای $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ به دست می‌آوریم

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{2}{x},$$

(متذکر می‌شویم که برای $x \neq 0$ رابطه $h(x) \neq 0$ برقرار است، زیرا $h(0) = 0$ و h دوسویی است). با

انتگرال‌گیری از طرفین، به دست می‌آوریم

$$\log |h(x)| = \log(x^2) + c,$$

که در آن c ثابت حقیقی است. این همان

$$h(x) = ax^2,$$

است که در آن $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ با $x > 0$ یا $x < 0$. برای اینکه h دوسویی باشد h را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{اگر } x > 0, \\ 0 & \text{اگر } x = 0, \\ bx^2 & \text{اگر } x < 0, \end{cases} \quad (۴۹.۲)$$

که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ ثابت هستند به طوری که $ab < 0$. به آسانی می‌توان نشان داد که h در \mathbb{R} با $h'(0) = 0$ دیفرانسیل پذیر است. به هر حال، معکوس h در مبدأ، دیفرانسیل پذیر نیست.

اکنون معادلات خطی دلخواه را در نظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر، به شیوه‌ای مشابه با آنچه در مثال ۴۳.۲ آمده است، معادلات خطی زیر را در \mathbb{R}^n در نظر می‌گیریم

$$x' = Ax \quad \text{و} \quad y' = By, \quad (۵۰.۲)$$

که در آن A و B ماتریس‌های $n \times n$ هستند. جواب‌ها به ترتیب به صورت زیر هستند

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad \text{و} \quad y(t) = e^{Bt}y(0),$$

و بازهٔ ماکسیمال \mathbb{R} را دارند.

تعریف ۴۴.۲. جواب‌های معادلات (۵۰.۲) گفته می‌شوند:

(الف) مزدوج توپولوژیکی هرگاه یک همسانریخت مانند $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد (یعنی، تابعی

پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا و معکوس آن نیز پیوسته است) به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$ رابطهٔ زیر

برقرار باشد

$$h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x). \quad (۵۱.۲)$$

(ب) مزدوج دیفرانسیلی هرگاه یک دیفیومورفیسم مانند h وجود داشته باشد (یعنی، تبدیلی یک‌به‌یک و پوشا که خود و معکوس آن هر دو مشتق‌پذیر هستند) به طوری که برابری (۵۱.۲) برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$ برقرار باشد.

(ج) مزدوج خطی هرگاه یک تبدیل خطی معکوس‌پذیر مانند h وجود داشته باشد به طوری که برابری (۵۱.۲) برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$ برقرار باشد.

در این صورت، می‌گوییم که h به ترتیب مزدوج توپولوژیکی، دیفرانسیل‌پذیر و خطی بین جواب‌های معادلات (۵۰.۲) است.

به شیوه‌ای مشابه با آنچه که در مثال ۴۳.۲ آمده است، برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، تبدیلات $\varphi_t, \psi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_t(x) = e^{At}x \quad \text{و} \quad \psi_t(x) = e^{Bt}x.$$

در این صورت تساوی (۵۱.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h,$$

که متناظر با نمودار تعویض‌پذیر زیر است

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_t} & \mathbb{R}^n \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi_t} & \mathbb{R}^n \end{array}.$$

واضح است که اگر جواب‌های معادلات در (۵۰.۲) مزدوج خطی باشند، آنگاه آنها مزدوج دیفرانسیلی هستند (چون هر تبدیل خطی معکوس‌پذیر یک دیفیومورفیسم است). و اگر جواب‌ها مزدوج دیفرانسیلی باشند، آنگاه آنها مزدوج توپولوژیکی هستند (چون هر دیفیومورفیسم یک همسانریخت است).

۲.۵.۲. مزدوج‌های خطی. در این بخش روابط بین مفاهیم مختلف مزدوج را شرح می‌دهیم. ابتدا نشان

می‌دهیم که مفاهیم مزدوج خطی و مزدوج دیفرانسیلی برای معادلات (۵۰.۲) معادل هستند.

قضیه ۴۵.۲. جواب‌های معادلات (۵۰.۲) مزدوج دیفرانسیلی هستند اگر و تنها اگر مزدوج خطی باشند.

برهان. همان‌طور که قبلاً مشاهده کردیم، اگر جواب‌ها مزدوج خطی باشند، آنگاه آنها مزدوج دیفرانسیلی هستند.

اکنون فرض کنید $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ مزدوج دیفرانسیلی باشد. با مشتق‌گیری از تساوی (۵۱.۲) نسبت به x ،

رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$d_{e^{At}x} h e^{At} = e^{Bt} d_x h,$$

که $d_x h$ ماتریس ژاکوبین h در نقطه x است. با اختیار $x = 0$ تساوی زیر نتیجه می‌شود

$$C e^{At} = e^{Bt} C, \quad (52.2)$$

که $C = d_x h$. متذکر می‌شویم که C یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر است. واضح است که با مشتق‌گیری از

تساوی $h^{-1}(h(x)) = x$ ، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$d_{h(0)} h^{-1} C = Id,$$

که نشان می‌دهد که ماتریس C معکوس‌پذیر است. برای تبدیل خطی معکوس‌پذیر $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ با ضابطه

$g(x) = Cx$ ، از (۵۲.۲) نتیجه می‌شود که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار است

$$g(e^{At}x) = e^{Bt}g(x).$$

□ به عبارت دیگر، g مزدوج خطی است.

با توجه به قضیه ۴۵.۲، در آنچه به مطالعه مزدوج‌ها برای معادلات خطی مربوط می‌شود، کافی است مزدوج‌های

خطی و مزدوج‌های توپولوژیکی را در نظر بگیریم.

مثال ۴۶.۲. (ادامه مثال ۴۳.۲). قبلاً نشان دادیم که تبدیلات دیفرانسیل‌پذیر پوشا $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که مزدوج‌های

توپولوژیکی بین جواب‌های معادلات (۴۷.۲) هستند، شکل (۴۹.۲) با $ab < 0$ را اختیار می‌کنند. از آنجایی که

هیچ یک از این توابع خطی نیستند، هیچ مزدوج خطی وجود ندارد و از قضیه ۴۵.۲ نتیجه می‌شود که هیچ مزدوج دیفرانسیلی نیز وجود ندارد. واضح است که همان‌گونه که قبلاً در مثال ۴۳.۲ نشان دادیم، معکوس تابع h در (۴۹.۲) دیفرانسیل‌پذیر نیست.

حال یک معیار برای وجود مزدوج خطی برحسب ماتریس‌های A و B در (۵۰.۲) بیان می‌کنیم.

قضیه ۴۷.۲. جواب‌های معادلات (۵۰.۲) مزدوج خطی هستند اگر و تنها اگر ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر C وجود داشته به طوری که رابطه زیر برقرار باشد

$$A = C^{-1}BC. \quad (53.2)$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که جواب‌ها مزدوج خطی هستند، یعنی، تساوی (۵۱.۲) برای تبدیل خطی معکوس‌پذیر $h(x) = Cx$ برقرار است، که از این رو C ماتریس معکوس‌پذیر است. در این صورت، تساوی (۵۲.۲) برقرار است و با مشتق‌گیری نسبت به t رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$CAe^{At} = Be^{Bt}C.$$

سرانجام، با اختیار $t = 0$ رابطه $CA = BC$ نتیجه می‌شود، و تساوی (۵۳.۲) برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم که ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر C همانند (۵۳.۲) وجود دارد. در این صورت

$$x' = Ax \Leftrightarrow x' = C^{-1}BCx \Leftrightarrow (Cx)' = B(Cx).$$

با حل کردن معادله‌های اول و سوم، برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ، رابطه‌های زیر را به دست می‌آوریم

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad \text{و} \quad Cx(t) = e^{Bt}Cx(0).$$

بنابراین

$$Ce^{At}x(0) = e^{Bt}Cx(0),$$

و از آنجایی که بردار $x(0)$ دلخواه است رابطه (۵۲.۲) را به دست می آوریم. از این رو، تساوی (۵۱.۲) برای تبدیل خطی معکوس پذیر $h(x) = Cx$ برقرار است. □

از قضیه ۴۷.۲ نتیجه می شود که جواب های معادلات (۵۰.۲) مزدوج خطی هستند اگر و تنها اگر A و B صورت متعارف جردن یکسان داشته باشند.

۳.۵.۲. مزدوج های توپولوژیکی. در این بخش مفهوم مزدوج توپولوژیکی را در نظر می گیریم. از آنجایی که آن به اندازه مفاهیم مزدوج دیفرانسیل پذیر و مزدوج خطی دقیق نیست، معادلات کمتری را طبقه بندی می کند. به عبارت دیگر، کلاس های هم ارزی به دست آمده از مفهوم مزدوج توپولوژیکی عناصر بیشتری دارند. به هر حال، به همین دلیل، به ما امکان می دهد معادلات خطی را که در غیر این صورت قابل مقایسه نیستند، مقایسه کنیم. برای مثال، می توان مزدوج های توپولوژیکی را بین جواب های معادلاتی به دست آورد که ماتریس های A و B فرم های متعارف جردن متفاوتی دارند، برخلاف آنچه در قضیه ۴۷.۲ با مفهوم مزدوج خطی اتفاق می افتد. مطالعه دقیق مزدوج های توپولوژیکی خارج از محدوده کتاب است، و فقط یک دسته خاصی از ماتریس ها را در نظر می گیریم. **تعریف ۴۸.۲.** ماتریس مربعی A هذلولوی گفته می شود هرگاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه آن ناصفر باشند.

یادآوری می کنیم که مقادیر ویژه یک ماتریس به طور پیوسته با درایه های تغییر می کنند (برای اثبات بر پایه قضیه روشه، برای مثال، مرجع [۵] را ببینید). از این رو، ماتریس به دست آمده از یک اختلال به اندازه کافی کوچک (از درایه های) یک ماتریس هذلولوی باز هم هذلولوی است.

تعریف ۴۹.۲. برای ماتریس مربعی A ، تعداد مقادیر ویژه A که قسمت حقیقی آن مثبت هستند، با احتساب تکرار، را با $m(A)$ نشان می دهند.

حال معیار وجود مزدوج های توپولوژیکی بین معادلات با ماتریس های هذلولوی را ثابت می کنیم.

قضیه ۵۰.۲. فرض کنید A و B ماتریس های $n \times n$ هذلولوی باشند. اگر

$$m(A) = m(B), \quad (54.2)$$

آنگاه جواب‌های معادله‌های (۵۰.۲) مزدوج توپولوژیکی هستند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که $m(A) = 0$. در ادامه توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان از این مورد خاص نتیجه گرفت. مزدوج‌های توپولوژیکی صریح را به صورت زیر می‌سازیم.

مرحله نخست. ساخت یک تابع کمکی. تابع $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$q(x) = \int_0^{\infty} \|e^{At}x\|^2 dt,$$

که $\|\cdot\|$ نُرم در \mathbb{R}^n است که به صورت زیر معین می‌شود

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

از آنجایی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه A منفی هستند، با توجه به قضیه ۲۷.۲ ثابت‌های $c, \mu > 0$ وجود دارند

به طوری که برای هر $t \geq 0$ رابطه $\|e^{At}\| \leq ce^{-\mu t}$ برقرار است. این ایجاب می‌کند که

$$\int_0^{\infty} \|e^{At}x\|^2 dt \leq \int_0^{\infty} c^2 e^{-2\mu t} \|x\|^2 dt < +\infty,$$

و از این رو، تابع q خوش تعریف است. با نشان دادن ترانهاده ماتریس B با B^* ، مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} q(x) &= \int_0^{\infty} (e^{At}x)^* e^{At}x dt \\ &= \int_0^{\infty} x^* (e^{At})^* e^{At}x dt = x^* Cx, \end{aligned} \quad (55.2)$$

که در آن

$$C = \int_0^{\infty} (e^{At})^* e^{At} dt,$$

یک ماتریس $n \times n$ است. این نشان می‌دهد که q یک چندجمله‌ای از درجه ۲ در \mathbb{R}^n بدون جملات درجه ۰ یا

۱ است. به ویژه، برای $x \neq 0$ داریم

$$q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{q(x)}{\|x\|^2}. \quad (56.2)$$

ازاین‌رو، با اختیار

$$\alpha = \min\{q(x) : \|x\| = 1\} \text{ و } \beta = \max\{q(x) : \|x\| = 1\},$$

از (۵۶.۲) نتیجه می‌شود که

$$\alpha\|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta\|x\|^2. \quad (۵۷.۲)$$

مرحله دوم. ساخت مزدوج. فرض کنید $x \neq 0$. توجه داریم که

$$\|e^{As}x\| \rightarrow 0 \text{ وقتی } s \rightarrow +\infty$$

و

$$\|e^{As}x\| \rightarrow +\infty \text{ وقتی } s \rightarrow -\infty. \quad (۵۸.۲)$$

خاصیت نخست بلافاصله از قضیه ۲۷.۲ نتیجه می‌شود. برای خاصیت دوم، توجه داریم که ماتریس e^{As} غیرتکین است (تمرین ۳.۲ را ببینید)، و ازاین‌رو، برای $x \neq 0$ رابطه $e^{As}x \neq 0$ برقرار است. اکنون فضاهای ریشه A را برای هر مقدار ویژه λ از A به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda Id)^k x = 0 \text{ برای } k \in \mathbb{N}\}.$$

یادآوری می‌کنیم که $\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda F_\lambda$ ، که جمع مستقیم روی همه مقادیر ویژه A بدون در نظر گرفتن تکرارها است. ازاین‌رو

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_\lambda (\mathbb{R}^n \cap F_\lambda).$$

به‌ویژه، برای $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ، حداقل یک مقدار ویژه λ از A وجود دارد به‌طوری‌که مؤلفه x در $\mathbb{R}^n \cap F_\lambda$ ناصفر است. ازاین‌رو، با توجه به (۱۶.۲)، برای اثبات خاصیت (۵۸.۲) کافی است نشان دهیم که تمام درایه‌های ناصفر ماتریس

$$e^{Bt} = e^{\lambda t} \left(Id + tN + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} N^{m-1} \right),$$

که در آن $B = \lambda Id + N$ یک بلوک جردن $m \times m$ است، دارای ویژگی یکسانی هستند. برای این منظور، متذکر می‌شویم که اگر قسمت حقیقی λ منفی باشد و $p(t)$ یک چندجمله‌ای ناصفر باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$|e^{\lambda p(t)}| \rightarrow +\infty \quad \text{وقتی} \quad t \rightarrow -\infty.$$

به اثبات قضیه ادامه می‌دهیم. از (۵۷.۲) نتیجه می‌شود که تصویر توابع $q(e^{As}x)$ ، $s \mapsto q(e^{As}x)$ است.

از طرف دیگر، داریم

$$q(e^{As}x) = \int_0^\infty \|e^{A(t+s)}x\|^2 dt = \int_s^\infty \|e^{At}x\|^2 dt, \quad (59.2)$$

و از این رو، تابع $q(e^{As}x)$ اکیداً نزولی است. به ویژه، یک $t_x \in \mathbb{R}$ یکتا وجود دارد به طوری که

$$q(e^{At_x}x) = 1. \quad \text{اکنون تابع } h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-Bt_x} e^{At_x} x / \bar{q}(e^{At_x}x)^{1/2} & \text{اگر } x \neq 0, \\ 0 & \text{اگر } x = 0, \end{cases} \quad (60.2)$$

که

$$\bar{q}(x) = \int_0^\infty \|e^{Bt}x\|^2 dt. \quad (61.2)$$

از آنجایی که

$$q(e^{A(t_x-t)}e^{At}x) = q(e^{At_x}x) = 1,$$

داریم $t_{e^{At}x} = t_x - t$ از این رو

$$\begin{aligned} h(e^{At}x) &= \frac{e^{-B(t_x-t)} e^{A(t_x-t)} e^{At}x}{\bar{q}(e^{A(t_x-t)}e^{At}x)^{1/2}} \\ &= \frac{e^{Bt} e^{-Bt_x} e^{At_x}x}{\bar{q}(e^{At_x}x)^{1/2}} = e^{Bt} h(x), \end{aligned}$$

که تساوی (۵۱.۲) اثبات می‌شود. برای اینکه نشان دهیم h مزدوج توپولوژیکی است، باید بررسی کنیم که h

یکسانریختی است.

مرحله سوم. پیوستگی h . از (۵۹.۲) و قضیه تابع ضمنی نتیجه می‌شود که تابع $t_x \mapsto x$ (غیر از مبدأ) دیفرانسیل پذیر است. از طرف دیگر، با روندی مشابه (۵۹.۲)، می‌توان نشان داد که \bar{q} یک چندجمله‌ای از درجه ۲ در \mathbb{R}^n بدون جمله‌های درجه صفر یا یک است. از این رو، از (۶۰.۲) نتیجه می‌شود که تابع h غیر از مبدأ دیفرانسیل پذیر است. حال نشان می‌دهیم که h در $x = 0$ پیوسته است. با روندی مشابه (۵۶.۲) و با اختیار

$$\bar{\alpha} = \min\{\bar{q}(x) : \|x\| = 1\} \text{ و } \bar{\beta} = \max\{\bar{q}(x) : \|x\| = 1\},$$

رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\bar{\alpha}\|x\|^2 \leq \bar{q}(x) \leq \bar{\beta}\|x\|^2. \quad (۶۲.۲)$$

با توجه به (۶۲.۲)، برای اینکه نشان دهیم که h در مبدأ پیوسته است کافی است ثابت کنیم که وقتی $x \rightarrow 0$ ، رابطه $\bar{q}(h(x)) \rightarrow 0$ برقرار می‌شود. با توجه به (۶۰.۲)، برای $x \neq 0$ رابطه زیر را داریم

$$\bar{q}(h(x)) = \frac{\bar{q}(e^{-Bt_x} e^{At_x} x)}{\bar{q}(e^{At_x} x)}.$$

از طرف دیگر، از (۶۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$\bar{q}(e^{-Bt_x} e^{At_x} x) = \int_0^\infty \|e^{-Bt_x} e^{Bt} e^{At_x} x\|^2 dt \leq \|e^{-Bt_x}\|^2 \bar{q}(e^{At_x} x),$$

و از این رو

$$\bar{q}(h(x)) \leq \|e^{-Bt_x}\|^2. \quad (۶۳.۲)$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که، با توجه به (۵۹.۲) رابطه زیر برقرار است

$$q(e^{At_x} x) = \int_{t_x}^\infty \|e^{At} x\|^2 dt = 1.$$

از این رو، وقتی $x \rightarrow 0$ ، رابطه $t_x \rightarrow -\infty$ برقرار می‌شود. از آنجایی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه B منفی هستند، از (۶۳.۲) نتیجه می‌شود که وقتی $x \rightarrow 0$ ، رابطه $\bar{q}(h(x)) \rightarrow 0$ برقرار می‌شود. این نشان می‌دهد که

h در \mathbb{R}^n پیوسته است.

مرحله چهارم. ساخت معکوس h . تابع $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \begin{cases} e^{-As_x} e^{Bs_x} x / q(e^{Bs_x} x)^{1/2} & \text{اگر } x \neq 0, \\ 0 & \text{اگر } x = 0, \end{cases}$$

که s_x یک عدد حقیقی یکتا است به طوری که

$$\bar{q}(e^{Bs_x} x) = \int_{s_x}^{\infty} \|e^{Bt} x\|^2 dt = 1$$

(به روش مشابه می‌توان نشان داد که برای t_x عدد s_x وجود دارد و یکتا است). داریم

$$\bar{q}(e^{Bt_x} h(x)) = \int_0^{\infty} \frac{\|e^{Bt} e^{Bt_x} e^{-Bt_x} e^{At_x} x\|^2}{\bar{q}(e^{At_x} x)} dt = 1,$$

و یکتایی $s_{h(x)}$ رابطه $s_{h(x)} = t_x$ را ایجاب می‌کند. از این رو، برای $x \neq 0$ رابطه زیر را داریم

$$g(h(x)) = \frac{e^{-At_x} e^{Bt_x} e^{-Bt_x} e^{At_x} x}{q(e^{Bt_x} h(x))^{1/2} \bar{q}(e^{At_x} x)^{1/2}} = \frac{x}{q(e^{Bt_x} h(x))^{1/2} \bar{q}(e^{At_x} x)^{1/2}}.$$

از آنجایی که

$$q(e^{Bt_x} h(x)) = q\left(\frac{e^{At_x} x}{\bar{q}(e^{At_x} x)^{1/2}}\right) = \frac{q(e^{At_x} x)}{\bar{q}(e^{At_x} x)} = \frac{1}{\bar{q}(e^{At_x} x)},$$

برای $x \neq 0$ رابطه $g(h(x)) = x$ را به دست می‌آوریم. همچنین داریم $g(h(0)) = g(0) = 0$ که نشان می‌دهد g معکوس h است. برای اینکه نشان دهیم که g پیوسته است، می‌توان مانند h عمل کرد و به سادگی نقش A و B را با هم عوض کرد. به طور خلاصه، h یک همسانریختی است.

مرحله پنجم. تبدیل به حالت $m(A) = 0$. سرانجام، نحوه تبدیل حالت کلی به حالت ماتریس‌های $m(A) = 0$ را شرح می‌دهیم. با تغییرات مناسب مختصات، همیشه می‌توان فرض کرد که ماتریس‌های A و B به ترتیب به صورت‌های زیر هستند

$$\begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix}, \quad (۶۴.۲)$$

که شاخص‌های $+$ متناظر با مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت و شاخص‌های $-$ متناظر با مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی هستند. از (۵۴.۲) نتیجه می‌شود که ماتریس‌های A_+ و B_+ بُعد یکسان دارند، مثلاً n_+ ، و ماتریس‌های A_- و B_- نیز بُعد یکسان دارند، مثلاً n_- . می‌نویسیم $x = (x_+, x_-)$ با $x_+ \in \mathbb{R}^{n_+}$ و $x_- \in \mathbb{R}^{n_-}$ با توجه به (۶۴.۲)، معادله‌ها در (۵۰.۲) را می‌توان به ترتیب به صورت‌های زیر نوشت

$$\begin{cases} x'_+ = A_+x_+, \\ x'_- = A_-x_- \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x'_+ = B_+x_+, \\ x'_- = B_-x_- \end{cases} \quad (۶۵.۲)$$

با نتیجه $m(A) = 0$ و نتیجه متناظر برای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت، به ترتیب مزدوج‌های توپولوژیکی h_+ و h_- ، بین جواب‌های معادله‌های

$$x'_+ = A_+x_+ \quad \text{و} \quad x'_+ = B_+x_+,$$

و بین جواب‌های معادله‌های زیر وجود دارد

$$x'_- = A_-x_- \quad \text{و} \quad x'_- = B_-x_-.$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که تابع $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تعریف شده با ضابطه

$$h(x_+, x_-) = (h_+(x_+), h_-(x_-)), \quad (۶۶.۲)$$

□ مزدوج توپولوژیکی بین جواب‌های معادله‌های (۶۵.۲) است.

در زیر کاربردی از قضیه ۵۰.۲ آمده است.

مثال ۵۱.۲. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

معادلات خطی متناظر $x' = A_i x$ در \mathbb{R}^2 دارای تصاویر فازی هستند که در شکل ۱۶.۲ نشان داده شده است. به آسانی می‌توان بررسی کرد که چهار ماتریس A_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ با $m(A_i)$ ، به ترتیب مساوی $0, 0, 0$ و 1 ،

هذلولوی هستند. از این رو، از قضیه ۵۰.۲ نتیجه می‌شود که جواب‌های سه معادله نخست مزدوج توپولوژیکی هستند و آنها با جواب‌های معادله آخر مزدوج توپولوژیکی نیستند. از طرف دیگر، از آنجایی که چهار ماتریس صورت‌های متعارف جردن مختلفی دارند، از قضیه ۴۵.۲ و ۴۷.۲ نتیجه می‌شود که جواب‌های این معادله‌ها نه مزدوج توپولوژیکی و نه مزدوج خطی هستند.

از اثبات قضیه ۵۰.۲ می‌توان برای ساختن صریح مزدوج‌های توپولوژیکی استفاده کرد. ساخت آن را به طور خلاصه شرح می‌دهیم. برای هر $x \neq 0$ ، فرض کنید $t_x \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی یکتا باشد به طوری که

$$\int_{t_x}^{\infty} \|e^{At}x\|^2 dt = 1 \quad (۶۷.۲)$$

(در اثبات قضیه نشان داده شده است که t_x خوش‌تعریف است). در این صورت یک مزدوج توپولوژیکی

$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ بین جواب‌های معادله‌های $x' = Ax$ و $y' = By$ با ضابطه (۶۰.۲) داده می‌شود، یعنی

$$h(x) = \begin{cases} e^{-Bt_x} e^{At_x} x / (\int_0^{\infty} \|e^{Bt} e^{At_x} x\|^2 dt)^{1/2} & \text{اگر } x \neq 0, \\ 0 & \text{اگر } x = 0. \end{cases} \quad (۶۸.۲)$$

در زیر یک مثال خاص آمده است.

مثال ۵۲.۲. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

داریم

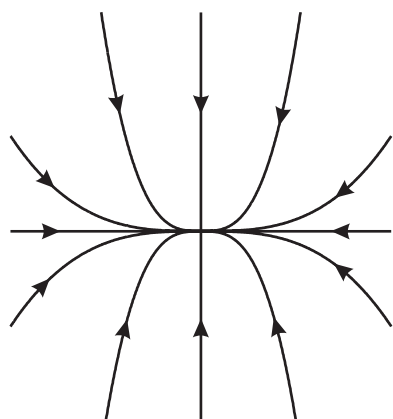
$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \text{ و } e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

با نوشتن $x = (y, z)$ ، به دست می‌آوریم

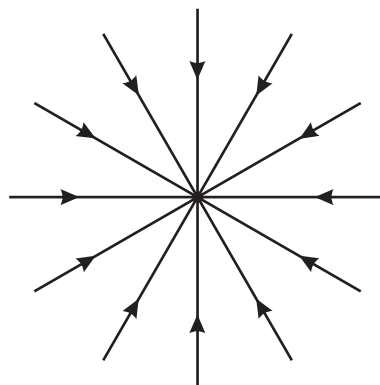
$$\|e^{At}x\|^2 = e^{-2t}(y^2 + z^2),$$

و از (۶۷.۲) نتیجه می‌شود که

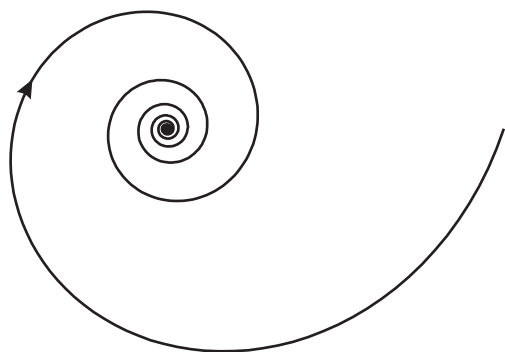
$$\int_{t_x}^{\infty} \|e^{At}x\|^2 dt = \frac{1}{2} e^{-2t_x}(y^2 + z^2) = 1.$$



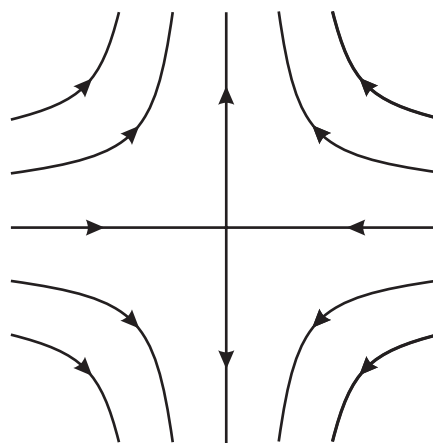
A_1



A_2



A_3



A_4

شکل ۱۶.۲: تصاویر فاز معادله‌ها در مثال ۵۱.۲.

ازاین‌رو

$$t_x = \frac{1}{2} \log \frac{y^2 + z^2}{2},$$

و

$$e^{-Bt_x} e^{At_x} x = \begin{pmatrix} 1 & t_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + \frac{z}{2} \log \frac{y^2 + z^2}{2} \\ z \end{pmatrix}.$$

برای تعیین h ، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|e^{Bt} e^{At_x} x\|^2 dt &= \int_0^\infty \|e^{-t-t_x} \begin{pmatrix} y + tz \\ z \end{pmatrix}\|^2 dt \\ &= e^{-2t_x} \int_0^\infty e^{-2t} (y^2 + 2tyz + t^2 z^2 + z^2) dt \\ &= e^{-2t_x} \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} yz + \frac{3}{4} z^2 \right) \\ &= \frac{1}{y^2 + z^2} (y^2 + yz + \frac{3}{2} z^2). \end{aligned}$$

سرانجام، با توجه به (۶۸.۲)، $h(0, 0) = 0$ و برای $(y, z) \neq (0, 0)$ ، $h(y, z)$ را به صورت زیر اختیار می‌کنیم

$$h(y, z) = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{y^2 + yz + 3z^2/2}} \left(y + \frac{z}{2} \log \frac{y^2 + z^2}{2}, z \right).$$

مسئله وجود مزدوج‌های توپولوژیکی همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، در مورد ماتریس‌های غیرهذلولی

بسیار متفاوت است.

مثال ۵۳.۲. معادله‌های زیر را برای ثابت‌های $a, b > 0$ در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} x' = -ay, \\ y' = ax, \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = -by, \\ y' = bx. \end{cases}$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که آنها تصاویر فاز یکسانی دارند، برای مثال، مبدأ یک نقطه بحرانی است و مدارهای

باقی‌مانده مدارهای تناوبی دایره‌ای هستند که در مبدأ متمرکز شده و در جهت منفی طی می‌شوند. به‌هرحال، وقتی

 $a \neq b$ دوره‌های مدارهای تناوبی در دو معادله متفاوت است. برای مثال، در مختصات قطبی معادله‌ها به ترتیب

به صورت زیر هستند

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = a, \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = b, \end{cases}$$

و از این رو، دوره‌های مدارهای تناوبی به ترتیب $2\pi/a$ و $2\pi/b$ هستند. وقتی $a \neq b$ ، این مانع وجود مزدوج توپولوژیکی بین جواب‌های دو معادله می‌شود، زیرا باید مدارهای تناوبی را به مدارهای تناوبی همان دوره تبدیل کند.

۶.۲ تمرین‌ها

تمرین ۱.۲. برای ماتریس زیر e^{At} را محاسبه کنید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

تمرین ۲.۲. شرایط لازم و کافی برای ماتریس $A \in M_n$ پیدا کنید به طوری که برای معادله $x' = Ax$

(الف) همه جواب‌ها کراندار هستند؛

(ب) برای $t > 0$ همه جواب‌ها کراندار هستند؛

(ج) همه جواب‌ها به مبدأ همگرا می‌شوند.

تمرین ۳.۲. برای ماتریس $A \in M_n$ ، معادله $x' = Ax$ را در نظر بگیرید.

(الف) با استفاده از رابطه (۱۰.۲) نشان دهید که برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $e^{At}e^{-At} = Id$ برقرار است.

راهنمایی: مشتق تابع $t \mapsto e^{At}e^{-At}$ را محاسبه کنید.

(ب) نشان دهید که برای هر $t, s \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است

$$e^{A(t-s)} = e^{At}e^{-As}. \quad (۶۹.۲)$$

راهنمایی: مشتق‌ها را نسبت به t بگیرید.

(ج) از قضیه ۲۵.۲ و برابری (۶۹.۲) برای اثبات دیگری برای قضیه ۲۶.۲ استفاده کنید.

(د) نشان دهید که رابطه $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ برقرار است.

تمرین ۴.۲. برای ماتریس‌های $A, B \in M_n$ ، نشان دهید که اگر

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0,$$

که $[A, B] = BA - AB$ ، آنگاه

$$e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t} e^{[A,B]t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

راهنمایی: نشان دهید که

$$x(t) = e^{-(A+B)t} e^{Bt} e^{At} x_0,$$

برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ جوابی از معادله $x' = t[A, B]x$ است.

تمرین ۵.۲. برای ماتریس $A \in M_n$ ، فرض کنید

$$\cos A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2} \quad \text{و} \quad \sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}.$$

این توابع را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

تمرین ۶.۲. معادله $x' = a(t)x$ را برای یک تابع پیوسته $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

(الف) همه جواب‌های معادله را پیدا کنید.

(ب) تشخیص دهید گزاره زیر درست یا نادرست است: یک جواب T -تناوبی ناصفر وجود دارد اگر و تنها

$$\int_0^T a(s) ds = 0.$$

(ج) تشخیص دهید گزاره زیر درست یا نادرست است: یک جواب غیرکراندار در \mathbb{R}^+ وجود دارد اگر و تنها

$$\text{اگر برای } t > 0 \text{ رابطه } \int_0^t a(s) ds \neq 0 \text{ برقرار باشد.}$$

تمرین ۷.۲. برای معادله (۱.۲)، نشان دهید که اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $\operatorname{tr} A(t) = 0$ برقرار باشد، آنگاه برای

n جواب مستقل خطی x_1, \dots, x_n ، حجم مشخص شده با بردارهای $x_1(t), \dots, x_n(t)$ مستقل از t هستند.

تمرین ۸.۲. برای توابع پیوسته $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، معادله زیر را حل کنید

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ g(t) & f(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

تمرین ۹.۲. فرض کنید $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع پیوسته T -تناوبی باشد. نشان دهید که اگر معادله $x' = a(t)x$

هیچ جواب T -تناوبی به غیر از تابع صفر نداشته باشد، آنگاه معادله $x' = a(t)x + b(t)$ یک جواب T -تناوبی

یکتا دارد.

تمرین ۱۰.۲. نشان دهید که معادله

$$\begin{cases} x' = x \cos^4 t - z \sin(2t), \\ y' = x \sin(4t) + y \sin t - 4z, \\ z' = -x \sin(5t) - z \cos t, \end{cases}$$

حداقل یک جواب غیرکرندار دارد.

تمرین ۱۱.۲. نشان دهید که توابع $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که معادله

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (۷۰.۲)$$

تصویر فاز در شکل ۱۷.۲ را دارد.

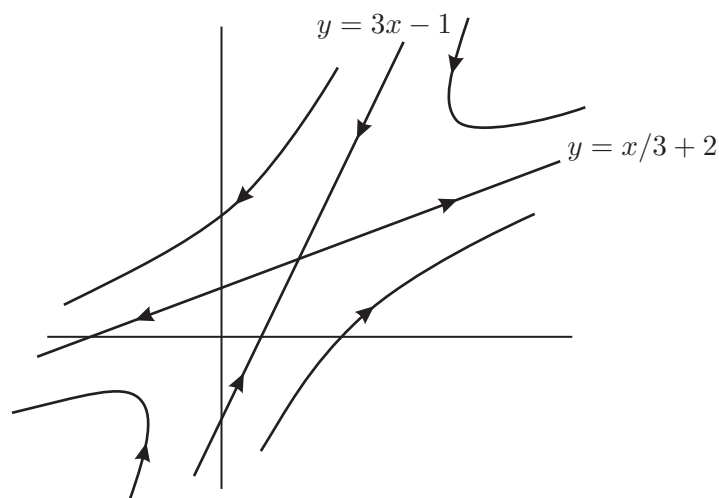
تمرین ۱۲.۲. مزدوج‌های توپولوژیکی بین جواب‌های معادله‌های زیر بسازید

(الف)

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = -4y, \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = 3x, \\ y' = -y; \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -2y, \\ z' = 3z \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = -2y, \\ z' = 2z. \end{cases}$$



شکل ۱۷.۲: تصویر فاز معادله (۷۰.۲).

تمرین ۱۳.۲. فرض کنید $A : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow M_n$ تابعی پیوسته باشد و فرض کنید $x(t)$ جوابی از معادله $x' = A(t)x$ باشد. نشان دهید که

(الف) برای هر $t \geq 0$ رابطه زیر برقرار است

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| \exp \int_0^t \|A(s)\| ds;$$

(ب) اگر $\int_0^\infty \|A(s)\| ds < \infty$ ، آنگاه وقتی $t \rightarrow +\infty$ رابطه $\|x(t)\|$ همگرا می‌شود.

تمرین ۱۴.۲. نشان دهید که اگر $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب جواب‌های معادله‌های

$$x' = A(t)x \quad \text{و} \quad y' = -A(t)^*y,$$

در \mathbb{R}^n باشند، آنگاه $\langle x(t), y(t) \rangle$ مستقل از t است، که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی معمول در \mathbb{R}^n است.

تمرین ۱۵.۲. نشان دهید که اگر $X(t)$ یک جواب اساسی از معادله $x' = A(t)x$ باشد، آنگاه

$$Y(t) = (X(t)^*)^{-1}$$

یک جواب اساسی از معادله $y' = -A(t)^*y$ است.

تمرین ۱۶.۲. نشان دهید که اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $A(t) = -A(t)^*$ ، آنگاه $\|x\|^2$ یک انتگرال معادله $x' = A(t)x$ است.

تمرین ۱۷.۲. ثابت کنید که تابع h در رابطه (۶۶.۲) مزدوج توپولوژیکی است.

تمرین ۱۸.۲. فرض کنید $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 باشد به طوری که برای هر $(t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ رابطه زیر برقرار باشد

$$f(t+T, x, \lambda) = f(t, x, \lambda).$$

با فرض اینکه $x(t)$ یک جواب $-T$ تناوبی از معادله $x' = f(t, x, 0)$ است و اینکه تنها جواب $-T$ تناوبی از معادله تغییرات خطی

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), 0)y,$$

تابع صفر است، نشان دهید که برای $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $\|\lambda\| < \delta$ ، آنگاه یک جواب یکتا $-T$ تناوبی $x_\lambda(t)$ از معادله $x' = f(t, x, \lambda)$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|x_\lambda(t) - x(t)\| < \epsilon \quad \text{برای } t \in \mathbb{R}.$$

جواب‌ها.

۱.۲

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t)/\sqrt{2} & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

۲.۲ (الف) تنها مقادیر ویژه با قسمت حقیقی صفر و بلوک جردن قطری دارد.

(ب) هیچ مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت ندارد و هر مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر بلوک جردن

قطری دارد.

(ج) A تنها مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی دارد.

۵.۲

$$\cos B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sin B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\cos C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sin C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$.x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} x(t_0) \quad \text{۶.۲ (الف)}$$

(ب) نادرست.

(ج) نادرست.

۸.۲

$$x(t) = a \exp \int_0^t (f(s) + g(s)) ds + b \exp \int_0^t (f(s) - g(s)) ds,$$

$$y(t) = a \exp \int_0^t (f(s) + g(s)) ds - b \exp \int_0^t (f(s) - g(s)) ds, \quad \text{ب} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(الف) ۱۲.۲

$$h(x, y) = (\operatorname{sgn} x \cdot |x|^{3/2}, \operatorname{sgn} y \cdot |y|^{1/4}).$$

(ب)

$$h(x, y, z) = (f(x, y), g(z)), \quad \text{که } g(z) = \operatorname{sgn} z \cdot |z|^{2/3} \text{ و}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0), \\ \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+9y^2/8-4xy/8}} \left(x - \frac{y}{4} \log \frac{x^2+y^2}{4}\right), y & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

بخش دوم

پایداری و هذلولوی بودن

فصل ۳

پایداری و توابع لیاپانوف

در این فصل به معرفی مفاهیم پایداری و پایداری مجانبی برای جواب معادله دیفرانسیل عادی می‌پردازیم. به‌ویژه، برای معادلات خطی غیرخودگردان مفاهیم پایداری و پایداری مجانبی را برحسب جواب‌های اساسی مشخص می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که جواب‌های یک اختلال به‌اندازه‌کافی کوچک از یک معادله خطی به‌طور مجانبی پایدار، به‌طور مجانبی پایدار باقی می‌ماند. سرانجام، مقدمه‌ای بر نظریه توابع لیاپانوف ارائه می‌کنیم، که گاهی به فرد اجازه می‌دهد تا پایداری یا ناپایداری یک جواب معین را به شیوه‌ای کم‌وبیش خودکار ایجاد کند. برای موضوعات اضافی خواننده را به مراجع [۲۵، ۲۴، ۲۰] ارجاع می‌دهیم.

۱.۳ مفاهیم پایداری

تابع پیوسته $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ داده شده است، معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x' = f(t, x). \quad (1.3)$$

فرض می‌کنیم که برای هر $(t_0, x_0) \in D$ جواب یکتای $x(t, t_0, x_0)$ از مسئله با مقدار اولیه زیر وجود دارد

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

۱.۱.۳. پایداری. در این بخش به معرفی مفهوم پایداری جواب معادله (۱.۳) می‌پردازیم. در اصل، یک جواب $x(t)$ پایدار است اگر همه جواب‌های به‌اندازه‌کافی نزدیک شرایط اولیه برای همیشه نزدیک به $x(t)$ باقی بمانند. **تعریف ۱.۳.** جواب $x(t, t_0, \bar{x}_0)$ از معادله (۱.۳) را که برای هر $t \geq t_0$ تعریف شده است پایدار می‌گوییم، هرگاه برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که اگر $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$ ، آنگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) جواب $x(t, t_0, x_0)$ برای هر $t > t_0$ تعریف شده باشد:

(ب) رابطه زیر برقرار باشد

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)\| < \epsilon.$$

در غیراین صورت، جواب $x(t, t_0, \bar{x}_0)$ ناپایدار گفته می‌شود.

در زیر مثال‌هایی از پایداری و ناپایداری جواب‌ها آورده شده است.

مثال ۲.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - y. \end{cases} \quad (2.3)$$

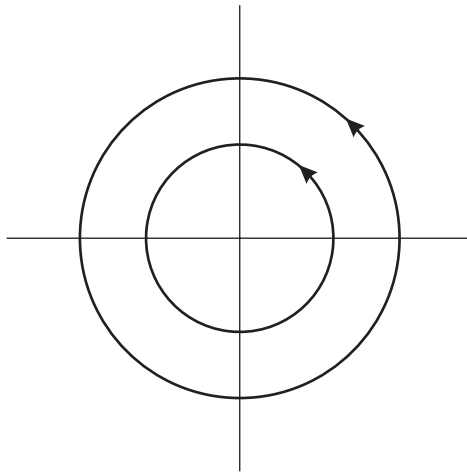
اگر (x, y) یک جواب باشد، آنگاه

$$(x^2 + y^2)' = 2xy + 2y(-x - y) = -2y^2 \leq 0,$$

و از این رو، شرایط در تعریف ۱.۳ برای جواب صفر برقرار هستند (با t_0 دلخواه و $\bar{x}_0 = 0$). این نشان می‌دهد که نقطه بحرانی $(0, 0)$ جوابی پایدار است. از طرف دیگر، توجه داشته باشید که ماتریس ضرایب معادله خطی (۲.۳) دارای مقادیر ویژه $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ است، که قسمت حقیقی هر دو منفی است.

مثال ۳.۳. در مختصات قطبی معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = f(r), \end{cases} \quad (3.3)$$



شکل ۱.۳: تصویر فاز معادله (۳.۳).

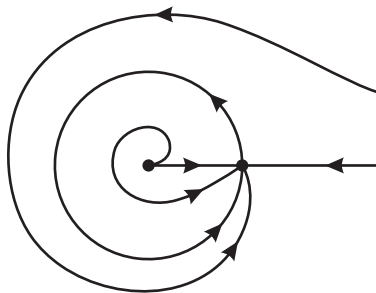
که در آن f تابع مثبت از کلاس C^1 با $f'(r_0) \neq 0$ برای $r_0 > 0$ است. تصویر فاز در شکل ۱.۳ نشان داده شده است: مبدأ یک نقطهٔ بحرانی و مدارهای باقی‌مانده مدارهای تناوبی دایره‌ای هستند که در مبدأ متمرکز شده‌اند. از (۳.۳) نتیجه می‌شود که هر مدار تناوبی دورهٔ تناوب $2\pi/f(r)$ دارد. از آنجایی که $f'(r_0) \neq 0$ ، برای $r \neq r_0$ به اندازهٔ کافی نزدیک به r_0 مدار تناوبی متناظر با سرعت زوایه‌ای $f(r) \neq f(r_0)$ طی می‌شود. این خاصیت زیر را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $x(t)$ و $x_0(t)$ جواب‌های معادله (۳.۳) باشند به طوری که $x(t_0)$ و $x_0(t_0)$ به ترتیب روی دایره‌هایی به شعاع‌های r و r_0 باشند. برای $x(t_0)$ به طور دلخواه نزدیک به $x_0(t_0)$ ، $t > t_0$ وجود دارد به طوری که $x(t)$ و $x_0(t)$ در یک قطر مدارهای تناوبی، اما در دو طرف مبدأ قرار دارند. این نشان می‌دهد که شرط دوم در تعریف ۱.۳ برقرار نیست، و از این رو، جواب $x_0(t)$ ناپایدار است.

۱.۲.۳. پایداری مجانبی. اکنون به معرفی مفهوم پایداری مجانبی جواب می‌پردازیم.

تعریف ۴.۳. جواب $x(t, t_0, \bar{x}_0)$ از معادله (۱.۳) را که برای هر $t \geq t_0$ تعریف شده است به طور مجانبی پایدار

می‌گوییم هرگاه

(الف) $x(t, t_0, \bar{x}_0)$ پایدار باشد؛



شکل ۲.۳: تصویر فاز معادله (۴.۳).

(ب) عدد ثابت $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x - \bar{x}_0\| < \alpha$ ، آنگاه رابطه زیر برقرار باشد

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{وقتی } t \rightarrow +\infty.$$

مثال زیر نشان می‌دهد برای اینکه جوابی به طور مجانبی پایدار باشد کافی نیست که شرط دوم در تعریف ۴.۳

برقرار باشد.

مثال ۵.۳. معادله زیر را در مختصات قطبی در نظر بگیرید

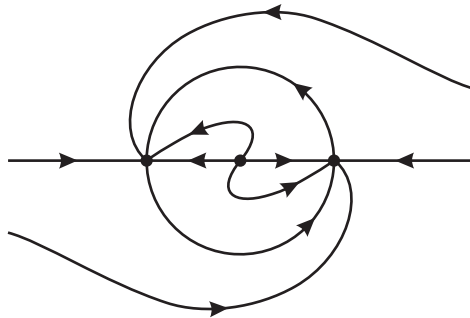
$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \theta' = \sin^2(\theta/2). \end{cases} \quad (۴.۳)$$

تصویر فاز در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. توجه می‌کنیم که نقطه بحرانی $(1, 0)$ جوابی است که شرط دوم در تعریف ۴.۳ را برآورده می‌کند، اما شرط اول را برآورده نمی‌کند (کافی است، برای مثال، جواب را روی دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ در نظر گرفت).

مثال ۶.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} r' = r(r - 1), \\ \theta' = \sin^2(\theta). \end{cases} \quad (۵.۳)$$

تصویر در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. توجه داریم که از آنجایی که سرعت زوایه‌ای θ' به r بستگی ندارد،



شکل ۳.۳: تصویر فاز معادله (۵.۳).

برای هر پرتو L که از مبدأ شروع می‌شود مجموعه

$$L_t = \{x(t, t_0, x_0) : x_0 \in L\},$$

همچنان یک پرتو (شروع از مبدأ) برای هر $t > t_0$ است. این ایجاب می‌کند که همه جواب‌های خارج از خط مستقیم $y = 0$ ناپایدار هستند.

۲.۳ پایداری معادلات خطی

در این بخش حالت خاصی از معادلات خطی به صورت

$$x' = A(t)x, \quad (۶.۳)$$

را در نظر می‌گیریم که $A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ است که به‌طور پیوسته با $t \in \mathbb{R}$ تغییر می‌کند. بعد از مطالعه حالت کلی، حالت‌های خاصی از معادلات با ضرایب ثابت و ضرایب تناوبی را در نظر می‌گیریم.

۱.۲.۳. معادلات خطی غیرخودگردان: حالت کلی. ابتدا نشان می‌دهیم که در مورد مطالعه پایداری معادلات خطی، در نظر گرفتن جواب صفر کافی است.

قضیه ۷.۳. فرض کنید $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابعی پیوسته باشد. برای معادله (۶.۳)، جواب صفر (با زمان اولیه

دلخواه t_0 پایدار (به ترتیب به طور مجانبی پایدار) است اگر و فقط اگر همه جوابها پایدار (به ترتیب به طور مجانبی پایدار) باشند.

برهان. اثبات را به مراحل زیر تقسیم می‌کنیم.

مرحله نخست. تبدیل به جواب صفر. فرض کنید $X(t)$ جواب اساسی معادله (۶.۳) باشد. با توجه به قضیه ۸.۲، جواب مسئله مقدار اولیه (۲.۲) بازه ماکسیمال \mathbb{R} را دارد و به صورت زیر تعیین می‌شود

$$x(t, t_0, x_0) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0. \quad (۷.۳)$$

از (۷.۳) نتیجه می‌شود که جواب صفر (با زمان اولیه t_0) پایدار است اگر و فقط اگر برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ موجود است به طوری که برای $t > t_0$ با شرط $\|x_0\| < \delta$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|X(t)X(t_0)^{-1}x_0\| < \epsilon. \quad (۸.۳)$$

از آنجایی که $X(t)X(t_0)^{-1}$ یک تبدیل خطی است، این همان رابطه زیر است

$$\|X(t)X(t_0)^{-1}(x_0 - \bar{x}_0)\| < \epsilon \quad \text{وقتی} \quad \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta,$$

یا به طور معادل

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)\| < \epsilon \quad \text{وقتی} \quad \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta,$$

برای $t > t_0$ و $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ برقرار است. بنابراین، جواب صفر (با زمان اولیه t_0) پایدار است اگر و فقط اگر همه جوابها (با زمان اولیه t_0) پایدار باشند.

برای پایداری مجانبی، توجه کنید که از آنجایی که $X(t)X(t_0)^{-1}$ خطی است، داریم

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)X(t_0)^{-1}x_0\| = 0 \quad \text{وقتی} \quad \|x_0\| < \alpha, \quad (۹.۳)$$

اگر و تنها اگر برای هر $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)X(t_0)^{-1}(x_0 - \bar{x}_0)\| = 0 \quad \text{وقتی} \quad \|x_0 - \bar{x}_0\| < \alpha.$$

این نشان می‌دهد که جواب صفر (با زمان اولیه t_0) به‌طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر همهٔ جواب‌ها (با زمان اولیه t_0) به‌طور مجانبی پایدار باشند.

مرحلهٔ دوم. مستقل از زمان اولیه. حال باید نشان دهیم که پایداری و پایداری مجانبی جواب صفر مستقل از زمان اولیه t_0 هستند. برای این منظور، $t_1 \neq t_0$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که

$$X(t)X(t_1)^{-1} = X(t)X(t_0)^{-1}X(t_0)X(t_1)^{-1}.$$

از (۸.۳) نتیجه می‌شود که برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\|X(t) - X(t_1)^{-1}x_0\| < \epsilon \quad \text{وقتی} \quad \|X(t_0)X(t_1)^{-1}x_0\| < \delta,$$

و از این رو، برای $t > t_0$ رابطهٔ زیر برقرار است

$$\|X(t) - X(t_1)^{-1}x_0\| < \epsilon \quad \text{وقتی} \quad \|x_0\| < \frac{\delta}{\|X(t_0)X(t_1)^{-1}\|}. \quad (۱۰.۳)$$

اگر $t_1 \geq t_0$ ، آنگاه خاصیت (۱۰.۳) برای $t > t_1$ برقرار است. از طرف دیگر، برای $t_1 < t_0$ تابع $t \mapsto X(t)X(t_1)^{-1}$ در $[t_1, t_0]$ پیوسته است. با اختیار

$$\delta \leq \frac{\|X(t_0)X(t_1)^{-1}\|\epsilon}{\max_{t \in [t_1, t_0]} \|X(t)X(t_1)^{-1}\|},$$

برای x_0 و $t \in [t_1, t_0]$ مانند (۱۰.۳) رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\|X(t_0)X(t_1)^{-1}x_0\| \leq \max_{t \in [t_1, t_0]} \|X(t)X(t_1)^{-1}\| \cdot \|x_0\| < \delta \leq \epsilon.$$

بنابراین، خاصیت (۱۰.۳) برای $t > t_1$ برقرار است. این نشان می‌دهد که اگر جواب صفر با زمان اولیه t_0 پایدار باشد، آنگاه آن با هر زمان اولیه پایدار است.

حال فرض می‌کنیم که جواب صفر با زمان اولیه t_0 به‌طور مجانبی پایدار باشد. از (۹.۳) به‌آسانی نتیجه

می‌شود که

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0,$$

و از این رو، برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و $t_1 \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)X(t_1)^{-1}x_0\| = 0.$$

این نشان می‌دهد که جواب صفر با هر زمان اولیه به‌طور مجانبی پایدار است. \square

از قضیه ۷.۳ نتیجه می‌شود که برای معادله (۶.۳) جواب صفر (با زمان اولیه دلخواه t_0) ناپایدار است اگر و تنها اگر همه جواب‌ها ناپایدار باشند.

با توجه به قضیه ۷.۳ طبیعی است که مفهوم زیر را معرفی کنیم.

تعریف ۸.۳. معادله (۶.۳) پایدار (به ترتیب، به‌طور مجانبی پایدار یا ناپایدار) گفته می‌شود اگر همه جواب‌هایش پایدار (به ترتیب، به‌طور مجانبی پایدار یا ناپایدار) باشند.

حال یک خصوصیت از مفاهیم پایداری و پایداری مجانبی برای معادلات خطی غیرخودگردان $x' = A(t)x$ را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۹.۳. فرض کنید $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابع پیوسته باشد و $X(t)$ جواب اساسی معادله (۶.۳) باشد. در این صورت،

(الف) معادله پایدار است اگر و تنها اگر رابطه $\sup\{\|X(t)\| : t > 0\} < +\infty$ برقرار باشد؛

(ب) معادله به‌طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$\|X(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad t \rightarrow +\infty.$$

برهان. از قضیه ۷.۳ و رابطه (۸.۳) نتیجه می‌شود که جواب صفر (با زمان اولیه دلخواه t_0) پایدار است اگر و

تنها اگر برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای $t > 0$

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\| \leq \epsilon \quad \text{وقتی} \quad \|x_0\| \leq \delta.$$

ازاین‌رو، اگر جواب صفر پایدار باشد، آنگاه برای $t > 0$ ، داریم

$$\begin{aligned} \|X(t)X(0)^{-1}\| &= \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|}{\|x_0\|} \\ &= \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|X(t)X(0)^{-1}(\delta x_0 / \|x_0\|)\|}{\|\delta x_0 / \|x_0\|\|} \\ &= \sup_{\|y_0\|=\delta} \frac{\|X(t)X(0)^{-1}y_0\|}{\|y_0\|} \leq \frac{\epsilon}{\delta}, \end{aligned}$$

و ازاین‌رو

$$\begin{aligned} \sup\{\|X(t)\| : t > 0\} &\leq \sup\{\|X(t)X(0)^{-1}\| : t > 0\} \|X(0)\| \\ &\leq \frac{\epsilon \|X(0)\|}{\delta} < +\infty. \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

ازطرف دیگر، اگر سوپریمم در رابطه (۱۱.۳) متناهی باشد، آنگاه $C > 0$ موجود است به طوری که برای $t > 0$

$$\|X(t)\| < C,$$

و ازاین‌رو، برای $t > 0$

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\| < \epsilon \quad \text{وقتی} \quad \|x_0\| < \frac{\epsilon}{C\|X(0)^{-1}\|}.$$

این خاصیت اول را ثابت می‌کند.

برای خاصیت دوم، توجه می‌کنیم که اگر $\|X(t)\| \rightarrow 0$ وقتی که $t \rightarrow +\infty$ ، آنگاه

$$\sup\{\|X(t)\| : t > 0\} < +\infty,$$

و ازاین‌رو، با توجه به خاصیت اول، جواب پایدار است. به علاوه، برای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (۱۲.۳)$$

و از این رو، معادله (۶.۳) به طور مجانبی پایدار است. از طرف دیگر، اگر معادله به طور مجانبی پایدار باشد، آنگاه خاصیت (۱۲.۳) برای $\|x_0\|$ به اندازه کافی کوچک برقرار است، و از این رو، وقتی $t \rightarrow +\infty$ رابطه $\|X(t)\| \rightarrow 0$ برقرار است. \square

۲.۳. ضرایب ثابت و ضرایب تناوبی. در این بخش حالت‌های خاصی از معادلات خطی با ضرایب ثابت و ضرایب تناوبی را در نظر می‌گیریم. با حالت ضرایب ثابت شروع می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳. برای ماتریس مربعی A ، معادله $x' = Ax$

(الف) پایدار است اگر و تنها اگر قسمت حقیقی هیچ‌یک از مقادیر ویژه A مثبت نباشد و هر مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر بلوک جردن قطری دارد؛

(ب) به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر قسمت حقیقی هیچ‌یک از مقادیر ویژه A مثبت نباشد؛

(ج) ناپایدار است اگر و تنها اگر A حداقل یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت یا حداقل یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر و یک بلوک جردن غیرقطری داشته باشد.

برهان. ادعاها به آسانی از صورت متعارف جردن در قضیه ۱۶.۲ همراه با توصیف نمای بلوک جردن در قضیه ۱۸.۲ نتیجه می‌شود. واضح است که اگر S ماتریس مربعی معکوس‌پذیر صادق در (۱۲.۲) باشد، آنگاه

$$e^{At} = S e^{(S^{-1}AS)t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{R_1 t} & 0 \\ 0 & e^{R_k t} \end{pmatrix} S^{-1},$$

که در آن R_j ماتریس $n_j \times n_j$ در رابطه (۱۳.۲) است. از طرف دیگر، از قضیه ۱۸.۲ نتیجه می‌شود که

$$e^{R_j t} = e^{\lambda_j t} \left(Id + tN_j + \frac{1}{2!} t^2 N_j^2 + \dots + \frac{1}{(n_j - 1)!} t^{n_j - 1} N_j^{n_j - 1} \right),$$

که در آن N_j ماتریس $n_j \times n_j$ در رابطه (۱۵.۲) است. این نشان می‌دهد که هر درایه از ماتریس $e^{R_j t}$ به صورت $e^{\lambda_j t} p(t)$ است، که p یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n_j - 1$ است. نتیجه مطلوب اکنون بلافاصله از قضیه

۹.۳ به دست می‌آید. \square

حال معادلات خطی با ضرایب تناوبی را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابعی پیوسته T -تناوبی باشد و B ماتریس (32.2) باشد.

$$x' = A(t)x$$

در این صورت، معادله $x' = A(t)x$

(الف) پایدار است اگر و تنها اگر نماهای مشخصه‌ای با قسمت حقیقی مثبت وجود نداشته باشد و برای هر

نمای مشخصه با قسمت حقیقی صفر، بلوک جردن مربوط به ماتریس B قطری باشد؛

(ب) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر فقط دارای نماهای مشخصه با قسمت حقیقی منفی باشد؛

(ج) ناپایدار است اگر و تنها اگر حداقل یک نمای مشخصه با قسمت حقیقی مثبت یا حداقل یک نمای

مشخصه با قسمت حقیقی منفی وجود داشته باشد به طوری که بلوک جردن مربوط به ماتریس B قطری نباشد.

برهان. با توجه به قضیه فلوکه (قضیه ۳۱.۲)، هر جواب اساسی از معادله $x' = A(t)x$ به صورت (32.2) است.

با توجه به (33.2) ، تابع ماتریسی $P(t)$ ، T -تناوبی است، و از این رو، هر خاصیت در قضیه ۹.۳ فقط وابسته

به عبارت e^{Bt} است. یعنی

$$\sup\{\|X(t)\| : t > 0\} < +\infty \Leftrightarrow \sup\{\|e^{Bt}\| : t > 0\} < +\infty,$$

و

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{Bt}\| = 0.$$

این نشان می‌دهد که پایداری معادله $x' = A(t)x$ منطبق با پایداری معادله $x' = Bx$ است. از آنجایی که مقادیر

ویژه ماتریس B نماهای مشخصه (با تفاوت یک مضرب از $2\pi i/T$) هستند، نتیجه مطلوب اکنون بلافاصله از

قضیه ۱۰.۳ به دست می‌آید. \square

۳.۳ پایداری تحت اختلال‌های غیر خطی

در این بخش دسته‌ای از اختلال‌های غیرخطی از یک معادله خطی به طور مجانبی پایدار را در نظر می‌گیریم. با

حالت اختلال‌های معادلات خطی با ضرایب ثابت شروع می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که قسمت حقیقی هیچیک از مقادیر ویژه A مثبت نباشد و فرض کنید $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته و به طور موضعی نسبت به x لپشیتز باشد. اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $g(t, 0) = 0$ برقرار باشد و

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|g(t, x)\|}{\|x\|} = 0, \quad (۱۳.۳)$$

آنگاه جواب صفر معادله

$$x' = Ax + g(t, x), \quad (۱۴.۳)$$

به طور مجانبی پایدار است. به علاوه، ثابت‌های λ, C و $\delta > 0$ وجود دارند به طوری که برای هر $t_0 \in \mathbb{R}$ و هر جواب $x(t)$ از معادله (۱۴.۳) با $\|x(t_0)\| < \delta$ برای $t \geq t_0$ رابطه زیر را داریم

$$\|x(t)\| \leq Ce^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|. \quad (۱۵.۳)$$

برهان. از آنجایی که قسمت حقیقی هیچیک از مقادیر ویژه A مثبت نیست، با توجه به قضیه ۲۷.۲، ثابت‌های c و $\mu > 0$ وجود دارند به طوری که برای هر $t > 0$ رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$\|e^{At}\| \leq ce^{-\mu t}. \quad (۱۶.۳)$$

از طرف دیگر، با توجه به (۱۳.۳)، برای $\epsilon > 0, \delta > 0$ وجود دارند به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$ با $\|x\| < \delta$ رابطه زیر برقرار است

$$\|g(t, x)\| \leq \epsilon \|x\|. \quad (۱۷.۳)$$

حال فرض کنید $x(t)$ جوابی از معادله (۱۴.۳) با $x(t_0) = x_0$ باشد. با توجه به فرمول تغییر پارامترها در قضیه ۲۶.۲، برای t در بازه ماکسیمال جواب، رابطه زیر به دست می‌آید

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s, x(s)) ds. \quad (۱۸.۳)$$

به علاوه، برای $x_0 \in \mathbb{R}^n$ با $\|x_0\| < \delta$ ، جواب $x(t)$ برای هر $t > t_0$ به اندازه کافی نزدیک به t_0 ، مثلاً برای $t \in [t_0, t_1]$ در شرط $\|x(t)\| < \delta$ صدق می‌کند. از (۱۶.۳) و (۱۷.۳) نتیجه می‌شود که

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\mu(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^t ce^{-\mu(t-s)}\epsilon\|x(s)\|ds, \quad (۱۹.۳)$$

یا به طور معادل، برای هر $t \in [t_0, t_1]$ خواهیم داشت

$$e^{\mu t}\|x(t)\| \leq ce^{\mu t_0}\|x_0\| + \int_{t_0}^t ce^{\mu s}\|x(s)\|ds.$$

با توجه به لم گرونوال (قضیه ۳۹.۱)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$e^{\mu t}\|x(t)\| \leq ce^{\mu t_0}\|x_0\|e^{c\epsilon(t-t_0)},$$

یعنی، برای $t \in [t_0, t_1]$ رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\|x(t)\| \leq ce^{(-\mu+c\epsilon)(t-t_0)}\|x_0\|. \quad (۲۰.۳)$$

بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که $c \geq 1$ و $\epsilon > 0$ را آن قدر کوچک اختیار می‌کنیم که نامساوی $-\mu + c\epsilon < 0$ برقرار باشد. از (۲۰.۳) نتیجه می‌شود که اگر $\|x_0\| < \delta/c$ ، آنگاه برای هر $t \in [t_0, t_1]$ رابطه $\|x(t)\| < \delta$ برقرار است. از این رو، $t_2 > t_1$ وجود دارد به طوری که جواب $x(t)$ روی بازه $t \in [t_0, t_2]$ تعریف شده است و برای $t \in [t_0, t_2]$ در رابطه $\|x(t)\| < \delta$ صدق می‌کند. می‌توان این روش را به طور نامحدود تکرار کرد (بدون تغییر ϵ و δ) تا نتیجه گرفت که یک دنباله صعودی t_n وجود دارد به طوری که $x(t)$ در بازه $t \in [t_0, t_n]$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف شده و برای هر $t \in [t_0, t_n]$ رابطه $\|x(t)\| < \delta$ برقرار است.

حال فرض کنید b سوپریمم همه دنباله‌های t_n باشد. اگر $b < +\infty$ ، آنگاه رابطه $\|x(b^-)\| \leq \delta$ را خواهیم داشت که با قضیه ۴۶.۱ در تناقض است. از این رو، $b = +\infty$ و جواب $x(t)$ در $[t_0, +\infty)$ تعریف شده است.

به علاوه، برای هر $t \geq t_0$ در رابطه (۲۰.۳) صدق می‌کند، که رابطه (۱۵.۳) را نتیجه می‌دهد. این نشان می‌دهد

□

که جواب صفر، به طور مجانبی پایدار است.

کاربردی از قضیه ۱۲.۳ در زیر آمده است.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 باشد و فرض کنید x_0 نقطه‌ای با $f(x_0) = 0$ باشد به طوری که قسمت حقیقی هیچ‌یک از مقادیر ویژه $d_{x_0}f$ مثبت نباشد. در این صورت، ثابت‌های C ، λ و $\delta > 0$ وجود دارند به طوری که برای هر $t_0 \in \mathbb{R}$ جواب $x(t)$ از مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = \bar{x}_0, \end{cases}$$

برای هر $t > t_0$ و $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ با $\|\bar{x}_0 - x_0\| < \delta$ در رابطه زیر صدق کند

$$\|x(t) - x_0\| \leq C e^{-\lambda(t-t_0)} \|\bar{x}_0 - x_0\|. \quad (21.3)$$

برهان. داریم

$$x' = f(x) = d_{x_0}f(x - x_0) + f(x) - d_{x_0}f(x - x_0). \quad (22.3)$$

با فرض $y = x - x_0$ ، معادله (۲۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y' = Ay + g(t, y), \quad (23.3)$$

که $A = d_{x_0}f$ و

$$g(t, y) = f(x_0 + y) - d_{x_0}fy.$$

بنا به فرض، قسمت حقیقی هیچ‌یک از مقادیر ویژه A مثبت نیست. به علاوه، برای هر $t \in \mathbb{R}$ رابطه $g(t, 0) = f(x_0) = 0$ برقرار است، و از آنجایی که f از کلاس C^1 است، وقتی $y \rightarrow 0$ رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{g(t, y)}{\|y\|} = \frac{f(x_0 + y) - f(x_0) - d_{x_0}fy}{\|y\|} \rightarrow 0.$$

به عبارت دیگر، فرض های قضیه ۱۲.۳ برقرار هستند. از این رو، از رابطه (۱۵.۳) نتیجه می شود که ثابت های λ ، C ، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t_0 \in \mathbb{R}$ و هر جواب $y(t)$ از معادله (۲۳.۳) با $\|y(t_0)\| < \delta$ ، رابطه زیر را برای هر $t \geq t_0$ برقرار است

$$\|y(t)\| \leq Ce^{-\lambda(t-t_0)}\|y(t_0)\|.$$

این رابطه (۲۱.۳) را ثابت می کند. \square

می توان نتایج مربوطه را برای اختلال های غیرخطی از معادلات خطی غیرخودگردان به دست آورد. نسخه ای از قضیه ۱۲.۳ در این زمینه کلی در زیر آمده است.

قضیه ۱۴.۳. فرض کنید $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n$ تابعی پیوسته باشد و فرض کنید $X(t)$ جوابی اساسی معادله $x' = A(t)x$ باشد که برای ثابت های c و $\mu > 0$ و هر $t \geq s$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|X(t)X(s)^{-1}\| \leq ce^{-\mu(t-s)}.$$

اگر تابع $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته و نسبت به x به طور موضعی لیپشیتز باشد، برای هر $t \in \mathbb{R}$ در رابطه $g(t, 0) = 0$ صدق کند، و خاصیت (۱۳.۳) برقرار باشد، آنگاه جواب صفر معادله

$$x' = A(t)x + g(t, x), \quad (24.3)$$

به طور مجانبی پایدار است.

برهان. ما به دقت برهان قضیه ۱۲.۳ را با جایگزین کردن رابطه (۱۸.۳) با یک رابطه مناسب دنبال می کنیم. یعنی، اگر $x(t)$ جوابی از معادله (۲۴.۳) با $x(t_0) = x_0$ باشد، در این صورت از فرمول تغییرات پارامتر در قضیه ۲۵.۲ برای t در بازه ماکسیمال جواب نتیجه می شود که

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X(s)^{-1}g(s, x(s))ds. \quad (25.3)$$

از طرف دیگر، با توجه به رابطه (۱۳.۳)، برای $\epsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ وجود دارد که رابطه (۱۷.۳) برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ با $\|x\| < \delta$ برقرار است. اکنون $t_1 > t_0$ و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ با $\|x_0\| < \delta$ طوری اختیار می‌کنیم که $x(t)$ در بازه $[t_0, t_1]$ تعریف شده باشد و برای $t \in [t_0, t_1]$ رابطه $\|x(t)\| < \delta$ برقرار باشد. از روابط (۲۵.۳) و (۱۷.۳) نتیجه می‌شود که رابطه (۱۹.۳) برای $t \in [t_0, t_1]$ برقرار است. حال می‌توان استدلال‌های موجود در برهان قضیه ۱۲.۳ را تکرار کرد تا نتیجه گرفت که اگر $\|x_0\| < \delta/c$ ، آنگاه جواب $x(t)$ در $[t_0, +\infty)$ تعریف شده است و برای $t \geq t_0$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|x(t)\| \leq ce^{(-\mu+c\epsilon)(t-t_0)}\|x_0\|.$$

(با فرض اینکه $c \geq 1$ و $\epsilon > 0$ آن قدر کوچک است که رابطه $-\mu + c\epsilon < 0$ برقرار است). به‌ویژه، جواب صفر به‌طور مجانبی پایدار است. □

۴.۳ توابع لیپانوف

این بخش مقدمه‌ای بر نظریه توابع لیپانوف است که گاهی به فرد اجازه می‌دهد تا پایداری یا ناپایداری یک جواب داده شده را به شیوه‌ای کم‌ویش خودکار اثبات کند.

۱.۴.۳. مفاهیم اولیه. ابتدا مفهوم تابع به‌طور موضعی لپشیتز را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۳. تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R}^n$ به‌طور موضعی لپشیتز گفته می‌شود هرگاه برای هر مجموعه فشرده $K \subset D$ ، $L > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x, y \in K$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|. \quad (۲۶.۳)$$

فرض کنید $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی به‌طور موضعی لپشیتز باشد. به‌آسانی می‌توان نشان دهد که f به‌طور موضعی لپشیتز است اگر و تنها اگر تابع $g : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ تعریف شده با $g(t, x) = f(x)$ نسبت به x به‌طور موضعی لپشیتز باشد. به‌علاوه، با توجه به رابطه (۲۶.۳)، هر تابع به‌طور موضعی لپشیتز پیوسته است.

حال فرض کنید $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (27.3)$$

باشد که با توجه به قضیهٔ پیکارد-لیندلف (قضیهٔ ۱۸.۱) خوش تعریف است. تابع دیفرانسیل پذیر $V : D \rightarrow \mathbb{R}$

داده شده است، تابع جدید $\mathbb{R} \rightarrow D \rightarrow \dot{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

اکنون، توجه داریم که

$$\dot{V}(x) = (d_{\varphi_t(x)} V \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x))|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} V(\varphi_t(x))|_{t=0}. \quad (28.3)$$

حال مفهوم تابع لیاپانوف را برای نقطهٔ بحرانی معادلهٔ $x' = f(x)$ معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۳. برای $x_0 \in D$ داده شده با $f(x_0) = 0$ ، تابع دیفرانسیل پذیر $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ برای x_0 تابع

لیاپانوف نامیده می‌شود هرگاه مجموعهٔ باز $U \subset D$ شامل x_0 وجود داشته باشد به طوری که

$$\text{(الف)} \quad V(x_0) = 0 \text{ و برای } x \in U \setminus \{x_0\} \quad V(x) > 0$$

$$\text{(ب)} \quad \text{برای } x \in U \quad \dot{V}(x) \leq 0.$$

یک تابع لیاپانوف، تابع لیاپانوف اکید نامیده می‌شود هرگاه شرط دوم را بتوان با شرط برای $x \in U \setminus \{x_0\}$ ،

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ جایگزین کرد.}$$

مثال ۱۷.۳. معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -x - y^3. \end{cases}$$

مبدأ تنها نقطهٔ بحرانی است. نشان می‌دهیم که تابع $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطهٔ

$$V(x, y) = x^2 + y^2,$$

معین می‌شود تابع لیاپانوف اکید نسبت به $(0, 0)$ است. داریم $V(0, 0) = 0$ و برای $(x, y) \neq (0, 0)$ رابطه $V(x, y) > 0$ برقرار خواهد بود. به علاوه، برای $(x, y) \neq (0, 0)$ ، داریم

$$\dot{V}(x, y) = (2x, 2y) \cdot (-x + y, -x - y^3) = -2(x^4 + y^4) < 0.$$

۲.۴.۳. معیار پایداری. وجود تابع لیاپانوف (به ترتیب، تابع لیاپانوف اکید) برای نقطه بحرانی معادله

دیفرانسیل $x' = f(x)$ به فرد اجازه می‌دهد تا پایداری (به ترتیب پایداری مجانبی) آن نقطه را تعیین کند.

قضیه ۱۸.۳. فرض کنید $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی به طور موضعی لیپشیتز روی مجموعه باز $D \subset \mathbb{R}^n$ باشد و فرض

کنید $x_0 \in D$ نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ باشد.

(الف) اگر برای x_0 یک تابع لیاپانوف وجود داشته باشد، آنگاه x_0 پایدار است.

(ب) اگر برای x_0 یک تابع لیاپانوف اکید وجود داشته باشد، آنگاه x_0 به طور مجانبی پایدار است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که یک تابع لیاپانوف برای x_0 روی مجموعه باز $U \subset D$ شامل x_0 وجود داشته باشد.

$\epsilon > 0$ را طوری اختیار می‌کنیم که $B(x_0, \epsilon) \subset U$ و

$$m = \min \{V(x) : x \in \partial B(x_0, \epsilon)\}.$$

از آنجایی که V پیوسته است (چون آن به طور موضعی لیپشیتز است) و روی مجموعه $B(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}$ ، $V > 0$ ،

عدد $\delta \in (0, \epsilon)$ وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$0 < \max \{V(x) : x \in \overline{B(x_0, \delta)}\} < m. \quad (۲۹.۳)$$

از طرف دیگر، از رابطه (۲۸.۳) نتیجه می‌شود که تابع $t \mapsto V(\varphi_t(x))$ (در بازه ماکسیمال I از جواب) ناصعودی

است. در حقیقت، با روندی مشابه برهان قضیه ۱۳.۱، برای t به اندازه کافی نزدیک به s رابطه $\varphi_t = \varphi_{t-s} \circ \varphi_s$

را به دست می‌آوریم، و از این رو، برای $s \in I$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} V(\varphi_t(x)) \Big|_{t=s} = V(\varphi_{t-s}(\varphi_s(x))) \Big|_{t=s}$$

$$= \dot{V}(\varphi_s(x)) \leq 0. \quad (۳۰.۳)$$

از این رو، از رابطه (۲۹.۳) نتیجه می‌شود که هر جواب $\varphi_t(x)$ از مسئله با مقدار اولیه (۲۷.۳) با $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ برای هر $t > 0$ در بازهٔ ماکسیمالش در $B(x_0, \epsilon)$ قرار می‌گیرد. این ایجاب می‌کند که هر جواب $\varphi_t(x)$ با $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$ برای هر $t > 0$ تعریف شده است، و از این رو نقطهٔ بحرانی x_0 پایدار است.

حال فرض می‌کنیم که یک تابع لیپانوف اکید برای x_0 وجود داشته باشد. باید نشان دهیم که برای هر نقطهٔ $x \in B(x_0, \alpha)$ به اندازهٔ کافی کوچک وقتی که $t \rightarrow +\infty$ رابطه $\varphi_t(x) \rightarrow x_0$ برقرار است. با روندی مشابه (۳۰.۳)، نتیجه می‌گیریم که برای هر $x \in U \setminus \{x_0\}$ تابع $t \mapsto V(\varphi_t(x))$ (در بازهٔ ماکسیمال جواب) نزولی است. حال فرض کنید $(t_n)_n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی با $t_n \nearrow +\infty$ باشد به طوری که $(\varphi_{t_n}(x))_n$ همگرا شود، و فرض کنید y حد این دنباله باشد. در این صورت، چون $t \mapsto V(\varphi_t(x))$ نزولی است وقتی $t \rightarrow +\infty$ رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$V(\varphi_{t_n}(x)) \searrow V(y).$$

به علاوه، برای $t > 0$ رابطه زیر برقرار است

$$V(\varphi_t(x)) > V(y). \quad (۳۱.۳)$$

حال فرض می‌کنیم که $y \neq x_0$. در این صورت، برای هر $s > 0$ رابطه $V(\varphi_s(y)) < V(y)$ برقرار است. با اختیار n به اندازهٔ کافی بزرگ، می‌توان اطمینان حاصل کرد که $\varphi_{t_n+s}(x) = \varphi_s(\varphi_{t_n}(x))$ به اندازهٔ دلخواه به $\varphi_s(y)$ نزدیک است، و از این رو، همچنین $V(\varphi_{t_n+s}(x))$ به اندازهٔ دلخواه به $V(\varphi_s(y)) < V(y)$ نزدیک است. از این رو

$$V(\varphi_{t_n+s}(x)) < V(y),$$

اما این متناقض با رابطه (۳۱.۳) است. بنابراین، $y = x_0$ ، و نتیجه می‌گیریم که وقتی $t \rightarrow +\infty$ رابطه

$$\square \quad \varphi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ برقرار است.}$$

کاربردهای قضیه ۱۸.۳ در زیر آمده است.

مثال ۱۹.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = y - xy^2, \\ y' = -x^3. \end{cases} \quad (۳۲.۳)$$

این را می‌توان به‌عنوان یک اختلال از معادله خطی $(x, y)' = (y, 0)$ ، که دارای تصویر فاز در شکل ۱۱.۲ است، مشاهده کرد. نقطه بحرانی $(0, 0)$ از معادله (۳۲.۳) و تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$V(x, y) = x^4 + 2y^2.$$

داریم $V(0, 0) = 0$ و برای $(x, y) \neq (0, 0)$ رابطه $V(x, y) > 0$. به‌علاوه

$$\dot{V}(x, y) = (4x^3, 4y) \cdot (y - xy^2, -x^3) = 4x^3y - 4x^2y^2 - 4x^3y = -4x^2y^2 \leq 0.$$

از این رو، V برای $(0, 0)$ یک تابع لیاپانوف است، و از قضیه ۱۸.۳ نتیجه می‌شود که مبدأ، پایدار است.

مثال ۲۰.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = x^2 - x - y, \\ y' = -x. \end{cases} \quad (۳۳.۳)$$

ما در مورد پایداری نقطه بحرانی در مبدأ بحث می‌کنیم. معادله (۳۳.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (۳۴.۳)$$

از آنجایی که ماتریس 2×2 در رابطه (۳۴.۳) مقادیر ویژه $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ دارد، هر دو با قسمت حقیقی منفی، از قضیه ۱۳.۳ نتیجه می‌شود که مبدأ به‌طور مجانبی پایدار است.

همچنین می‌توان از توابع لیاپانوف برای مطالعه پایداری مبدأ استفاده کرد. با این وجود، پیدا کردن تابع لیاپانوف اکید (وقتی که آن وجود دارد) همیشه آسان نیست. برای مثال، تابع $V(x, y) = x^2 + y^2$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\dot{V}(x, y) = (2x, 2y) \cdot (x^2 - x - y, x) = 2x^2(x - 1),$$

و از این رو، در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از $(0, 0)$ رابطه $\dot{V}(x, y) \leq 0$ برقرار است. بنابراین، V یک تابع لیاپانوف است، و از قضیه ۱۸.۳ نتیجه می شود که مبدأ پایدار است. با این وجود، این نشان نمی دهد که مبدأ به طور مجانبی پایدار است. برای این منظور، تابع زیر را در نظر بگیرید

$$W(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

داریم $W(0, 0) = 0$. به علاوه

$$W(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (۳۵.۳)$$

از آنجایی که ماتریس 2×2 در رابطه (۳۵.۳) مقادیر ویژه $1/2$ و $3/2$ دارد، ماتریس معین مثبت است. به ویژه، برای $(x, y) \neq 0$ رابطه $W(x, y) > 0$ برقرار است. همچنین داریم

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, y) &= (2x + y, x + 2y) \cdot (x^2 - x - y, x) \\ &= 2x^3 - x^2 + x^2y - xy - y^2 \\ &= - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2x^3 + x^2y. \end{aligned} \quad (۳۶.۳)$$

از آنجایی که ماتریس 2×2 در رابطه (۳۶.۳) معین مثبت است، ثابت های $a, b > 0$ موجود است به طوری که برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، رابطه زیر برقرار است

$$-a\|(x, y)\|^2 \leq - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq -b\|(x, y)\|^2.$$

به علاوه، وقتی $(x, y) \rightarrow 0$ رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$\frac{2x^3 + x^2y}{\|(x, y)\|^2} \rightarrow 0.$$

بنابراین، برای $\epsilon > 0$ داده شده، برای هر $(x, y) \neq 0$ به اندازه کافی کوچک رابطه زیر را داریم

$$-a - \epsilon < \frac{\dot{W}(x, y)}{\|(x, y)\|^2} < -b + \epsilon.$$

با اختیار ϵ به اندازه کافی کوچک به طوری که رابطه $-b + \epsilon < 0$ برقرار باشد، برای هر $(x, y) \neq 0$ به اندازه کافی کوچک رابطه $\dot{W}(x, y) < 0$ را به دست می‌آوریم. از این رو، از قضیه ۱۸.۳ نتیجه می‌شود که مبدأ به طور مجانبی پایدار است.

مثال ۲۱.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x'' + f(x) = 0, \quad (37.3)$$

که $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی از کلاس C^1 با $f(0) = 0$ است به طوری که برای $x \neq 0$ رابطه زیر برقرار باشد

$$xf(x) > 0 \quad (38.3)$$

(یعنی، $f(x)$ و x علامت یکسانی دارند). این مربوط به اعمال نیروی $-f(x)$ به ذره‌ای با جرم ۱ است که بدون اصطکاک در حال حرکت است. شرط (۳۸.۳) مطابق با این فرض است که نیرو همیشه به مبدأ اشاره می‌کند.

معادله (۳۷.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f(x), \end{cases} \quad (39.3)$$

و $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی است. ما از تابع لیاپانوف برای نشان دادن پایداری مبدأ استفاده می‌کنیم. یعنی، تابع زیر را در نظر بگیرید

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)ds, \quad (40.3)$$

که با مجموع انرژی جنبشی $y^2/2$ (به یاد بیاورید که جرم ذره ۱ است) با انرژی پتانسیل $\int_0^x f(s)ds$ مطابقت دارد. به دلیل شرط (۳۸.۳)، داریم $V(0, 0) = 0$ ، و برای $(x, y) \neq (0, 0)$ رابطه $V(x, y) > 0$ برقرار است. به علاوه

$$\dot{V}(x, y) = (f(x), y) \cdot (y, -f(x)) = 0,$$

و بنابراین، V برای $(0, 0)$ تابع لیاپانوف است. از این رو، از قضیه ۱۸.۳ نتیجه می‌شود که مبدأ پایدار است. اتفاقاً، در امتداد جواب‌ها داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x, y) &= yy' + f(x)x' \\ &= -yf(x) + f(x)y = 0,\end{aligned}$$

و از این رو، معادله (۳۹.۳) پایستار است. این مربوط به بقای انرژی است.

مثال ۲۲.۳. برای $\epsilon > 0$ ، معادله زیر را با $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مانند مثال ۲۱.۳ در نظر بگیرید

$$x'' + \epsilon x' + f(x) = 0. \quad (۴۱.۳)$$

معادله (۴۱.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f(x) - \epsilon y. \end{cases}$$

دوباره تابع V در رابطه (۴۰.۳) را در نظر می‌گیریم که $V(0, 0) = 0$ و برای $(x, y) \neq (0, 0)$ رابطه $V(x, y) > 0$ برقرار است. به علاوه

$$\dot{V}(x, y) = (f(x), y) \cdot (y, -f(x) - \epsilon y) = -\epsilon y^2 \leq 0,$$

و V برای $(0, 0)$ تابع لیاپانوف است. از این رو، از قضیه ۱۸.۳ نتیجه می‌شود که مبدأ، پایدار است.

۳.۴.۳. معیار ناپایداری. این فصل را با توصیف یک معیار ناپایداری برای نقاط بحرانی معادله $x' = f(x)$

خاتمه می‌دهیم. معیار مشابه، معیار پایداری در قضیه ۱۸.۳ است.

قضیه ۲۳.۳. فرض کنید $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 روی یک مجموعه باز $D \subset \mathbb{R}^n$ باشد و فرض

کنید $x_0 \in D$ نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ باشد. همچنین، فرض کنید $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی از کلاس C^1

در همسایگی $U \subset D$ از x_0 طوری باشد که

(الف) $V(x_0) = 0$ و برای $x \in U \setminus \{x_0\}$ نامساوی $\dot{V}(x) > 0$ برقرار باشد؛

(ب) V در هر همسایگی از x_0 مقادیر مثبت را بگیرد.

آنگاه نقطه بحرانی x_0 ناپایدار است.

برهان. فرض کنید $A \subset U$ یک همسایگی از x_0 باشد و $\varphi_t(x)$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه (۳۷.۳) باشد. اگر در هر همسایگی A یک جواب $\varphi_t(x)$ وجود داشته باشد که برای هر $t > 0$ تعریف شده است، آنگاه چیزی برای نشان دادن وجود ندارد. از این رو، می توان فرض کرد که همه جواب های $\varphi_t(x)$ با $x \in A$ برای هر $t > 0$ تعریف شده اند.

حال $y \in A$ را با $V(y) > 0$ اختیار می کنیم (که بنا به فرض همیشه وجود دارد). از آنجایی که برای $x \in U \setminus \{x_0\}$ رابطه $\dot{V}(x) > 0$ برقرار است، با روندی مشابه در (۳۰.۳) نتیجه می گیریم که تابع $t \mapsto V(\varphi_t(y))$ هرگاه $\varphi_t(y) \in U$ ، صعودی است. از این رو، از آنجایی که $V(x_0) = 0$ ، جواب $\varphi_t(y)$ به x_0 نزدیک نمی شود، یعنی، همسایگی B از x_0 وجود دارد به طوری که برای $t > 0$ رابطه $\varphi_t(y) \notin B$ برقرار است. حال فرض می کنیم که جواب در A قرار نمی گیرد و m را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$m = \inf \{ \dot{V}(\varphi_t(y)) : t > 0 \}.$$

از آنجایی که $\dot{V} = \nabla V \cdot f$ پیوسته است و $\overline{A \setminus B}$ فشرده است، رابطه زیر را داریم

$$m \geq \inf \{ \dot{V}(x) : x \in \overline{A \setminus B} \} > 0$$

(چون توابع پیوسته با مقادیری در \mathbb{R} یک مینیمم روی هر مجموعه فشرده دارند). همچنین برای $t > 0$ داریم

$$V(\varphi_t(y)) \geq V(y) + mt.$$

از این رو، $T > 0$ وجود دارد به طوری که

$$V(\varphi_T(y)) > \max \{ V(x) : x \in \overline{A} \},$$

و از این رو، $\varphi_T(y) \notin A$. این تناقض نشان می‌دهد که نقاط دلخواه x نزدیک به x_0 وجود دارند (زیرا بنا به فرض V در هر همسایگی از x_0 مقادیر مثبت را اختیار می‌کند) به طوری که جواب $\varphi_t(x)$ در همسایگی A قرار گیرد. از این رو، نقطه بحرانی x_0 ناپایدار است. \square

کاربردی از قضیه ۲۳.۲ در زیر آمده است.

مثال ۲۴.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = 3x + y^3, \\ y' = -2y + x^2, \end{cases}$$

که در آن $(0, 0)$ نقطه بحرانی است، و فرض کنید

$$V(x, y) = x^2 - y^2.$$

واضح است که $V(0, 0) = 0$ و V در هر همسایگی از $(0, 0)$ مقادیر مثبت را اختیار می‌کند. به علاوه

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= (2x, -2y) \cdot (3x + y^3, -2y + x^2) \\ &= 6x^2 + 4y^2 + 2xy^3 - 2x^2y. \end{aligned}$$

از آنجایی که

$$\frac{\dot{V}(x, y)}{6x^2 + 4y^2} \rightarrow 1 \quad \text{وقتی } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

برای $(x, y) \neq (0, 0)$ به اندازه کافی کوچک داریم $\dot{V}(x, y) > 0$. از این رو، از قضیه ۲۳.۳ نتیجه می‌شود که مبدأ، ناپایدار است.

۵.۳ تمرین‌ها

تمرین ۱.۳. همه جواب‌های پایدار، به طور مجانبی پایدار و ناپایدار معادله‌های زیر را پیدا کنید

$$(الف) \quad x' = x(x - 2);$$

$$(ب) \quad x'' + 4x = 0.$$

تمرین ۲.۳. برای تابع $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^2 ، معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x' = \nabla g(x).$$

(الف) نشان دهید که اگر u یک جواب غیرثابت باشد، آنگاه $u \circ g$ به طور اکید صعودی است.

(ب) نشان دهید که هیچ مدار تناوبی وجود ندارد.

(ج) پایداری مبدأ را وقتی که $g(x, y) = x^2 + y^4$ باشد مشخص کنید.

(د) پایداری مبدأ را وقتی که $g(x, y) = x^2 y^4$ باشد مشخص کنید.

تمرین ۳.۳. معادله زیر را در مختصات قطبی در نظر بگیرید

$$\begin{cases} r' = f(r), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

که در آن

$$f(r) = \begin{cases} r \sin(1/r^2), & r \neq 0, \\ 0, & r = 0. \end{cases}$$

نشان دهید که مبدأ پایدار است اما به طور مجانبی پایدار نیست.

تمرین ۴.۳. پایداری جواب صفر معادله‌های زیر را مشخص کنید

$$(۱) \begin{cases} x' = -x + xy, \\ y' = x - y - x^2 - y^3; \end{cases}$$

$$(۲) \begin{cases} x' = -x + x^2 + y^2, \\ y' = 2x - 3y + y^3; \end{cases}$$

$$(۳) \begin{cases} x' = -x + 2x(x + y)^2, \\ y' = -y^3 + 2y^3(x + y)^2; \end{cases}$$

$$(۴) \begin{cases} x' = x^3 - 3xy^2, \\ y' = 3x^2y - y^3. \end{cases}$$

تمرین ۵.۳. فرض کنید $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته T -تناوبی باشد.

(الف) نمای مشخصه معادله $x' = a(t)x$ را پیدا کنید.

(ب) یک شرط لازم و کافی برای تابع a پیدا کنید به طوری که جواب صفر آن به طور مجانبی پایدار باشد.

تمرین ۶.۳. محاسبه کنید

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|x(t)\|,$$

(با این قرارداد که $\log 0 = -\infty$) برای هر جواب $x(t)$ از معادله‌های

$$(۱) x'' + x = 0;$$

$$(۲) x' = [a + b(\sin \log t + \cos \log t)]x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

تمرین ۷.۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد، $\chi : \mathbb{C}^n \rightarrow [-\infty, +\infty)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi(v) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n v\|.$$

نشان دهید که

$$(الف) \chi(\alpha v) = \chi(v), \alpha \neq 0$$

$$(ب) \chi(v + w) \leq \max\{\chi(v), \chi(w)\}$$

$$(ج) \text{ اگر } \chi(v) \neq \chi(w), \text{ آنگاه } \chi(v + w) = \max\{\chi(v), \chi(w)\}$$

$$(د) \chi \text{ فقط مقادیر بسیار محدودی را می‌گیرد.}$$

تمرین ۸.۳. نشان دهید که اگر $(x_1(t), x_2(t))$ یک جواب ناصفر معادله زیر باشد

$$\begin{cases} x'_1 = [-1.01 - (\sin \log t + \cos \log t)]x_1, \\ x'_2 = [-1.01 + (\sin \log t + \cos \log t)]x_2, \end{cases}$$

آنگاه

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|(x_1(t), x_2(t))\| < 0.$$

تمرین ۹.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y_1' = [-1.01 - (\sin \log t + \cos \log t)]y_1, \\ y_2' = [-1.01 + (\sin \log t + \cos \log t)]y_2 + y_1^2. \end{cases}$$

الف) ثابت کنید که هر جواب $(y_1(t), y_2(t))$ ، با $t > 0$ ، را می‌توان برای ثابت‌های c_1, c_2 و s به صورت

زیر نوشت

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-1.01t - a(t)}, \\ y_2(t) = c_2 e^{-1.01t + a(t)} + c_1^2 e^{-1.01t + a(t)} \int_s^t e^{-3a(\tau) - 1.01\tau} d\tau \end{cases}$$

که در آن $a(t) = t \sin \log t$ است.ب) با اختیار $\epsilon \in (0, \pi/4)$ و با تعریف $t_k = e^{2k\pi - \pi/2}$ برای $k \in \mathbb{N}$ ، نشان دهید که برایرابطه زیر برقرار است $\tau \in [t_k e^{-\epsilon}, t_k]$

$$-3a(\tau) \geq 3\tau \cos \epsilon,$$

و از آن نتیجه بگیرید که برای هر $k \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ

$$\int_s^{t_k} e^{-3a(\tau) - 1.01\tau} d\tau \geq \int_{t_k e^{-\epsilon}}^{t_k} e^{-3a(\tau) - 1.01\tau} d\tau \geq c e^{(3 \cos \epsilon - 1.01)t_k},$$

که در آن $c > 0$ یک ثابت است.۳) نشان دهید که جواب $(y_1(t), y_2(t))$ وجود دارد به طوری که

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|y_1(t), y_2(t)\| > 0.$$

راهنمایی: $t = t_k e^\pi$ در نظر بگیرید.تمرین ۱۰.۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^∞ باشد به طوری که معادله $x' = f(x)$ شار φ_t رادر \mathbb{R}^n تعریف کند.

(الف) نشان دهید که

$$\varphi_t(x) = x + f(x)t + \frac{1}{2}(d_x f)f(x)t^2 + o(t^2).$$

(ب) ثابت کنید که

$$\det d_x \varphi_t = 1 + \operatorname{div} f(x)t + o(t).$$

(ج) برای یک مجموعه باز $A \subset \mathbb{R}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ ، نشان دهید که

$$\frac{d}{dt} \mu(\varphi_t(A)) = \int_{\varphi_t(A)} \operatorname{div} f,$$

که μ حجم در \mathbb{R}^n را نشان می‌دهد.

(ت) نشان دهید که اگر $\operatorname{div} f = 0$ باشد، آنگاه معادله $x' = f(x)$ نه تنها نقاط بحرانی به‌طور مجانبی

پایدار ندارد و بلکه جواب‌های تناوبی به‌طور مجانبی پایدار هم ندارد.

جواب‌ها.

۱.۳ (الف) جواب‌ها در بازه $(-\infty, 2)$ به‌طور مجانبی پایدار و جواب‌ها در بازه $[2, +\infty)$ ناپایدار هستند.

(ب) همه جواب‌ها پایدار هستند اما هیچ کدام به‌طور مجانبی پایدار نیستند.

۲.۳ (ج) ناپایدار.

(د) ناپایدار.

۴.۳ (الف) به‌طور مجانبی پایدار.

(ب) به‌طور مجانبی پایدار.

(ج) به‌طور مجانبی پایدار.

(۴) ناپایدار.

۵.۳ (الف) $(1/T) \int_0^T a(s) ds$

(ب) $\int_0^T a(s) ds < 0$

۶.۳ (الف) $\lambda(x) = 0$

$$\lambda(x) = a + |b| \text{ (ب)}$$

فصل ۴

هذلولوی بودن و مزدوج‌های توپولوژیکی

این فصل به مطالعه هذلولوی بودن و نتایج آن به‌ویژه در سطح پایداری اختصاص دارد. بعد از معرفی مختصر بر مفهوم هذلولوی بودن، یک نتیجه اساسی در مورد رفتار جواب‌ها در همسایگی یک نقطه بحرانی هذلولوی، قضیه گروبن-هارتمن^۲ را بیان می‌کنیم. این نشان می‌دهد که جواب‌های یک اختلال به‌اندازه کافی کوچک از یک معادله با یک نقطه بحرانی هذلولوی با جواب‌های معادله وردشی خطی آن مزدوج توپولوژیکی هستند. همچنین نشان می‌دهیم که مزدوج توپولوژیکی، پیوسته هولدر است. برای موضوعات اضافی خواننده را به مراجع [۷، ۱۵، ۱۹، ۲۳] ارجاع می‌دهیم.

۱.۴ نقاط بحرانی هذلولوی

در این بخش به معرفی مفهوم نقطه بحرانی هذلولوی می‌پردازیم. به یاد می‌آوریم که یک ماتریس مربعی هذلولوی است هرگاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه آن همگی ناصفر باشند (تعریف ۴۸.۲ را ببینید). حال فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 باشد.

تعریف ۱.۴. نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ با $f(x_0) = 0$ به‌طوری‌که ماتریس $d_{x_0}f$ هذلولوی است نقطه بحرانی هذلولوی از معادله $x' = f(x)$ نامیده می‌شود.

²Grobman-Hartman

برای نقطه بحرانی هذلولوی $x_0 \in \mathbb{R}^n$ از $x' = f(x)$ ، معادله خطی زیر را در نظر بگیرید

$$x' = Ax, \quad \text{که } A = d_{x_0}f.$$

به یاد می‌آوریم که جواب‌های آن به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۲.۴. برای نقطه بحرانی هذلولوی $x_0 \in \mathbb{R}^n$ از معادله $x' = f(x)$ ، فضاهای پایدار و ناپایدار از x_0 را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n : e^{At}x \rightarrow 0 \text{ وقتی } t \rightarrow +\infty\},$$

و

$$E^u = \{x \in \mathbb{R}^n : e^{At}x \rightarrow 0 \text{ وقتی } t \rightarrow -\infty\}.$$

قضیه ۳.۴. اگر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطه بحرانی هذلولوی از معادله $x' = f(x)$ باشد، آنگاه

(الف) E^s و E^u زیرفضاهای خطی از \mathbb{R}^n با $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ هستند؛

(ب) برای هر $x \in E^s$ ، $y \in E^u$ و $t \in \mathbb{R}$ ، روابط زیر را داریم

$$e^{At}x \in E^s, \quad \text{و} \quad e^{At}y \in E^u.$$

برهان. از آنجایی که ماتریس $A = d_{x_0}f$ هیچ مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر ندارد، صورت متعارف کانونی

آن را می‌توان با توجه به تجزیه $\mathbb{R}^n = F^s \oplus F^u$ به صورت زیر نوشت

$$\begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix},$$

که در آن A_s و A_u به ترتیب مربوط به بلوک‌های جردن مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی و بلوک‌های جردن

مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت است. از قضیه ۲۷.۲ نتیجه می‌شود که برای $x \in F^s$

$$e^{At}x \rightarrow 0 \text{ وقتی } t \rightarrow +\infty,$$

و برای $x \in F^u$

$$e^{At}x \rightarrow 0 \text{ وقتی } t \rightarrow -\infty.$$

ازاین‌رو

$$F^s = E^s \text{ و } F^u = E^u,$$

که خاصیت اول برقرار شد.

برای خاصیت دوم، ابتدا یادآوری می‌کنیم که برای هر $t, \tau \in \mathbb{R}$ تساوی زیر برقرار است

$$e^{A\tau}e^{At} = e^{At}e^{A\tau}$$

(تمرین ۳.۲ را ببینید). به‌ویژه، اگر $x \in E^s$ و $t \in \mathbb{R}$ ، آنگاه رابطه زیر را خواهیم داشت

$$e^{A\tau}(e^{At}x) = e^{At}(e^{A\tau}x). \quad (1.4)$$

از آنجایی که وقتی $\tau \rightarrow +\infty$ داریم $e^{A\tau}x \rightarrow 0$ ، رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم

$$e^{At}(e^{A\tau}x) \rightarrow 0 \text{ وقتی } \tau \rightarrow +\infty,$$

و از (۱.۴) نتیجه می‌شود که $e^{At}x \in E^s$. می‌توان با روشی مشابه نشان داد که اگر $y \in E^u$ و $t \in \mathbb{R}$ ، آنگاه

$$e^{At}y \in E^u \quad \square$$

با توجه به قضیه ۳.۴، فضاها E^s و E^u مرتبط با یک نقطه بحرانی هذلولوی، مجموع مستقیم را تشکیل

می‌دهد، ازاین‌رو، برای $x \in \mathbb{R}^n$ ، نقاط یکتای $y \in E^s$ و $z \in E^u$ وجود دارند به طوری که رابطه $x = y + z$

برقرار است. $P_s, P_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$P_s x = y \text{ و } P_u x = z. \quad (2.4)$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که P_u و P_s دو تبدیل خطی هستند با این خاصیت که

$$P_s(\mathbb{R}^n) = E^s \text{ و } P_u(\mathbb{R}^n) = E^u.$$

به علاوه، $P_u^2 = P_u$ و $P_s^2 = P_s$ ، یعنی، P_u و P_s دو تصویر به ترتیب روی فضاهای E^u و E^s هستند. همچنین می توان نشان داد که

$$E^s = \text{Re}G^s + \text{Im}G^s \quad \text{و} \quad E^u = \text{Re}G^u + \text{Im}G^u,$$

که در آن G^u و G^s زیرفضاهای \mathbb{C}^n هستند که به ترتیب توسط فضاهای ریشه از مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی و مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت تولید می شوند. به طور دقیق تر

$$G^s = \{x \in \mathbb{C}^n : (d_{x_0}f - \lambda Id)^k x = 0 \text{ برای } k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C} \text{ با } \text{Re}\lambda < 0\},$$

و

$$G^u = \{x \in \mathbb{C}^n : (d_{x_0}f - \lambda Id)^k x = 0 \text{ برای } k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C} \text{ با } \text{Re}\lambda > 0\}.$$

۲.۴ قضیه گروبن-هارتمن

فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 باشد به طوری که معادله $x' = f(x)$ نقطه بحرانی هذلولوی x_0 را دارد. در این بخش نشان می دهیم که جواب معادله های

$$x' = f(x) \quad \text{و} \quad y' = d_{x_0}f y,$$

به ترتیب در همسایگی های x_0 و 0 مزدوج توپولوژیکی هستند. به طور دقیق تر، و به روش مشابه با تعریف ۴.۲،

این بدان معناست که اگر $\psi_t(z)$ و $\varphi_t(z)$ به ترتیب جواب های مسئله با مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = z \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y' = d_{x_0}f y, \\ y(0) = z, \end{cases} \quad (۳.۴)$$

باشند آنگاه یک همسانریخت $h: U \rightarrow V$ وجود دارد که U و V به ترتیب همسایگی هایی از x_0 و 0 هستند،

به طوری که $h(x_0) = 0$ و هر وقت که $z, \psi_t(z) \in U$ ، رابطه زیر را خواهیم داشت

$$h(\psi_t(z)) = \varphi_t(h(z)). \quad (۴.۴)$$

این تضمین می‌کند که تصاویر فاز معادله‌های (۳.۴) به ترتیب در همسایگی‌هایی از x_0 و 0 ، همسانریخت هستند (شکل ۱.۴ را ببینید).

۱.۲.۴. اختلال‌های ماتریس‌های هذلولوی. ابتدا ما نتیجه‌ای را مبنی بر وجود مزدوج‌های توپولوژیکی برای اختلال‌های یک معادله خطی $x' = Ax$ با یک ماتریس هذلولوی A بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۴. فرض کنید A ماتریسی هذلولوی $n \times n$ باشد و فرض کنید $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی کراندار باشد به طوری که $g(0) = 0$ و برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \delta \|x - y\|. \quad (۵.۴)$$

برای هر δ به اندازه کافی کوچک، تابع پیوسته کراندار یکتا $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $\eta(0) = 0$ و

$$h \circ e^{At} = \psi_t \circ h, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (۶.۴)$$

که در آن $h = Id + \eta$ و ψ_t شاری است که توسط معادله زیر تعیین می‌شود

$$x' = Ax + g(x). \quad (۷.۴)$$

به علاوه، h همسانریخت است.

برهان. اثبات را به چند مرحله تقسیم می‌کنیم.

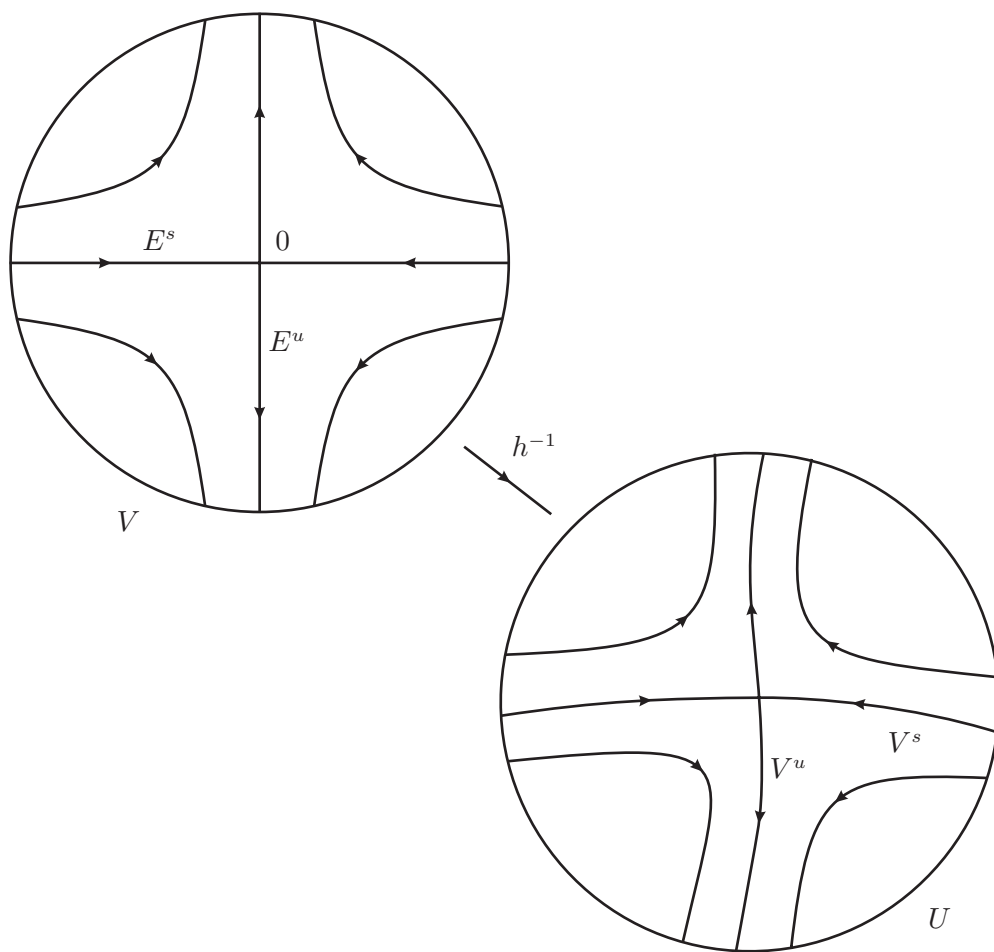
مرحله نخست. وجود جواب‌های سراسری. ابتدا نشان می‌دهیم که معادله (۷.۴) یک شار تعریف می‌کند. هر

جواب $x(t)$ برای t در بازه ماکسیمال متناظر I_x در رابطه زیر صدق می‌کند

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}g(x(s))ds \quad (۸.۴)$$

توجه کنید که تابع $(t, x) \mapsto Ax + g(x)$ پیوسته و نسبت به x به طور موضعی لپشیتز است، و از این رو، می‌توان

قضیه ۴.۳.۱ را به کار برد. از رابطه (۵.۴) با $y = 0$ و رابطه (۸.۴) نتیجه می‌شود که برای $t \geq t_0$ در I_x رابطه



شکل ۱.۴: مزدوج‌های توپولوژیکی بین جواب‌های معادلات در (۳.۴).

زیر برقرار است

$$\|x(t)\| \leq e^{\|A\|(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{\|A\|(t-s)} \delta \|x(s)\| ds.$$

با توجه به لم گرونوال (قضیه ۳۹.۱)، برای $t \geq t_0$ در I_x رابطه

$$e^{-\|A\|t} \|x(t)\| \leq e^{-\|A\|t_0} \|x(t_0)\| e^{\delta(t-t_0)},$$

یا به‌طور معادل

$$\|x(t)\| \leq e^{(\|A\|+\delta)(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad (9.4)$$

را به‌دست می‌آوریم. این ایجاب می‌کند که هر جواب $x(t)$ در بازه $[t_0, +\infty)$ تعریف شده است. درغیراین صورت، نقطه انتهایی راست b از بازه I_x متناهی خواهد بود، و با توجه به رابطه (۹.۴) رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\|x(b^-)\| \leq e^{(\|A\|+\delta)(b-t_0)} \|x(t_0)\|,$$

که با قضیه ۴۶.۱ در مورد رفتار جواب‌ها در نقاط انتهایی بازه ماکسیمال تناقض دارد. به‌روشی مشابه می‌توان نشان داد که جواب‌ها در بازه $(-\infty, t_0]$ تعریف شده‌اند.

مرحله دوم. ساخت تابع دلخواه. فرض کنید X_0 مجموعه توابع پیوسته کراندار $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ با $\eta(0) = 0$ باشد. از قضیه ۳۰.۱ نتیجه می‌شود که X_0 یک فضای متریک کامل با فاصله زیر است

$$d(\eta, \zeta) = \sup \{ \|\eta(x) - \zeta(x)\| : x \in \mathbb{R}^n \}. \quad (10.4)$$

برای هر $\eta \in X_0$ و $x \in \mathbb{R}^n$ تبدیل G در X_0 را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} G(\eta)(x) &= \int_0^{+\infty} P_s e^{A\tau} \eta(e^{-A\tau} x) d\tau - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} \eta(e^{A\tau} x) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t P_s e^{A(t-\tau)} \eta(e^{A(\tau-t)} x) d\tau - \int_t^{+\infty} P_u e^{A(t-\tau)} \eta(e^{A(t-\tau)} x) d\tau, \end{aligned} \quad (11.4)$$

که P_u و P_s به ترتیب تصاویر روی فضاهاى پایدار و ناپایدار هستند (۲.۴) را ببینید). ابتدا نشان می‌دهیم که تبدیل G خوش تعریف است. از آنجایی که ماتریس A هذلولوی است، با توجه به قضیه ۲۷.۲ ثابت‌های $c, \mu > 0$ وجود دارند به طوری که برای $\tau \geq 0$ روابط زیر برقرار هستند

$$\|P_s e^{A\tau}\| \leq c e^{-\mu\tau} \quad \text{و} \quad \|P_u e^{-A\tau}\| \leq c e^{-\mu\tau}. \quad (۱۲.۴)$$

از این رو، برای $\tau \geq 0$ ، روابط زیر برقرار هستند

$$\|P_s e^{A\tau} \eta(e^{-A\tau})\| \leq c e^{-\mu\tau} \|\eta\|_\infty, \quad (۱۳.۴)$$

و

$$\|P_u e^{-A\tau} \eta(e^{A\tau})\| \leq c e^{-\mu\tau} \|\eta\|_\infty, \quad (۱۴.۴)$$

که

$$\|\eta\|_\infty := \sup \{ \|\eta(x)\| : x \in \mathbb{R}^n \}.$$

از آنجایی که $\eta \in X_0$ داریم $\|\eta\|_\infty < +\infty$. از این رو، از روابط (۱۳.۴) و (۱۴.۴) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \|P_s e^{A\tau} \eta(e^{-A\tau} x)\| d\tau + \int_0^{+\infty} \|P_u e^{-A\tau} \eta(e^{A\tau} x)\| d\tau \\ & \leq \int_0^{+\infty} c e^{-\mu\tau} \|\eta\|_\infty d\tau + \int_0^{+\infty} c e^{-\mu\tau} \|\eta\|_\infty d\tau = \frac{2c}{\mu} \|\eta\|_\infty, \quad (۱۵.۴) \end{aligned}$$

و تبدیل G خوش تعریف است. به علاوه، با توجه به رابطه (۱۵.۴)، برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$\|G(\eta)(x)\| \leq \frac{2c}{\mu} \|\eta\|_\infty,$$

و تابع $G(\eta)$ برای هر $\eta \in X_0$ کراندار است. حال نشان می‌دهیم که $G(\eta)$ پیوسته است. برای $x \in \mathbb{R}^n$ و

$\epsilon > 0$ داده شده، از رابطه (۱۵.۴) نتیجه می‌شود که $T > 0$ وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار است

$$\int_T^{+\infty} \|P_s e^{A\tau} \eta(e^{-A\tau} x)\| d\tau + \int_T^{+\infty} \|P_u e^{-A\tau} \eta(e^{A\tau} x)\| d\tau < \epsilon.$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$\begin{aligned} \|G(\eta)(x) - G(\eta)(y)\| &< 2\epsilon + \int_0^T \|P_s e^{A\tau} [\eta(e^{-A\tau}x) - \eta(e^{-A\tau}y)]\| d\tau \\ &+ \int_0^T \|P_u e^{-A\tau} [\eta(e^{A\tau}x) - \eta(e^{A\tau}y)]\| d\tau \\ &\leq 2\epsilon + \int_0^T c e^{-\mu\tau} \|\eta(e^{-A\tau}x) - \eta(e^{-A\tau}y)\| d\tau \\ &+ \int_0^T c e^{-\mu\tau} \|\eta(e^{A\tau}x) - \eta(e^{A\tau}y)\| d\tau. \end{aligned} \quad (۱۶.۴)$$

برای هر $\delta > 0$ ، تابع $(t, x) \mapsto \eta(e^{-At}x)$ روی مجموعه $[0, T] \times \overline{B(x, \delta)}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است (چون توابع پیوسته روی هر مجموعه فشرده به‌طور یکنواخت پیوسته هستند). ازاین‌رو، $\delta > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای $y \in \overline{B(x, \delta)}$ و $\tau \in [0, T]$ رابطه زیر برقرار است

$$\|\eta(e^{-A\tau}x) - \eta(e^{-A\tau}y)\| < \epsilon.$$

به‌طور مشابه، $\delta > 0$ موجود است (که می‌توان فرض کرد که مانند قبل است) به‌طوری‌که برای $\tau \in [0, T]$ و $y \in \overline{B(x, \delta)}$ رابطه زیر برقرار است

$$\|\eta(e^{A\tau}x) - \eta(e^{A\tau}y)\| < \epsilon.$$

از رابطه (۱۶.۴) نتیجه می‌شود که برای $y \in \overline{B(x, \delta)}$ رابطه زیر برقرار است

$$\|G(\eta)(x) - G(\eta)(y)\| < 2\epsilon + 2cT\epsilon.$$

این نشان می‌دهد که تابع $G(\eta)$ پیوسته است. به‌علاوه، با توجه به رابطه (۱۱.۴)، داریم $G(\eta)(0) = 0$ و ازاین‌رو، $G(X_0) \subset X_0$ است.

مرحله سوم. شکل معادل تساوی (۶.۴). برای $\eta \in X_0$ داده‌شده، فرض کنید

$$g_\eta(x) = g(h(x)),$$

که $h = Id + \eta$. توجه می‌کنیم که تابع g_η کراندار است، زیرا g کراندار است. از رابطه (۵.۴) نتیجه می‌شود که

$$\|g_\eta(x) - g_\eta(y)\| \leq \delta\|x - y\| + \delta\|\eta(x) - \eta(y)\|.$$

به علاوه

$$g_\eta(0) = g(h(0)) = g(0) = 0,$$

و از این رو $g_\eta \in X_0$ است.

لم ۵.۴. تساوی (۶.۴) معادل با $G(g_\eta) = \eta$ است.

برهان. اگر $G(g_\eta) = \eta$ ، آنگاه از دستور لاینیتز نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} e^{-At} h(e^{At} x) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} e^{-A(t+s)} \eta(e^{A(t+s)} x) \Big|_{s=0} \\ &= e^{-At} \frac{\partial}{\partial s} e^{-As} \eta(e^{As} e^{At} x) \Big|_{s=0} \\ &= e^{-At} \frac{\partial}{\partial s} e^{-As} G(g_\eta)(e^{As} x) \Big|_{s=0} \\ &= e^{-At} \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{-\infty}^s P_s e^{-A\tau} g_\eta(e^{A\tau} x) d\tau - \int_s^{+\infty} P_u e^{-A\tau} g_\eta(e^{A\tau} x) d\tau \right) \Big|_{s=0} \\ &= e^{-At} (P_s g_\eta(x) + P_u g_\eta(x)) \\ &= e^{-At} g(h(e^{At} x)). \end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

از طرف دیگر

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-At} h(e^{At} x) = -A e^{-At} h(e^{At} x) + e^{-At} \frac{\partial}{\partial t} h(e^{At} x),$$

و از رابطه (۱۷.۴) نتیجه می‌شود که

$$-A h(e^{At} x) + \frac{\partial}{\partial t} h(e^{At} x) = g(h(e^{At} x)),$$

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial t} h(e^{At}x) = Ah(e^{At}x) + g(h(e^{At}x)).$$

این نشان می‌دهد که تابع $y(t) = h(e^{At}x)$ در معادله (۷.۴) صدق می‌کند. از آنجایی که $y(0) = h(x)$ ، برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ خواهیم داشت

$$h(e^{At}x) = \psi_t(h(x)),$$

که تساوی (۶.۴) را نتیجه می‌دهد.

اکنون، فرض می‌کنیم که (۶.۴) برقرار باشد. از آنجایی که $h = Id + \eta$ ، می‌توان این تساوی را دوباره به صورت

زیر نوشت

$$Id + \eta = \psi_t \circ h \circ e^{-At}. \quad (۱۸.۴)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرمول تغییر پارامترها در قضیه ۲۶.۲، داریم

$$\psi_t(x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} g(\psi_\tau(x)) d\tau. \quad (۱۹.۴)$$

با استفاده از روابط (۶.۴) و (۱۹.۴)، از رابطه (۱۸.۴) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \psi_t(h(e^{-At}x)) - x \\ &= e^{At}h(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} g(\psi_\tau(h(e^{-At}x))) d\tau - x \\ &= e^{At}\eta(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} g(h(e^{A(\tau-t)}x)) d\tau \\ &= e^{At}\eta(e^{-At}x) + \int_0^t e^{A\tau} g(h(e^{-A\tau}x)) d\tau. \end{aligned} \quad (۲۰.۴)$$

به علاوه، از رابطه (۱۳.۴) نتیجه می‌شود که وقتی $t \rightarrow +\infty$ رابطه زیر برقرار خواهد شد

$$\|P_s e^{At} \eta(e^{-At}x)\| \leq ce^{-\mu t} \|\eta\|_\infty \rightarrow 0,$$

و از این رو، با توجه به رابطه (۲۰.۴)، داریم

$$P_s \eta(x) = \int_0^{+\infty} P_s e^{A\tau} g(h(e^{-A\tau} x)) d\tau. \quad (21.4)$$

از طرف دیگر، از تساوی سوم در رابطه (۲۰.۴) نتیجه می‌شود که

$$e^{-At} \eta(x) = \eta(e^{-At} x) + \int_0^t e^{-A\tau} g(h(e^{A(\tau-t)} x)) d\tau.$$

با جایگزینی x با $e^{At} x$ ، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$e^{-At} \eta(e^{At} x) = \eta(x) + \int_0^t e^{-A\tau} g(h(e^{A\tau} x)) d\tau. \quad (22.4)$$

به‌طور مشابه، از رابطه (۱۴.۴) نتیجه می‌شود که وقتی $t \rightarrow -\infty$ داریم

$$\|P_u e^{-At} \eta(e^{At} x)\| \leq c e^{-\mu t} \|\eta\|_\infty \rightarrow 0$$

و از این رو، با توجه به رابطه (۲۲.۴) خواهیم داشت

$$P_u \eta(x) = - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} g(h(e^{A\tau} x)) d\tau. \quad (23.4)$$

با جمع طرفین روابط (۲۱.۴) و (۲۳.۴)، سرانجام رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \eta(x) &= P_s \eta(x) + P_u \eta(x) \\ &= \int_0^{+\infty} P_s e^{A\tau} g(h(e^{-A\tau} x)) d\tau - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} g(h(e^{A\tau} x)) d\tau \\ &= G(g \circ h)(x) = G(g_\eta)(x). \end{aligned}$$

□ بنابراین نتیجه مطلوب برقرار است.

مرحله چهارم. ساخت مزدوج. حال نشان می‌دهیم که معادله $G(g_\eta) = \eta$ یک جواب یکتای η دارد.

لم ۶.۴. برای هر δ به اندازه کافی کوچک، تابع یکتای $\eta \in X_0$ وجود دارد که در $G(g_\eta) = \eta$ صدق می‌کند.

برهان. تبدیل F در X_0 را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$F(\eta) = G(g_\eta). \quad (۲۴.۴)$$

از آنجایی که برای $\eta \in X_0$ ، $g_\eta \in X_0$ ، نتیجه می‌گیریم $F(X_0) \subset X_0$ (چون $G(X_0) \subset X_0$). حال نشان می‌دهیم که F انقباضی است. برای هر $\eta, \zeta \in X_0$ داریم

$$\begin{aligned} F(\eta)(x) - F(\zeta)(x) &= \int_{-\infty}^t P_s e^{A(t-\tau)} [g_\eta(e^{A(\tau-t)}x) - g_\zeta(e^{A(\tau-t)}x)] d\tau \\ &\quad - \int_t^{+\infty} P_u e^{A(t-\tau)} [g_\eta(e^{A(\tau-t)}x) - g_\zeta(e^{A(\tau-t)}x)] d\tau. \end{aligned}$$

از رابطه (۵.۴) نتیجه می‌شود که

$$\|g_\eta(e^{A(\tau-t)}x) - g_\zeta(e^{A(\tau-t)}x)\| \leq \delta \|\eta(e^{A(\tau-t)}x) - \zeta(e^{A(\tau-t)}x)\| \leq \delta d(\eta, \zeta),$$

و از این رو، با استفاده از رابطه (۱۲.۴)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|F(\eta)(x) - F(\zeta)(x)\| &\leq \int_{-\infty}^t c e^{-\mu(t-\tau)} \delta d(\eta, \zeta) d\tau \\ &\quad + \int_t^{+\infty} c e^{-\mu(t-\tau)} \delta d(\eta, \zeta) d\tau \\ &= \frac{2c\delta}{\mu} d(\eta, \zeta). \end{aligned}$$

از این رو

$$d(F(\eta), F(\zeta)) \leq \frac{2c\delta}{\mu} d(\eta, \zeta),$$

و برای هر δ به اندازه کافی کوچک انقباضی است. از آنجایی که X_0 یک فضای متریک کامل است و

□ $F(X_0) \subset X_0$ ، از قضیه ۳۵.۱ نتیجه می‌شود که $\eta \in X_0$ یکتا وجود دارد به طوری که $F(\eta) = \eta$.

با توجه به لم ۵.۴، تابع η داده شده توسط لم ۶.۴، در تساوی (۶.۴) صدق می‌کند. حال باقی می‌ماند که نشان دهیم که $h = Id + \eta$ همسانریخت است.

مرحله پنجم. وجود معکوس. ابتدا نشان می‌دهیم که h پوشا است. برای $y \in \mathbb{R}^n$ داده شده، معادله $h(x) = y$ جوابی به صورت $x = y + z$ دارد اگر و تنها اگر

$$z = -\eta(y + z). \quad (۲۵.۴)$$

حال قضیه نقطه ثابت براوئر را یادآوری می‌کنیم: هر تابع پیوسته $H : B \rightarrow B$ در گوی بسته $B \subset \mathbb{R}^n$ حداقل یک نقطه ثابت دارد (برای اثبات، به عنوان مثال، مرجع [۱۰] را ببینید). با به کار بردن این قضیه برای تابع

$$z \mapsto H(z) = -\eta(y + z),$$

در گوی بسته $B = \overline{B(0, \|\eta\|_\infty)}$ ، نتیجه می‌گیریم که حداقل یک نقطه $z \in B$ صادق در رابطه (۲۵.۴) وجود دارد. این نشان می‌دهد که h پوشا است.

حال نشان می‌دهیم که h یک‌به‌یک است. برای $x, y \in \mathbb{R}^n$ به طوری که $h(x) = h(y)$ ، از رابطه (۶.۴) نتیجه می‌شود که برای $t \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$h(e^{At}x) = h(e^{At}y),$$

و ازاین‌رو

$$e^{At}(x - y) = -\eta(e^{At}x) + \eta(e^{At}y). \quad (۲۶.۴)$$

اگر $0 \neq P_s(x - y)$ یا $0 \neq P_u(x - y)$ ، آنگاه سمت چپ رابطه (۲۶.۴) غیرکراندار است درحالی‌که سمت راست کراندار است. این تناقض نشان می‌دهد که

$$P_s(x - y) = P_u(x - y) = 0,$$

و از این رو $x = y$.

مرحله ششم. پیوستگی معکوس. ابتدا قضیه دامنه نوردایی را به یاد می‌آوریم: اگر $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع پیوسته یک‌به‌یک روی مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $V = f(U)$ باز است و $f|_U : U \rightarrow V$ همسانریخت است (برای اثبات، به‌عنوان مثال، مرجع [۱۰] را ببینید). از آنجایی که تابع $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته و پوشا است، از قضیه نتیجه می‌شود که h همیومورفیسم است. \square

۲.۲.۴. نقاط بحرانی هذلولوی. اکنون نتیجه‌ای را که در ابتدای بخش ۲.۴ به‌عنوان نتیجه قضیه ۴.۴ توضیح

داده شده است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۴. (قضیه گروپمن-هارتمن). فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 باشد و فرض کنید $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطه بحرانی هذلولوی از معادله $x' = f(x)$ باشد. اگر $\varphi_t(z)$ و $\psi_t(z)$ به ترتیب جواب‌های مسئله‌های با مقدار اولیه (۳.۴) باشند، آنگاه همسانریخت $h : U \rightarrow V$ موجود است، که U و $V = h(U)$ به ترتیب همسایگی‌هایی از x_0 و 0 هستند، به طوری که $h(x_0) = 0$ و هر وقت $z, \psi_t \in U$ رابطه $h(\psi_t(z)) = \varphi_t(h(z))$ برقرار است.

برهان. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $x_0 = 0$. واضح است که با تغییر متغیر $y = x - x_0$ معادله $x' = f(x)$ به معادله $y' = F(y)$ تبدیل می‌شود، که در آن $F(y) = f(x_0 + y)$. به علاوه، $F(0) = f(x_0) = 0$.

با اختیار $x_0 = 0$ ، می‌نویسیم

$$f(x) = Ax + g(x),$$

که

$$A = d_0 f \quad \text{و} \quad g(x) = f(x) - Ax.$$

توجه می‌کنیم که ماتریس A هذلولوی است و تابع g از کلاس C^1 است. به علاوه، $g(0) = 0$. برای اعمال قضیه ۴.۴، باید خاصیت (۵.۴) را بررسی کنیم. با این حال، به‌طور کلی، این خاصیت ممکن است رد شود، که ما را به

اصلاح تابع g در خارج از همسایگی صفر سوق می‌دهد. به‌طور دقیق‌تر، برای $\delta > 0$ در قضیه ۴.۴، $r > 0$ را آن‌قدر کوچک اختیار می‌کنیم که

$$\sup \{ \|d_x g\| : x \in B(0, r) \} \leq \delta/3 \quad (۲۷.۴)$$

(این همیشه امکان‌پذیر است، زیرا تابع $d_x g \mapsto x$ پیوسته و $d_0 g = 0$ است). از آنجایی که $g(0) = 0$ ، از قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود که

$$\sup \{ \|g(x)\| : x \in B(0, r) \} \leq \delta r/3. \quad (۲۸.۴)$$

اکنون تابع $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ از کلاس C^1 را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\alpha(x) = 1, x \in B(0, r/3) \quad (\text{الف})$$

$$\alpha(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r) \quad (\text{ب})$$

$$\sup \{ \|d_x \alpha\| : x \in \mathbb{R}^n \} \leq 2/r \quad (\text{ج})$$

برای تابع $\bar{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 تعریف‌شده با ضابطه

$$\bar{g}(x) = \alpha(x)g(x), \quad (۲۹.۴)$$

داریم $\bar{g}(0) = 0$. به‌علاوه، با توجه به روابط (۲۷.۴) و (۲۸.۴) رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|d_x \bar{g}\| &= \|d_x \alpha g(x) + \alpha(x) d_x g\| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|d_x \alpha\| \sup_{x \in B(0, r)} \|g(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|d_x g\| \\ &< \frac{2}{r} \cdot \frac{\delta r}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta. \end{aligned} \quad (۳۰.۴)$$

از این‌رو، از قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود که خاصیت (۵.۴) برای تابع \bar{g} برقرار است. از این‌رو، می‌توان قضیه

۴.۴ را برای به‌دست آوردن همسانریخت $h = Id + \eta$ که در رابطه زیر صدق می‌کند به‌کار برد

$$h \circ e^{At} = \bar{\psi}_t \circ h, \quad t \in \mathbb{R},$$

که $\bar{\psi}_t(z)$ جوابی از مسئله با مقدار اولیه زیر است

$$\begin{cases} x' = Ax + \bar{g}(x), \\ g(0) = z. \end{cases}$$

اما از آنجایی که \bar{g} روی گوی $B(0, r/3)$ منطبق با g است، اگر $\|z\| < r/3$ و $\|\psi_t(z)\| < r/3$ آنگاه $\|\psi_t(z)\| < r/3$ و $\|z\| < r/3$ که $z \in \mathbb{R}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ را برای هر (۴.۴) تساوی این، $\psi_t(z) = \bar{\psi}_t(z)$ صدق کند، نتیجه می‌دهد. \square

۳.۲.۴. پایداری تحت اختلال ها. لازم به ذکر است که قضایای ۴.۴ و ۷.۴ مستلزم این نیست که فضاهای

پایدار و ناپایدار دارای بُعد مثبت باشند، یعنی، فضاها شامل حالتی نیز می‌شوند که یکی از آنها کل فضای \mathbb{R}^n باشد. این مشاهده نتیجه زیر را دارد.

قضیه ۸.۴. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ هذلولوی باشد و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع کراندار با $g(0) = 0$ باشد به طوری که خاصیت (۵.۴) برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ برقرار باشد.

(الف) اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه A همگی منفی باشد و δ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه جواب صفر معادله (۷.۴) به طور مجانبی پایدار است.

(ب) اگر A حداقل دارای یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت باشد و δ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه جواب صفر معادله (۷.۴) ناپایدار است.

برهان. از رابطه (۶.۴) نتیجه می‌شود که

$$\psi_t = h \circ e^{At} \circ h^{-1}, \quad (۳۱.۴)$$

که h همسانریخت داده شده در قضیه ۴.۴ است. از آنجایی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه A همگی منفی هستند، وقتی $t \rightarrow +\infty$ داریم $\|e^{At}\| \rightarrow 0$. از این رو، از آنجایی که $h(0) = 0$ ، از رابطه (۳۱.۴) نتیجه می‌شود که مبدأ به طور مجانبی پایدار است. به طور مشابه، وقتی A دارای حداقل یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت باشد، وقتی $t \rightarrow +\infty$ داریم $\|e^{At}\| \rightarrow +\infty$ ، و از رابطه (۳۱.۴) نتیجه می‌شود که مبدأ ناپایدار است. \square

نتایج زیر یک نتیجه از قضیه ۷.۴ است.

قضیه ۹.۴. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 باشد و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطه بحرانی هذلولوی معادله $x' = f(x)$ باشد.

(الف) اگر $d_{x_0}f$ ماتریس تنها دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی باشد، آنگاه نقطه بحرانی x_0 به طور مجانبی پایدار است.

(ب) اگر $d_{x_0}f$ ماتریس حداقل دارای یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت باشد، آنگاه نقطه بحرانی x_0 ناپایدار است.

برهان. کافی است که تساوی (۴.۴) را در نظر بگیریم و به روشی مشابه به برهان قضیه ۸.۴ پیش برویم. \square

توجه داریم که خاصیت اول در قضیه ۹.۴، نتیجه‌ای از قضیه ۱۳.۳ است.

۳.۴ مزدوج‌های هولدر

طبیعی است که بپرسیم آیا همسانریخت‌ها در قضایای ۴.۴ و ۷.۴ از نظم بیشتری برخوردار هستند. متأسفانه، در حالت کلی، به دست آوردن مزدوج‌های کلاس C^1 ممکن نیست، اگرچه بحث مفصل خارج از محدوده کتاب است. با این حال، می‌توان نشان داد که آن همسانریخت‌ها همیشه پیوسته هولدر هستند. به طور دقیق‌تر، نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۱۰.۴. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ هذلولوی باشد و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع کراندار با $g(0) = 0$ باشد به طوری که خاصیت (۵.۴) برقرار باشد. برای $\alpha \in (0, 1)$ به اندازه کافی کوچک داده شده، و $K > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که همسانریخت h در قضیه ۴.۴ برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ با $\|x - y\| < 1$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|h(x) - h(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha.$$

برهان. فرض کنید X_0 مجموعه توابع پیوسته کراندار $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ با $\eta(0) = 0$ باشد. برای $\alpha \in (0, 1)$ داده شده و $K > 0$ ، زیرمجموعه $X_\alpha \subset X_0$ متشکل از توابع $\eta \in X_0$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|\eta(x) - \eta(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha.$$

با استفاده از قضیه ۳۰.۱، به آسانی می‌توان نشان داد که X_α یک فضای متریک کامل با فاصله در رابطه (۱۰.۴) است. از این رو، برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که تبدیل F در رابطه (۲۴.۴) در رابطه $F(X_\alpha) \subset X_\alpha$ صدق می‌کند. در واقع، پیش از این از برهان قضیه ۴.۴ می‌دانیم که F در X_0 انقباضی است. فرض کنید $\eta \in X_\alpha$ داریم

$$\|h(x) - h(y)\| = \|x - y + \eta(x) - \eta(y)\| \leq \|x - y\| + \|\eta(x) - \eta(y)\|.$$

از آنجایی که $\eta \in X_\alpha$ ، هرگاه $\|x - y\| < 1$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\| &\leq \|x - y\| + K\|x - y\|^\alpha \\ &\leq (1 + K)\|x - y\|^\alpha. \end{aligned} \quad (۳۲.۴)$$

حال تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} W &= F(\eta)(x) - F(\eta)(y) \\ &= \int_{-\infty}^t P_s e^{A(t-\tau)} [g_\eta(e^{A(\tau-t)}x) - g_\eta(e^{A(\tau-t)}y)] d\tau \\ &\quad - \int_t^{+\infty} P_u e^{A(t-\tau)} [g_\eta(e^{A(\tau-t)}x) - g_\eta(e^{A(\tau-t)}y)] d\tau, \end{aligned}$$

که در آن $g_\eta = g \circ h$. از برهان قضیه ۴.۴، می‌دانیم که $g_\eta \in X_0$. بنابراین، از روابط (۵.۴) و (۱۲.۴) نتیجه می‌شود که

$$\|W\| \leq c \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-\tau)} \delta \| \eta(e^{A(\tau-t)}x) - \eta(e^{A(\tau-t)}y) \| d\tau$$

$$+c \int_t^{+\infty} e^{-\mu(t-\tau)} \delta \|\eta(e^{A(\tau-t)}x) - \eta(e^{A(\tau-t)}y)\| d\tau.$$

از طرف دیگر، با توجه به رابطه (۱۱.۲)، برای $t \in \mathbb{R}$ ، داریم $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\| \cdot |t|}$. از این رو، با توجه به رابطه (۳۲.۴)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|W\| &\leq c\delta(1+K) \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-\tau)} \|e^{A(\tau-t)}(x-y)\|^\alpha d\tau \\ &\quad + c\delta(1+K) \int_t^{+\infty} e^{-\mu(t-\tau)} \|e^{A(\tau-t)}(x-y)\|^\alpha d\tau \\ &\leq c\delta(1+K) \|x-y\|^\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-\tau)} e^{\alpha\|A\|(t-\tau)} d\tau \\ &\quad + c\delta(1+K) \|x-y\|^\alpha \int_t^{+\infty} e^{-\mu(\tau-t)} e^{\alpha\|A\|(\tau-t)} d\tau \\ &= c\delta(1+K) \|x-y\|^\alpha \int_{-\infty}^t e^{-(\mu-\alpha\|A\|)(t-\tau)} d\tau \\ &\quad + c\delta(1+K) \|x-y\|^\alpha \int_t^{+\infty} e^{-(\mu-\alpha\|A\|)(\tau-t)} d\tau. \end{aligned}$$

برای هر α به اندازه کافی کوچک، رابطه $\mu - \alpha\|A\| > 0$ برقرار است، و از این رو

$$\|W\| \leq \frac{2c\delta(1+K)}{\mu - \alpha\|A\|} \|x-y\|^\alpha. \quad (۳۳.۴)$$

از این رو، برای هر δ به اندازه کافی کوچک، برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ با $\|x-y\| < 1$ از رابطه (۳۳.۴) نتیجه می‌شود که

$$\|F(\eta)(x) - F(\eta)(y)\| \leq K \|x-y\|^\alpha.$$

□

این برهان قضیه را کامل می‌کند.

تحت مفروضات قضیه ۱۰.۴، می‌توان نشان داد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ با $\|x-y\| < 1$ رابطه زیر برقرار

است

$$\|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)\| \leq \|x-y\|^\alpha.$$

سرانجام، α و δ را به اندازه کافی کوچک تر می‌کند.

اکنون حالت خاصی از نقطه بحرانی هذلولوی را در نظر می‌گیریم. نتیجه زیر یک نتیجه ساده از قضایای ۷.۴ و ۱۰.۴ است.

قضیه ۱۱.۴. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 باشد و $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقطه بحرانی هذلولوی معادله $x' = f(x)$ باشد. اگر $\psi_t(z)$ و $\varphi_t(z)$ به ترتیب، جواب مسئله‌های مقدار اولیه (۳.۴) باشند، آنگاه برای همسازینخت h در قضیه ۷.۴، برای $\alpha \in (0, 1)$ به اندازه کافی کوچک داده شده و $K > 0$ ، $d > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in U$ با $\|x - y\| < d$ رابطه زیر برقرار است

$$\|h(x) - h(y)\| \leq K \|x - y\|^\alpha.$$

۴.۴ پایداری ساختاری

همچنین نتیجه‌ای در مورد وجود مزدوج‌های توپولوژیکی برای اختلال‌های خطی و غیرخطی دلخواه مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۴. (پایداری ساختاری). فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 باشد و x_0 نقطه بحرانی هذلولوی معادله $x' = f(x)$ باشد. اگر $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^1 باشد و

$$a := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x) - g(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|d_x f - d_x g\|,$$

به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه جواب‌های معادله‌های

$$x' = f(x) \quad \text{و} \quad x' = g(x),$$

به ترتیب، در همسازگی‌های x_0 و x_g مزدوج توپولوژیکی هستند، که نقطه بحرانی یکنای معادله $x' = g(x)$ در همسازگی به اندازه کافی کوچک از x_0 است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که معادله $x' = g(x)$ دارای نقطه بحرانی یکنای x_g در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از x_0 است، به شرطی که a به اندازه کافی کوچک باشد. برای این منظور، تابع $H : C^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ که با ضابطه زیر تعریف شده است را در نظر می‌گیریم

$$H(g, y) = g(y),$$

که $C^1(\mathbb{R}^n)$ مجموعه همه توابع $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 است به طوری که

$$\|g\|_{C^1} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|g(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|d_x g\| < +\infty.$$

می‌توان نشان داد که قضیه تابع ضمنی در فضای $C^1(\mathbb{R}^n)$ وقتی مجهز به نرم $\|\cdot\|_{C^1}$ باشد، برقرار است. اکنون نشان می‌دهیم که H با اختیار نرم

$$\|g(t, y)\| = \|g\|_{C^1} + \|y\|,$$

در $C^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 است. برای هر $(g, y), (h, z) \in C^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ و $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{H((g, y) + \epsilon(h, z)) - H(g, y)}{\epsilon} &= \frac{(g + \epsilon h)(y + \epsilon z) - g(y)}{\epsilon} \\ &= \frac{g(y + \epsilon z) - g(y)}{\epsilon} + h(y + \epsilon z) \\ &\rightarrow d_y g z + h(y). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} A : &= H((g, y) + (h, z)) - H(g, y) - h(y) - d_y g z \\ &= (g + h)(y + z) - g(y) - h(z) - d_y g z \\ &= [g(y + z) - g(y) - d_y g z] + [h(y + z) - h(y)]. \end{aligned}$$

از آنجایی که

$$h(y+z) - h(y) = \int_0^1 d_{y+tz} h z dt,$$

داریم

$$\|h(y+z) - h(y)\| \leq \|h\|_{C^1} \|z\|,$$

و از این رو، وقتی $\|(h, z)\| \rightarrow 0$ رابطه زیر برقرار است

$$\frac{\|A\|}{\|(h, z)\|} \leq \frac{\|g(y+z) - g(y) - d_y g z\|}{\|z\|} + \frac{\|h\|_{C^1} \|z\|}{\|h\|_{C^1} + \|z\|} \rightarrow 0.$$

این نشان می‌دهد که تابع H مشتق دارد، که به صورت زیر تعیین می‌شود

$$d_{(g,y)} H(h, z) = h(y) + d_y g z. \quad (۳۴.۴)$$

به منظور بررسی اینکه H از کلاس C^1 است، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} & \| (d_{(g,y)} H - d_{(\bar{g}, \bar{y})} H)(y, z) \| \\ & \leq \| h(y) - h(\bar{y}) \| + \| (d_y g - d_{\bar{y}} \bar{g}) z \| \\ & \leq \| h \|_{C^1} \| y - \bar{y} \| + \| d_y g - d_{\bar{y}} \bar{g} \| \cdot \| z \| + \| d_y \bar{g} - d_{\bar{y}} \bar{g} \| \cdot \| z \| \\ & \leq \| h \|_{C^1} \| y - \bar{y} \| + \| g - \bar{g} \|_{C^1} \| z \| + \| d_y \bar{g} - d_{\bar{y}} \bar{g} \| \cdot \| z \|, \end{aligned}$$

و از این رو

$$\| (d_{(g,y)} H - d_{(\bar{g}, \bar{y})} H) \| \leq \| y - \bar{y} \| + \| g - \bar{g} \|_{C^1} + \| d_y \bar{g} - d_{\bar{y}} \bar{g} \|. \quad (۳۵.۴)$$

از آنجایی که $d\bar{g}$ پیوسته است، به آسانی از رابطه (۳۵.۴) نتیجه می‌شود که تابع dH نیز پیوسته است. به علاوه، با

توجه به رابطه (۳۴.۴)، داریم

$$\frac{\partial H}{\partial y}(g, y) z = d_{(g,y)} H(0, z) = d_y g z,$$

و از این رو

$$\frac{\partial H}{\partial y}(f, x_0) = d_{x_0} f.$$

از آنجایی که ماتریس $d_{x_0} f$ معکوس پذیر است (چون آن هذلولوی است)، از قضیه تابع ضمنی نتیجه می شود که برای $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ با $\|f - g\|_{C^1}$ به اندازه کافی کوچک، $x_g \in \mathbb{R}^n$ یکتا در همسایگی به اندازه کافی کوچک از x_0 وجود دارد به طوری که $g(x_g) = 0$. به علاوه، تابع $g \mapsto x_g$ پیوسته است.

حال جفت معادلات زیر را در نظر می گیریم

$$x' = f(x) \quad \text{و} \quad y' = d_{x_0} f y, \quad (۳۶.۴)$$

و

$$x' = g(x) \quad \text{و} \quad y' = d_{x_g} g y. \quad (۳۷.۴)$$

با توجه به قضیه گروبن-هارتمن (قضیه ۷.۴) مزدوج های توپولوژیکی بین جواب های معادله های (۳۶.۴) به ترتیب در همسایگی های نقاط x_0 و 0 ، همچنین بین جواب های معادله های (۳۷.۴) به ترتیب در همسایگی های نقاط x_g و 0 وجود دارد. برای تکمیل اثبات، کافی است مشاهده کنیم که از آنجایی که مقادیر ویژه یک ماتریس به طور پیوسته با درایه های آن تغییر می کند و تابع $g \mapsto x_g$ پیوسته است، برای $\|f - g\|_{C^1}$ به اندازه کافی کوچک ماتریس $d_{x_g} g$ نیز هذلولوی است و

$$m(d_{x_g} g) = m(d_{x_0} f),$$

که در آن $m(A)$ تعداد مقادیر ویژه با احتساب تکرار ماتریس مربعی A با قسمت حقیقی مثبت است. از این رو، از قضیه ۵۰.۲ نتیجه می شود که جواب های معادله های $y' = d_{x_0} f y$ و $y' = d_{x_g} g y$ مزدوج توپولوژیکی هستند. از آنجایی که ترکیب مزدوج های توپولوژیکی باز هم مزدوج توپولوژیکی است، نتیجه مطلوب را به دست می آوریم. \square

۵.۴ تمرین‌ها

تمرین ۱.۴. تمام نقاط بحرانی هذلولوی معادلات تعریف شده با توابع زیر را پیدا کنید

$$(1) f(x) = x(x - 1);$$

$$(2) f(x) = x^3;$$

$$(3) f(x, y) = (x + y, y - x^2).$$

تمرین ۲.۴. فضاها E^u و E^s از مبدأ را برای توابع زیر مشخص کنید

$$(1) f(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};$$

$$(2) f(x, y) = (x - y^2, x^2 - y).$$

تمرین ۳.۴. تحت مفروضات قضیه ۴.۴، نشان دهید که اگر تبدیل h صادق در رابطه (۶.۴) دیفرانسیل‌پذیر

باشد، آنگاه

$$(1) d_{e^{At}x} h e^{At} = d_{h(x)} \psi_t d_x h;$$

$$(2) d_{e^{At}x} h A e^{At} x = A h(e^{At} x) + g(h(e^{At} x));$$

$$(3) B e^{At} = d_0 \psi_t B, \text{ که } B = d_0 h;$$

$$(4) d_x h A x = A h(x) + g(h(x)).$$

تمرین ۴.۴. ثابت کنید $h(x, y) = (x, y + x^4/5)$ مزدوج دیفرانسیل‌پذیر بین جواب‌های معادله‌های زیر هست

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + x^3. \end{cases}$$

تمرین ۵.۴. روی پایداری جواب صفر معادله زیر بحث کنید

$$\begin{cases} x' = x - 2 \sin x + y, \\ y' = y + xy. \end{cases}$$

تمرین ۶.۴. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = yf(x, y), \\ y' = -xf(x, y), \end{cases} \quad (۳۸.۴)$$

که در آن $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(y - x^2 - 2)$.

(الف) تصویر فاز را رسم کنید.

(ب) نشان دهید که همه جوابها سراسری هستند.

(ج) همه مدارهای هموکلیتیک را پیدا کنید.

(د) همه مدارهای تناوبی را پیدا کنید.

(ه) نشان دهید که در یک همسایگی از مبدأ دوره‌های $T(r)$ از مدارهای تناوبی، که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، برای

$a \neq 0$ در $T(r) = \pi + ar^2 + o(r^2)$ صدق می‌کند.

(و) پیدا کنید که آیا جوابهای معادله (۳۸.۴) از نظر توپولوژیکی با جوابهای معادله خطی زیر در یک

همسایگی از مبدأ مزدوج هستند یا خیر؟

$$\begin{cases} x' = yf(0, 0), \\ y' = -xf(0, 0). \end{cases}$$

تمرین ۷.۴. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x' = g(x, y), \\ y' = -xg(x, y), \end{cases}$$

که

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)[y^2 - (x^2 + 2)^2][x^2 - (y^2 + 2)^2].$$

(الف) تصویر فاز را رسم کنید.

(ب) همه جواب‌های سراسری را پیدا کنید.

(ج) همه مدارهای هموکلینیک را پیدا کنید.

(د) همه مدارهای تناوبی را پیدا کنید.

(ه) نشان دهید که در یک همسایگی از مبدأ تناوب‌های $T(r)$ از مدارهای تناوبی برای $r \neq 0$ در $T'(r) \neq 0$ صدق می‌کند.

تمرین ۸.۴. معادله $x'' + \sin x = 0$ را در نظر بگیرید.

(الف) یک انتگرال برای معادله پیدا کنید.

(ب) تصویر فاز را رسم کنید.

(ج) پایداری همه نقاط بحرانی را مشخص کنید.

(د) پیدا کنید که آیا مدارهای تناوبی از دوره بزرگ دلخواه وجود دارند.

(ه) پیدا کنید که آیا مدارهای تناوبی از دوره کوچک دلخواه وجود دارند.

(و) پیدا کنید که آیا مدارهای تناوبی از دوره π^4 وجود دارند.

جواب‌ها .

۱.۴ (الف) ۰ و ۱.

(ب) هیچ نقطه بحرانی وجود ندارد.

(ج) $(0, 0)$ و $(-1, 1)$.

۲.۴ (الف) $E^u = \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\}$ و $E^s = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2$.

(ب) $E^u = \mathbb{R} \times \{0\}$ و $E^s = \{0\} \times \mathbb{R}$.

۵.۴ ناپایدار است.

۶.۴ (ج) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \setminus \{(0, 2)\}$.

(د) $r \in (0, 1) \cup (1, 2)$ با $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$

(ه) آنها نیستند.

۷.۴ (ب) همه جواب‌ها سراسری هستند.

(ج) هیچ مدار هموکلیتیکی وجود ندارد.

(د) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ با $r \in (0, 1) \cup (1, 2)$

۸.۴ (الف) $y^2/2 - \cos x$.

(ج) $((2n+1)\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$ ناپایدار است و $(2n\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$ پایدار است اما به‌طور مجانبی پایدار

نیست.

(د) بله.

(ه) خیر.

(و) بله.

فصل ۵

وجود خمینه‌های ناوردا

در این فصل، به مطالعه نتایج هذلولوی بودن ادامه می‌دهیم. به‌طور خاص، قضیه هادامارد-پرون را برای وجود خمینه‌های ناوردای مماس بر فضاهای پایدار و ناپایدار یک نقطه بحرانی هذلولوی برقرار می‌کنیم. در برهان‌ها از قضیه نقطه ثابت برای انقباض در یک فضای متریک کامل (قضیه ۳۵.۱)، و از قضیه انقباض تار (قضیه ۳۸.۱) استفاده می‌کنیم. برای مباحث بیشتر، خواننده را به [۷، ۱۸، ۱۹، ۲۳] ارجاع می‌دهیم.

۱.۵ نمادهای پایه‌ای

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت از کلاس C^1 و x_0 یک نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $\varphi_t(z)$ و $\psi_t(z)$ به ترتیب جواب‌های مسائل مقادیر اولیه در (۳.۴) باشند. طبق قضیه گروپمن-هارتمن (قضیه ۷.۴)، یک همسانریخت $h : U \rightarrow V$ که U و V به ترتیب همسایگی‌های x_0 و 0 هستند موجود است به‌گونه‌ای که $h(x_0) = 0$ و معادله

$$h(\psi_t(z)) = \varphi_t(h(z)), \quad (1.5)$$

برای $z, \psi_t(z) \in U$ برقرار باشد. به‌خصوص، h^{-1} هر مدار $\varphi_t(h(z))$ از معادله خطی $y' = Ay$ را که $A = d_{x_0}f$ ، به‌توی مدار $\psi_t(z)$ در معادله $x' = f(x)$ تبدیل می‌کند. این، رفتار کیفی را در شکل ۱.۴ به‌دست

می‌دهد. علاوه بر آن، فضاها پایدار و ناپایدار E^s و E^u (تعریف ۲.۴ را ببینید) توسط همسانریخت h^{-1} به روی مجموعه‌های

$$V^s = h^{-1}(E^s \cap V), \quad V^u = h^{-1}(E^u \cap V), \quad (۲.۵)$$

نگاشته می‌شوند. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که مجموعه V برای $t > 0$ در روابط

$$\varphi_t(E^s \cap V) \subset E^s \cap V, \quad \varphi_{-t}(E^u \cap V) \subset E^u \cap V \quad (۳.۵)$$

صدق می‌کند. در واقع، با استفاده از ساختار برهان قضیه ۵۰.۲، می‌توان نشان داد که مجموعه‌های باز $B^s \subset E^s$ و $B^u \subset E^u$ شامل مبدأ، موجود است به گونه‌ای که برای هر $t > 0$

$$\varphi_t(B^s) \subset B^s, \quad \varphi_{-t}(B^u) \subset B^u.$$

به عبارت دیگر، برای $r > 0$ داده شده می‌توان

$$B^s = \left\{ x \in E^s : \int_0^{+\infty} \|e^{At}x\|^2 dt < r \right\},$$

و

$$B^u = \left\{ x \in E^u : \int_{-\infty}^0 \|e^{At}x\|^2 dt < r \right\},$$

را در نظر گرفت. در این صورت، مجموعه $V = B^s \times B^u$ برای هر $t > 0$ در (۳.۵) صدق می‌کند. علاوه بر آن، با انتخاب r به اندازه کافی کوچک، می‌توان فرض کرد که $U = h^{-1}(B^s \times B^u)$ مجموعه U باز در حکم قضیه گروبن-هادامارد (قضیه ۷.۴) است. در ادامه، همیشه همین انتخاب‌ها را انجام می‌دهیم.

قضیه ۱.۵. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت از کلاس C^1 و x_0 یک نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ باشد. در این صورت

$$V^s = \{x \in U : \psi_t(x) \in U, t > 0\}, \quad (۴.۵)$$

و

$$V^u = \{x \in U : \psi_t(x) \in U, t < 0\}. \quad (۵.۵)$$

علاوه بر آن، برای $t > 0$ داریم

$$\psi_t(V^s) \subset V^s, \psi_{-t}(V^u) \subset V^u. \quad (۶.۵)$$

برهان. در ابتدا، توجه کنید که

$$E^s \supset \{x \in V : \varphi_t(x) \in V, t > 0\},$$

و

$$E^u \supset \{x \in V : \varphi_t(x) \in V, t < 0\},$$

که از صورت جردن متعارف ماتریس $d_{x_0}f$ نتیجه می‌شود. بنابراین، با استفاده از (۳.۵)،

$$E^s \cap V = \{x \in V : \varphi_t(x) \in V, t > 0\},$$

و

$$E^u \cap V = \{x \in V : \varphi_t(x) \in V, t < 0\},$$

به دست می‌آیند. با استفاده از (۱.۵) و (۲.۵) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} V^s &= h^{-1}(E^s \cap V) \\ &= \{h^{-1}(x) \in h^{-1}(V) : (\varphi_t \circ h)(h^{-1}(x)) \in V, t > 0\} \\ &= \{h^{-1}(x) \in U : (h \circ \psi_t)(h^{-1}(x)) \in V, t > 0\} \\ &= \{h^{-1}(x) \in U : \psi_t(h^{-1}(x)) \in U, t > 0\}, \end{aligned}$$

که (۴.۵) را اثبات می‌کند. رابطه (۵.۵) نیز به طریق مشابه به دست می‌آید. در پایان، روابط شمول در (۶.۵) به سادگی از (۳.۵) نتیجه می‌شود. در واقع، با اعمال h^{-1} بر نخستین رابطه شمول، رابطه

$$(h^{-1} \circ \varphi_t)(E^s \cap V) \subset h^{-1}(E^s \cap V) = V^s,$$

را برای $t > 0$ به دست می‌آوریم ولی از آنجا که $h^{-1} \circ \varphi_t = \psi_t \circ h^{-1}$ ، برای $t > 0$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \psi_t(V^s) &= (\psi_t \circ h^{-1})(E^s \cap V) \\ &= (h^{-1} \circ \varphi_t)(E^s \cap V) \subset V^s. \end{aligned}$$

رابطه شمول دوم در (۶.۵) به روش مشابه حاصل می‌شود. \square

۲.۵ قضیه هادامارد-پرون

در حقیقت، اگر f از کلاس C^k باشد، آنگاه مجموعه‌های V^u و V^s در (۲.۵)، به ترتیب خمینه‌هایی از کلاس C^k و مماس به فضاهای E^u و E^s در نقطه x_0 هستند (شکل ۱.۵ را ببینید). این بدین معنی است که در یک همسایگی از x_0 مجموعه‌های V^u و V^s نمودار توابعی از کلاس C^k هستند. این مفهوم نتیجه بعدی است.

قضیه ۲.۵. (هادامارد-پرون).^۱ فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاهی از کلاس C^k برای k ای در \mathbb{N} بوده و x_0 یک نقطه بحرانی هذلولوی برای معادله $x' = f(x)$ باشد. در این صورت، همسایگی B از x_0 وجود دارد به گونه‌ای که مجموعه‌های $V^u \cap B$ و $V^s \cap B$ خمینه‌هایی از کلاس C^k شامل x_0 بوده و در

$$T_{x_0}(V^s \cap B) = E^s, \quad T_{x_0}(V^u \cap B) = E^u,$$

صدق می‌کنند.

ما قضیه را فقط برای حالت $k = 1$ ثابت می‌کنیم (برای حالت کلی، می‌توانید [۲] را ببینید). برهان (برای

حالت $k = 1$) به این صورت است که نشان می‌دهیم در یک همسایگی B از x_0 مجموعه‌های $V^u \cap B$ و $V^s \cap B$

^۱Hadamard-Ferron theorem

نمودار نگاشت‌های

$$\varphi : E^s \cap B \rightarrow E^u, \quad \psi : E^u \cap B \rightarrow E^s, \quad (۷.۵)$$

از کلاس C^1 هستند. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} V^s \cap B &= \{(x, \varphi(x)) : x \in E^s \cap B\}, \\ V^u \cap B &= \{(\psi(x), x) : x \in E^u \cap B\}. \end{aligned} \quad (۸.۵)$$

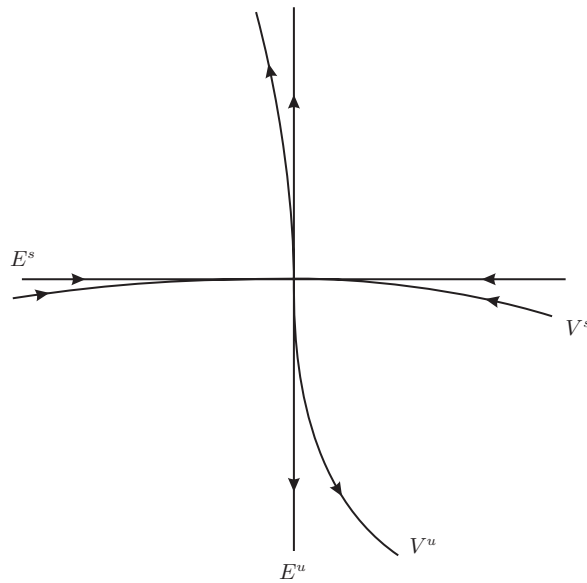
استدلال از دو قسمت اصلی تشکیل شده است: ابتدا، نشان می‌دهیم که نگاشت‌های لپشیتز φ و ψ (تعریف ۳۱.۱ را ببینید) صادق در (۸.۵) موجودند و سپس نشان می‌دهیم که این نگاشت‌ها از کلاس C^1 هستند. روش‌های استفاده‌شده در هر قسمت از برهان دارای ماهیت متفاوتی هستند. برای شفافیت برهان، در فصل ۳.۵ نشان می‌دهیم که نگاشت‌های لپشیتز φ و ψ موجودند و همواری آنها را در فصل ۴.۵ ثابت می‌کنیم. با الهام از قضیه ۲.۵ مفاهیم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۵. برای یک نگاشت $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 و یک نقطه بحرانی هذلولوی x_0 معادله $x' = f(x)$ مجموعه‌های $V^u \cap B$ و $V^s \cap B$ در قضیه ۲.۵، به ترتیب خمینه‌های (موضعی) پایدار و ناپایدار در x_0 نامیده می‌شوند.

با توجه به روابط شمول در (۶.۵)، متداول است که بگوییم خمینه‌های پایدار و ناپایدار، خمینه‌های ناوردا هستند.

۳.۵ وجود خمینه‌های لپشیتز ناوردا

در این فصل وجود نگاشت‌های لپشیتز φ و ψ همانند روابط (۷.۵) را که در (۸.۵) صدق می‌کنند اثبات می‌کنیم.

شکل ۱.۵: خمینه‌های V^u و V^s .

قضیه ۴.۵. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی از کلاس C^1 و x_0 یک نقطه بحرانی هذلولوی معادله $x' = f(x)$ باشد. در این صورت، همسایگی B از x_0 و نگاشت‌های لپشیتز

$$\varphi : E^s \cap B \rightarrow E^u, \quad \psi : E^u \cap B \rightarrow E^s, \quad (9.5)$$

موجودند که در رابطه (۸.۵) صدق می‌کنند.

برهان. فقط مجموعه $V^s \cap B$ را در نظر می‌گیریم، چون نتیجه برای $V^u \cap B$ با روش مشابه به دست می‌آید. به عبارت دیگر، فرض کنید $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت $g(x) = -f(x)$ باشد. توجه کنید که اگر $\psi_t(x_0)$ جواب معادله $x' = f(x)$ با $x(0) = x_0$ برای t در بازه ماکسیمال $I_{x_0} = (a, b)$ باشد، آنگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\frac{d}{dt} \psi_{-t}(x_0) = -f(\psi_{-t}(x_0)).$$

این نشان می‌دهد که $\bar{\psi}_t(x_0) = \psi_{-t}(x_0)$ جواب معادله $x' = g(x)$ با $x(0) = x_0$ برای $t \in (-b, -a)$ است. از معادله $d_{x_0}g = -d_{x_0}f$ نتیجه می‌شود که x_0 نیز یک نقطه بحرانی هذلولوی برای معادله $x' = g(x)$ به ترتیب با فضاها پایدار و ناپایدار E^u و E^s است. حال فرض کنید V_g^u و V_g^s مجموعه‌های متناظر به دست آمده در (۲.۵) باشد. با توجه به قضیه ۱.۵، یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ موجود است به گونه‌ای که

$$\begin{aligned} V_g^s &= \{x \in U : \bar{\psi}_t(x) \in U, t > 0\} \\ &= \{x \in U : \psi_t(x) \in U, t < 0\}, \end{aligned}$$

و بنابراین برای همسایگی به اندازه کافی کوچک B از x_0 رابطه $V_g^s \cap B = V^u \cap B$ برقرار می‌شود. بنابراین نتیجه برای $V^u \cap B$ از نتیجه برای $V^s \cap B$ با توجه به نگاشت g حاصل می‌شود.

علاوه بر آن، بدون کاستن از کلیت، از اکنون به بعد فرض می‌کنیم $x_0 = 0$. همیشه می‌توان این کار را از طریق تغییر متغیر انجام داد (برهان قضیه ۷.۴ را ببینید).

مرحله نخست. فرمول بندی معادل مسئله. اجازه دهید مختصات $(x, y) \in E^s \times E^u$ را در نظر بگیریم (یادآوری می‌کنیم $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$). برای معادله $x' = f(x)$ از (۶.۵) نتیجه می‌شود که اگر $(z, \varphi(z)) \in V^s$ شرط اولیه در لحظه $t_0 = 0$ باشد، آنگاه جواب متناظر برای هر $t > 0$ در V^s باقی می‌ماند و بنابراین، برای نگاشت $x(t)$ به صورت $(x(t), \varphi(x(t)))$ است.

همانند برهان قضیه ۴.۷ می‌نویسیم

$$f(x) = Ax + g(x),$$

که در آن

$$A = d_0f, \quad g(x) = f(x) - Ax.$$

همچنین نگاشت \bar{g} در (۲۹.۴) را که در (۳۰.۴) صدق می‌کند، در نظر می‌گیریم. برای هر z به اندازه کافی کوچک،

از فرمول تغییر پارامترها در قضیه ۲.۲۶، روابط

$$x(t) = P_s e^{At} z + \int_0^t P_s e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x(\tau), \varphi(x(\tau))) d\tau, \quad (10.5)$$

و

$$\varphi(x(t)) = P_u e^{At} \varphi(z) + \int_0^t P_u e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x(\tau), \varphi(x(\tau))) d\tau, \quad (11.5)$$

برای $t \geq 0$ نتیجه می‌شود (چون در این صورت، جواب به همسایگی صفر تعلق دارد که در آن g و \bar{g} بر هم منطبق هستند). ایده برهان، استفاده از این تساوی‌ها و قضیه نقطه ثابت برای اثبات وجود نگاشت لیشیتز φ است. مرحله دوم. رفتار مؤلفه پایدار. مجموعه Y از همه نگاشت‌های $E^s \rightarrow E^u$ را که $\varphi(0) = 0$ و

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in E^s, \quad (12.5)$$

در نظر بگیرید. این مجموعه، یک فضای متریک کامل با تابع فاصله

$$d(\varphi, \psi) = \sup \left\{ \frac{\|\varphi(x) - \psi(x)\|}{\|x\|} : x \in E^s \setminus \{0\} \right\},$$

است (تمرین ۱۴.۱ را ببینید). برای $\varphi \in Y$ داده شده، فرض کنید $x = x_\varphi$ یک نگاشت یکتا از کلاس C^1 صادق در (۱۰.۵) باشد. برای بررسی وجود و یکتایی، توجه کنید که از آنجایی که سمت راست (۱۰.۵) نسبت به t دیفرانسیل پذیر است، با مشتق‌گیری، رابطه

$$\begin{aligned} x'(t) &= AP_s e^{At} z + A \int_0^t P_s e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x(\tau), \varphi(x(\tau))) d\tau + P_s \bar{g}(x(t), \varphi(x(t))) \\ &= Ax(t) + P_s \bar{g}(x(t), \varphi(x(t))), \end{aligned}$$

به دست می‌آید. قرار دهید

$$h_\varphi(x) = P_s \bar{g}(x, \varphi(x)). \quad (13.5)$$

با قرار دادن $\tau = 0$ در (۱۲.۴)، $\|P_s\| \leq c$ به دست می‌آید. بنابراین از (۳۰.۴) و (۱۲.۵)، داریم

$$\begin{aligned} \|h_\varphi(x) - h_\varphi(y)\| &\leq c\delta\|(x, \varphi(x)) - (y, \varphi(y))\| \\ &= c\delta\|(x - y, \varphi(x) - \varphi(y))\| \\ &\leq c\delta\|x - y\| + c\delta\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \quad (۱۴.۵) \\ &\leq 2c\delta\|x - y\|. \end{aligned}$$

قضیهٔ پیکارد-لیندلف (قضیهٔ ۱۸.۱) تضمین می‌کند که برای هر شرط اولیه با مقادیر در E^s ، یک جواب یکتا برای معادلهٔ

$$x' = Ax + h_\varphi(x), \quad (۱۵.۵)$$

وجود دارد. طبق (۱۰.۵)، مقادیر نگاشت $x = x_\varphi$ فقط در E^s است. علاوه بر آن، از (۱۲.۴)، (۳۰.۴) و (۱۰.۵) نتیجه می‌شود که در بازهٔ ماکسیمال جواب برای $x(t)$

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\mu t}\|z\| + \int_0^t ce^{-\mu(t-\tau)}\delta\|(x(\tau), \varphi(x(\tau)))\|d\tau.$$

از آنجایی که

$$\|\varphi(x(\tau))\| = \|\varphi(x(\tau)) - \varphi(0)\| \leq \|x(\tau)\|,$$

در نتیجه

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\mu t}\|z\| + \int_0^t ce^{-\mu(t-\tau)}2\delta\|x(\tau)\|d\tau.$$

بنابراین، از لم گرونوال (قضیهٔ ۳۹.۱) برای هر $t \geq 0$ در بازهٔ ماکسیمال جواب نتیجه می‌شود که

$$e^{\mu t}\|x(t)\| \leq c\|z\|e^{2c\delta t},$$

و یا به طور معادل

$$\|x(t)\| \leq ce^{(-\mu+2c\delta)t}\|z\|. \quad (۱۶.۵)$$

سرانجام مقدار δ را آنقدر کوچک در نظر می‌گیریم که $-\mu + 2c\delta < 0$ و مطابق برهان قضیه ۱۲.۳ می‌توانیم نشان دهیم که نگاشت $x(t)$ خوش‌تعریف است و برای هر $t \geq 0$ در (۱۶.۵) صدق می‌کند.

مرحله سوم. بعضی از خواص نگاشت x_φ برای $z, \bar{z} \in E^s$ داده شده، فرض کنید x_φ و \bar{x}_φ جواب‌های معادله (۱۵.۵) به ترتیب با مقادیر z و $x_\varphi(0) = \bar{z}$ و $\bar{x}_\varphi(0) = \bar{z}$ باشند. از آنجایی که

$$\begin{aligned} & \|\bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) - \bar{g}(\bar{x}_\varphi(\tau), \varphi(\bar{x}_\varphi(\tau)))\| \\ & \leq \delta(\|x_\varphi(\tau) - \bar{x}_\varphi(\tau)\| + \|\varphi(x_\varphi(\tau)) - \varphi(\bar{x}_\varphi(\tau))\|) \quad (۱۷.۵) \\ & \leq 2\delta\|x_\varphi(\tau) - \bar{x}_\varphi(\tau)\|, \end{aligned}$$

با نوشتن

$$\rho(t) = \|x_\varphi(\tau) - \bar{x}_\varphi(\tau)\|,$$

از (۱۰.۵) و (۱۲.۴) نتیجه می‌شود که برای $t \geq 0$,

$$\rho(t) \leq ce^{-\mu t} \|z - \bar{z}\| + \int_0^t ce^{-\mu(t-\tau)} 2\delta\rho(\tau) d\tau.$$

از لم گرونوال برای $t \geq 0$ داریم

$$\rho(t) \leq ce^{(-\mu+2c\delta)t} \|z - \bar{z}\|. \quad (۱۸.۵)$$

برای $\varphi, \psi \in Y$ داده شده، فرض کنید x_φ و x_ψ به ترتیب جواب‌های معادله (۱۵.۵) و

$$x' = Ax + h_\psi(x)$$

با مقدار $x_\varphi(0) = x_\psi(0) = z$ باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} & \|\bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) - \bar{g}(x_\psi(\tau), \psi(x_\psi(\tau)))\| \\ & \leq \|\bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) - \bar{g}(x_\varphi(\tau), \psi(x_\psi(\tau)))\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\bar{g}(x_\varphi(\tau), \psi(x_\psi(\tau))) - \bar{g}(x_\psi(\tau), \psi(x_\psi(\tau)))\| \quad (۱۹.۵) \\
& \leq \delta \|\varphi(x_\varphi(\tau)) - \psi(x_\psi(\tau))\| + \delta \|x_\varphi(\tau) - x_\psi(\tau)\| \\
& \leq \delta \|\varphi(x_\varphi(\tau)) - \psi(x_\varphi(\tau))\| + \delta \|\psi(x_\varphi(\tau)) - \psi(x_\psi(\tau))\| \\
& \quad + \delta \|x_\varphi(\tau) - x_\psi(\tau)\| \\
& \leq \delta d(\varphi, \psi) \|x_\varphi(\tau)\| + 2\delta \|x_\varphi(\tau) - x_\psi(\tau)\|.
\end{aligned}$$

با قرار دادن

$$\bar{\rho}(t) = \|x_\varphi(t) - x_\psi(t)\|,$$

از (۱۰.۵) و (۱۶.۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(t) & \leq \int_0^t ce^{-\mu(t-\tau)} \delta d(\varphi, \psi) ce^{(-\mu+2c\delta)\tau} \|z\| d\tau + \int_0^t ce^{-\mu(t-\tau)} 2\delta \bar{\rho}(\tau) d\tau \\
& \leq c^2 \delta d(\varphi, \psi) e^{-\mu t} \frac{e^{2c\delta\tau}}{2c\delta} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \|z\| + \int_0^t ce^{(-\mu+2c\delta)(t-\tau)} 2\delta \bar{\rho}(\tau) d\tau \\
& \leq \frac{c}{2} d(\varphi, \psi) e^{(-\mu+2c\delta)t} \|z\| + \int_0^t 2c\delta e^{(-\mu+2c\delta)(t-\tau)} \bar{\rho}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$e^{(\mu-2c\delta)t} \bar{\rho}(t) \leq \frac{c}{2} d(\varphi, \psi) \|z\| + \int_0^t 2c\delta e^{(\mu-2c\delta)\tau} \bar{\rho}(\tau) d\tau.$$

بنابراین، از لم گرونوال نتیجه می‌شود که برای هر $t \geq 0$

$$e^{(\mu-2c\delta)t} \bar{\rho}(t) \leq \frac{c}{2} d(\varphi, \psi) \|z\| e^{2c\delta t},$$

یا به طور معادل

$$\bar{\rho}(t) \leq \frac{c}{2} d(\varphi, \psi) \|z\| e^{(-\mu+4c\delta)t}. \quad (۲۰.۵)$$

مرحله چهارم. رفتار مؤلفه ناپایدار. اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $t \geq 0$

$$\varphi(x_\varphi(t)) = P_u e^{At} \varphi(z) + \int_0^t P_u e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau \quad (21.5)$$

اگر و تنها اگر برای هر $t \geq 0$

$$\varphi(z) = - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau. \quad (22.5)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که انتگرال در (۲۲.۵) خوش‌تعریف است. در واقع، از (۱۲.۴)، (۱۲.۵) و (۱۶.۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \|P_u e^{-At} \bar{g}(x_\varphi(t), \varphi(x_\varphi(t)))\| &\leq c e^{-\mu t} 2\delta \|x_\varphi(t)\| \\ &\leq c e^{-\mu t} 2\delta c e^{(-\mu+2c\delta)t} \|z\| \\ &= 2c^2 \delta e^{(-2\mu+2c\delta)t} \|z\|. \end{aligned} \quad (23.5)$$

از آنجایی که $-2\mu + 2c\delta < 0$ ، بنابراین

$$\int_0^{+\infty} \|P_u e^{-A\tau} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau)))\| d\tau \leq 2c^2 \delta \int_0^{+\infty} e^{(-2\mu+2c\delta)\tau} d\tau < +\infty,$$

که ثابت می‌کند انتگرال در (۲۲.۵) خوش‌تعریف است.

اکنون فرض می‌کنیم که رابطه (۲۱.۵) برای هر $t \geq 0$ برقرار است. در این صورت

$$\varphi(z) = P_u e^{-At} \varphi(x_\varphi(t)) - \int_0^t P_u e^{-A\tau} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau. \quad (24.5)$$

با ادامه روند (۲۳.۵) و وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، داریم

$$\|P_u e^{-At} \varphi(x_\varphi(t))\| \leq c e^{-\mu t} c e^{(-\mu+2c\delta)t} \|z\|$$

$$\leq c^2 e^{(-2\mu+2c\delta)t} \|z\| \rightarrow 0.$$

بنابراین، از $t \rightarrow \infty$ در (۲۴.۵) نتیجه می‌شود که (۲۲.۵) برقرار است. از طرف دیگر، اگر رابطه (۲۲.۵) برای هر $t \geq 0$ برقرار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} P_u e^{At} \varphi(z) &+ \int_0^t P_u e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau \\ &= - \int_t^{+\infty} P_u e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau. \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم سمت راست این تساوی برابر با $\varphi(x_\varphi(t))$ است. اگر جواب معادله (۱۰.۵) با شرط اولیه $F_0(z) = z$ را که جواب معادله خودگردان (۱۵.۵) نیز هست با $F_t(z)$ نشان دهیم، از قضیه ۱۳.۱ نتیجه می‌شود

$$x_\varphi(\tau) = F_\tau(z) = F_{\tau-t}(F_t(z)) = F_{\tau-t}(x_\varphi(t)).$$

توجه کنید که معادله (۲۲.۵) را می‌توان به صورت

$$\varphi(z) = - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} \bar{g}(F_\tau(z), \varphi(F_\tau(z))) d\tau, \quad (۲۵.۵)$$

نیز نوشت. بنابراین، از (۲۵.۵)، داریم

$$\begin{aligned} &- \int_t^{+\infty} P_u e^{A(t-\tau)} \bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau \\ &= - \int_t^{+\infty} P_u e^{A(t-\tau)} \bar{g}(F_{\tau-t}(x_\varphi(t)), \varphi(F_{\tau-t}(x_\varphi(t)))) d\tau \\ &= - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} \bar{g}(F_\tau(x_\varphi(t)), \varphi(F_\tau(x_\varphi(t)))) d\tau \\ &= \varphi(x_\varphi(t)). \end{aligned}$$

به دست می‌آید.

مرحله پنجم. وجود نگاشت φ . اکنون از معادله (۲۲.۵) برای نشان دادن وجود نگاشت $\varphi \in Y$ صادق در

(۲۱.۵) استفاده می‌کنیم. برای این منظور، تبدیل T در Y را به صورت

$$T(\varphi)(z) = - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} \bar{g}(x_\varphi(t), \varphi(x_\varphi(\tau))) d\tau \quad (۲۶.۵)$$

تعریف می‌کنیم. از آنجایی که برای $z = x_\varphi(0) = 0$ داریم $\bar{g}(0) = 0$ و $x_\varphi(\tau) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $T(\varphi)(0) = 0$. برای $z, \bar{z} \in E^s$ داده شده فرض کنید x_φ و \bar{x}_φ باز هم جواب‌های معادله (۱۵.۵) به ترتیب با $x_\varphi(0) = z$ و $\bar{x}_\varphi(0) = \bar{z}$ باشند. از (۱۷.۵) و (۱۸.۵) نتیجه می‌شود که

$$\|\bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) - \bar{g}(\bar{x}_\varphi(\tau), \varphi(\bar{x}_\varphi(\tau)))\| \leq 2c\delta e^{(-\mu+2c\delta)\tau} \|z - \bar{z}\|,$$

و در نتیجه برای δ به اندازه کافی کوچک

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(z) - T(\varphi)(\bar{z})\| &\leq \int_0^{+\infty} ce^{-\mu\tau} 2c\delta e^{(-\mu+2c\delta)\tau} \|z - \bar{z}\| d\tau \\ &\leq \frac{c^2\delta}{\mu - c\delta} \|z - \bar{z}\| \leq \|z - \bar{z}\|. \end{aligned}$$

این تضمین می‌کند که $T(Y) \subset Y$.

اکنون نشان می‌دهیم که T یک انقباض است. برای $\varphi, \psi \in Y$ داده شده و $z \in E^s$ فرض کنید x_φ و x_ψ به ترتیب جواب‌های معادلات (۱۵.۵) و $x' = Ax + h_\psi(x)$ با شرط $x_\varphi(0) = x_\psi(0) = z$ باشند. از (۱۹.۵)، (۲۰.۵) و (۱۶.۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} &\|\bar{g}(x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))) - \bar{g}(x_\psi(\tau), \psi(x_\psi(\tau)))\| \\ &\leq \delta d(\varphi, \psi) \|x_\varphi(\tau)\| + c\delta d(\varphi, \psi) \|z\| e^{(-\mu+4c\delta)\tau} \\ &\leq 2c\delta d(\varphi, \psi) \|z\| e^{(-\mu+4c\delta)\tau}, \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\|T(\varphi)(z) - T(\psi)(z)\| \leq \int_0^{+\infty} ce^{-\mu\tau} 2c\delta d(\varphi, \psi) \|z\| e^{(-\mu+4c\delta)\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} 2c^2 \delta d(\varphi, \psi) \|z\| e^{(-2\mu+4c\delta)\tau} d\tau \\
&\leq \frac{c^2 \delta}{\mu - 2c\delta} d(\varphi, \psi) \|z\|.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد

$$d(T(\varphi), T(\psi)) \leq \frac{c^2 \delta}{\mu - 2c\delta} d(\varphi, \psi). \quad (27.5)$$

برای δ به اندازه کافی کوچک، T یک انقباض است. از این رو، بر اساس قضیه ۳۵.۱، نگاشت یکتای $\varphi \in Y$ موجود است به گونه‌ای که $T(\varphi) = \varphi$. به عبارت دیگر، معادله (۲۲.۵) برقرار است. این بدان معنی است که نگاشت یکتای $\varphi \in Y$ صادق در (۱۰.۵) و (۱۱.۵) موجود است. از آنجایی که در گوی $B = B(0, r/3)$ داریم $\bar{g} = g$ (برهان قضیه ۷.۴ را ببینید)، نتیجه می‌گیریم

$$V^s \cap B = \{(z, \varphi(z)) : z \in E^s \cap B\}.$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند. \square

همچنین از برهان قضیه ۴.۵ نتیجه می‌شود که در مجموعه $V^s \cap B$ جواب‌ها به صورت نمایی کاهش می‌یابند.

به طور دقیق‌تر، برای $z \in E^s \cap B$ داده شده فرض کنید

$$t \mapsto (x_\varphi(t), \varphi(x_\varphi(t))),$$

جواب معادله $x' = f(x)$ با شرط $x_\varphi(0) = z$ باشد. از (۱۲.۵) و (۱۶.۵) نتیجه می‌شود

$$\|(x_\varphi(t), \varphi(x_\varphi(t)))\| \leq 2\|x_\varphi(t)\| \leq 2ce^{(-\mu+2c\delta)t}\|z\|, \quad t \geq 0.$$

۴.۵ همواری خمینه‌های ناوردا

در این فصل برهان قضیه هادامارد-پرون را نتیجه می‌گیریم. به عبارت دیگر، نشان می‌دهیم که توابع φ و ψ در

(۹.۵) در یک همسایگی از x_0 از کلاس C^1 هستند.

قضیه ۵.۵. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی از کلاس C^1 و x_0 یک نقطه بحرانی هذلولوی معادله $x' = f(x)$ باشد. در این صورت توابع φ و ψ در قضیه ۴.۵ در یک همسایگی از x_0 از کلاس C^1 هستند.

برهان. همانند برهان قضیه ۴.۵، فقط $V^s \cap B$ را در نظر می‌گیریم و بحث برای $V^u \cap B$ کاملاً مشابه است. علاوه بر آن، بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $x_0 = 0$.

مرحله اول. ساختن یک تبدیل کمکی. فرض کنید $L(E^s, E^u)$ مجموعه همه تبدیلات خطی از E^s به E^u باشد. همچنین، فرض کنید Z مجموعه همه توابع پیوسته $\Phi : E^s \rightarrow L(E^s, E^u)$ باشد به گونه‌ای که $\Phi(0) = 0$ و

$$\sup\{\|\Phi(z)\| : z \in E^s\} \leq 1.$$

با استفاده از قضیه ۳۰.۱، می‌توان به سادگی بررسی کرد که با تابع فاصله

$$d(\Phi, \Psi) = \sup\{\|\Phi(z) - \Psi(z)\| : z \in E^s\},$$

مجموعه Z یک فضای متریک کامل است. برای $\varphi \in Y$ داده شده و $z \in E^s$ (برهان قضیه ۴.۵ را برای تعریف فضای Y ببینید)، فرض کنید $x = x_\varphi$ جواب معادله (۱۵.۵) با $x_\varphi(0) = z$ باشد. برای سادگی در بیان، نمادهای

$$y_\varphi(\tau, z) = (x_\varphi(\tau), \varphi(x_\varphi(\tau))),$$

و

$$G(\tau, z, \varphi, \Phi) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z))\Phi(x_\varphi(\tau)), \quad (28.5)$$

را که $(x, y) \in E^s \times E^u$ معرفی می‌کنیم. اکنون یک تبدیل خطی $A(\varphi, \Phi)(z)$ برای هر $(\varphi, \Phi)(z) \in Y \times Z$ و $z \in E^s$ توسط

$$A(\varphi, \Phi)(z) = - \int_0^{+\infty} P_u e^{-A\tau} G(\tau, z, \varphi, \Phi) W(\tau) d\tau, \quad (29.5)$$

تعریف می‌کنیم که

$$W = W_{z, \varphi, \Phi} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow L(E^s, E^s),$$

یک تابع ماتریس از کلاس C^1 است و با ضابطه

$$W(t) = P_s s^{At} + \int_0^t P_s e^{A(t-\tau)} G(\tau, z, \varphi, \Phi) W(\tau) d\tau, \quad (30.5)$$

مشخص می‌شود.

با در نظر گرفتن

$$C(t, z) = A + P_s G(\tau, z, \varphi, \Phi), \quad (31.5)$$

برای هر $x \in E^s$ ، تابع $u(t) = W(t)x$ یک جواب برای معادله خطی $u' = C(t, z)u$ با شرط اولیه $u(0) = x$ است. از آنجایی که نگاشت h_φ در (۱۳.۵) لپشیتز است ((۱۴.۵) را ببینید)، از قضیه ۳۸.۱ نتیجه می‌شود که نگاشت‌های $(t, z) \mapsto x_\varphi(t)$ و y_φ پیوسته هستند. بنابراین، به دلیل پیوستگی ترکیب توابع پیوسته ((۲۸.۵) را ببینید)

$$(t, z) \mapsto G(\tau, z, \varphi, \Phi), \quad (t, z) \mapsto C(t, z),$$

نیز پیوسته هستند. بنابراین، جواب u دارای بازهٔ ماکسیمال \mathbb{R} است و تابع W خوش‌تعریف است.

اکنون، نشان می‌دهیم که تبدیل A خوش‌تعریف است. از (۱۲.۴) و (۳۰.۴)، داریم

$$\begin{aligned} B &:= \int_0^{+\infty} \|P_u e^{-A\tau} G(\tau, z, \varphi, \Phi) W(\tau)\| d\tau \\ &\leq 2c\delta \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \|W(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (32.5)$$

از طرف دیگر، از (۳۰.۵) داریم

$$\|W(t)\| \leq ce^{-\mu t} + 2c\delta \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \|W(\tau)\| d\tau.$$

با ضرب در $e^{\mu t}$ ، از لم گرونوال (قضیه ۳۹.۱)، برای $t \geq 0$ ،

$$\|W(t)\| \leq ce^{-(\mu-2c\delta)t}, \quad (۳۳.۵)$$

نتیجه شده و از (۳۲.۵)،

$$B \leq 2c^2\delta \int_0^{+\infty} e^{(-2\mu+2c\delta)\tau} d\tau \leq \frac{c^2\delta}{\mu-c\delta}, \quad (۳۴.۵)$$

به دست می آید. این نشان می دهد که تبدیل A خوش تعریف است و برای هر δ به اندازه کافی کوچک،

$$\|A(\varphi, \Phi)(z)\| \leq \frac{c^2\delta}{\mu-c\delta} \leq 1.$$

از آنجایی که برای $z = 0$ ، داریم $d_0\bar{g} = d_0g = 0$ و $\varphi(0) = 0$ و $x_\varphi = 0$ ، بنابراین، از (۲۹.۵)، $A(\varphi, \Phi)(0) = 0$ استنباط می شود.

همچنین نشان می دهیم تابع $A(\varphi, \Phi)(z) \mapsto z$ برای هر $(\varphi, \Psi) \in Y \times Z$ پیوسته است. برای $z, \bar{z} \in E^s$ داده شده، فرض کنید x_φ و \bar{x}_φ به ترتیب جواب های معادله (۱۵.۵) با شرایط $x_\varphi(0) = z$ و $\bar{x}_\varphi(0) = \bar{z}$ باشند. علاوه بر آن، توابع ماتریسی

$$W_z = W_{z, \varphi, \Phi}, \quad W_{\bar{z}} = W_{\bar{z}, \varphi, \Phi},$$

را نیز در نظر می گیریم.

برای $\epsilon > 0$ ، از (۳۲.۵) و (۳۴.۵) نتیجه می شود که $T > 0$ موجود است به گونه ای که

$$\int_T^{+\infty} \|P_u e^{-A\tau} G(\tau, z, \varphi, \Phi) W_z(\tau)\| d\tau < \epsilon,$$

و

$$\int_T^{+\infty} \|P_u e^{-A\tau} G(\tau, \bar{z}, \varphi, \Phi) W_{\bar{z}}(\tau)\| d\tau < \epsilon.$$

بنابراین

$$\|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\varphi, \Phi)(\bar{z})\| \quad (۳۵.۵)$$

$$\leq c \int_0^T e^{-\mu\tau} \|G(\tau, z, \varphi, \Phi)W_z(\tau) - G(\tau, \bar{z}, \varphi, \Phi)W_{\bar{z}}(\tau)\| d\tau + 2\epsilon.$$

اکنون نشان می‌دهیم که تابع

$$(\tau, z) \mapsto G(\tau, z, \varphi, \Phi)W_z(\tau), \quad (۳۶.۵)$$

پیوسته است. با توجه به بحث قبلی، کفایت نشان دهیم که تابع $z \mapsto W_z(\tau)$ پیوسته است. برای این منظور، معادله خطی $u' = C(t, z)u$ با ماتریس $C(t, z)$ را همانند رابطه (۳۱.۵) در نظر می‌گیریم. از آنجایی که

$$W_z(t) = \text{Id}_{E^s} + \int_0^t C(t, z)W_z(s)ds,$$

و

$$W_{\bar{z}}(t) = \text{Id}_{E^s} + \int_0^t C(t, \bar{z})W_{\bar{z}}(s)ds,$$

داریم

$$\begin{aligned} W_z(t) - W_{\bar{z}}(t) &= \int_0^t [C(s, z) - C(s, \bar{z})]W_z(s)ds \\ &\quad + \int_0^t C(s, \bar{z})(W_z(s) - W_{\bar{z}}(s))ds. \end{aligned} \quad (۳۷.۵)$$

فرض کنید $\tau > 0$. Δ . از آنجایی که $(t, z) \mapsto C(t, z)$ روی مجموعه فشرد $[0, \Delta] \times \overline{B(0, r)}$ پیوسته یکنواخت است، برای $\bar{\epsilon} > 0$ داده شده، $\bar{\delta} \in (0, r)$ موجود است به طوری که برای $t \in [0, \Delta]$ و $z, \bar{z} \in \overline{B(0, r)}$ که $\|z - \bar{z}\| < \bar{\delta}$ داریم

$$\|C(s, z) - C(s, \bar{z})\| < \bar{\epsilon}.$$

علاوه بر آن،

$$\|C(t, z)\| \leq \lambda,$$

که $\lambda = \|A\| + 2\delta\|P_s\|$. از این رو، از (۳۱.۵)، (۳۳.۵) و (۳۷.۵)، برای $t \in [0, \Delta]$ و $z, \bar{z} \in \overline{B(0, r)}$ که $\|z - \bar{z}\| < \bar{\delta}$ از رابطه

$$\|W_z(t) - W_{\bar{z}}(t)\| \leq \frac{c\bar{\epsilon}}{\mu - 2c\delta} + \lambda \int_0^t \|W_z(s) - W_{\bar{z}}(s)\| ds,$$

نتیجه می‌شود. در پایان، برای $t \in [0, \Delta]$ و $z, \bar{z} \in \overline{B(0, r)}$ که $\|z - \bar{z}\| < \bar{\delta}$ از لم گرونوال

$$\|W_z(t) - W_{\bar{z}}(t)\| \leq \frac{c\bar{\epsilon}}{\mu - 2c\delta} e^{\lambda t} \leq \frac{c\bar{\epsilon}}{\mu - 2c\delta} e^{\lambda \Delta},$$

به دست می‌آید. این نشان می‌دهد که تابع $(t, z) \mapsto W_z(t)$ روی هر مجموعه $[0, \Delta] \times \overline{B(0, r)}$ و در نتیجه روی $\mathbb{R}_0^+ \times E^s$ پیوسته است (از قبل می‌دانستیم که این تابع نسبت به t از کلاس C^1 است چون جواب معادله $u' = C(t, z)u$ است). بنابراین، تابع (۳۶.۵) نیز پیوسته است چون از ترکیب توابع پیوسته تشکیل شده است. بنابراین، روی مجموعه فشرده $[0, T] \times \overline{B(0, r)}$ پیوسته یکنواخت است چون $\delta \in (0, r)$ موجود است به گونه‌ای که برای $t \in [0, T]$ و $z, \bar{z} \in \overline{B(0, r)}$ که $\|z - \bar{z}\| < \delta$ داریم

$$\|G(\tau, z, \varphi, \Phi)W_z(\tau) - G(\tau, \bar{z}, \varphi, \Phi)W_{\bar{z}}(\tau)\| < \epsilon.$$

از (۳۵.۵) برای $z, \bar{z} \in \overline{B(0, r)}$ که $\|z - \bar{z}\| < \delta$ از رابطه

$$\|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\varphi, \Phi)(\bar{z})\| \leq \frac{c\epsilon}{\mu} + 2\epsilon,$$

حاصل می‌شود و تابع $z \mapsto A(\varphi, \Phi)(z)$ پیوسته است (چون در هر گوی $B(0, r)$ پیوسته است). این ثابت می‌کند که $A(Y \times Z) \subset Z$.

مرحله دوم. ساختن یک تار انقباضی. اکنون نشان می‌دهیم که تبدیل $S : Y \times Z \mapsto Y \times Z$ با ضابطه

$$S(\varphi, \Phi) = (T(\varphi), A(\varphi, \Phi)),$$

یک تار انقباضی است. برای $\varphi \in Y$ و $\Phi, \Psi \in Z$ داده شده و $z \in E^s$ فرض کنید

$$W_\Phi = W_{z, \varphi, \Phi}, \quad W_\Psi = W_{z, \varphi, \Psi},$$

تابع ماتریسی تعیین شده در رابطه (۳۰.۵) باشند. بنابراین

$$\begin{aligned}
 & \|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\varphi, \Psi)(z)\| \\
 & \leq c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \|G(\tau, z, \varphi, \Phi)W_{\Phi}(\tau) - G(\tau, z, \varphi, \Psi)W_{\Psi}(\tau)\| d\tau \\
 & \leq c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \delta (\|W_{\Phi}(\tau) - W_{\Psi}(\tau)\| d\tau \\
 & \quad + \|\Phi(x_{\varphi}(\tau))W_{\Phi}(\tau) - \Psi(x_{\varphi}(\tau))W_{\Psi}(\tau)\|) d\tau \\
 & \leq c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \delta (\|W_{\Phi}(\tau) - W_{\Psi}(\tau)\| d\tau \tag{۳۸.۵} \\
 & \quad + \|\Phi(x_{\varphi}(\tau))\| \cdot \|W_{\Phi}(\tau) - W_{\Psi}(\tau)\| \\
 & \quad + \|\Phi(x_{\varphi}(\tau)) - \Psi(x_{\varphi}(\tau))\| \cdot \|W_{\Psi}(\tau)\|) d\tau \\
 & \leq c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \delta (2\|W_{\Phi}(\tau) - W_{\Psi}(\tau)\| + d(\Phi, \Psi)\|W_{\Psi}(\tau)\|) d\tau.
 \end{aligned}$$

اکنون نرم

$$w(t) = W_{\Phi}(t) - W_{\Psi}(t)$$

را تخمین می‌زنیم. به روشی مشابه با (۳۸.۵) و با استفاده از (۳۳.۵)، داریم

$$\begin{aligned}
 \|w(t)\| & \leq c \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} 2\delta \|w(\tau)\| d\tau + c\delta d(\Phi, \Psi) \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \|W_{\Psi}(\tau)\| d\tau \\
 & \leq 2c\delta \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \|w(\tau)\| d\tau + c^2\delta d(\Phi, \Psi) \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} e^{-(\mu-2c\delta)\tau} d\tau \\
 & \leq 2c\delta e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau + c^2\delta d(\Phi, \Psi) e^{-\mu t} \int_0^t e^{2c\delta\tau} d\tau \\
 & \leq 2c\delta e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau + \frac{c}{2} d(\Phi, \Psi) e^{(-\mu+2c\delta)t}
 \end{aligned}$$

که نامساوی

$$e^{\mu t} \|w(t)\| \leq 2c\delta \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau + \frac{c}{2} d(\Phi, \Psi) e^{2c\delta t},$$

را نتیجه می‌دهد. برای تابع

$$\alpha(t) = \frac{c}{2}d(\Phi, \Psi)e^{2c\delta t},$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'(t) + 2c\delta e^{\mu t} \|w(t)\|}{\alpha(t) + 2c\delta \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau} &\leq \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + \frac{2c\delta e^{\mu t} \|w(t)\|}{\alpha(t) + 2c\delta \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau} \\ &\leq \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + 2c\delta, \end{aligned}$$

و با انتگرال‌گیری از دو طرف نامساوی، خواهیم داشت

$$\log \left(\alpha(t) + 2c\delta \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau \right) - \log \alpha(0) \leq \log \alpha(t) - \log \alpha(0) + 2c\delta t.$$

با تأثیر دادن تابع نمایی، نامساوی

$$e^{\mu t} \|w(t)\| \leq \alpha(t) + 2c\delta \int_0^t e^{\mu\tau} \|w(\tau)\| d\tau \leq \alpha(t)e^{2c\delta t},$$

و یا به‌طور معادل،

$$\|W_\Phi(t) - W_\Psi(t)\| \leq \frac{c}{2}d(\Phi, \Psi)e^{-(\mu-4c\delta)t}, \quad (39.5)$$

حاصل می‌شود.

با استفاده از (33.5) و (39.5)، از (38.5)،

$$\begin{aligned} \|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\varphi, \Psi)(z)\| &\leq c^2\delta d(\Phi, \Psi) \int_0^{+\infty} e^{-2(\mu-2c\delta)\tau} d\tau \\ &\quad + c^2\delta d(\Phi, \Psi) \int_0^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} d\tau \\ &= 2c^2\delta d(\Phi, \Psi) \int_0^{+\infty} e^{-2(\mu-2c\delta)\tau} d\tau \\ &\leq \frac{c^2\delta}{\mu-2c\delta} d(\Phi, \Psi). \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود. این نشان می‌دهد که برای هر δ به اندازه کافی کوچک، تبدیل S یک تار انقباضی است. مرحله سوم. ساختن تبدیل S . برای $\varphi, \psi \in Y$ و $\Phi \in Z$ داده شده و $z \in E^s$ فرض کنید

$$W_\varphi = W_{z, \varphi, \Phi}, \quad W_\psi = W_{z, \psi, \Phi},$$

توابع ماتریسی تعیین شده در رابطه (۳۰.۵) باشند. بنابراین،

$$\begin{aligned} & \|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\psi, \Phi)(z)\| \\ & \leq c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \|G(\tau, z, \varphi, \Phi)W_\varphi(\tau) - G(\tau, z, \psi, \Phi)W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & \leq c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \cdot \|W_\varphi(\tau)\| d\tau \\ & \quad + c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \cdot \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & \quad + c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \cdot \|\Phi(x_\varphi(\tau))\| \cdot \|W_\varphi(\tau)\| d\tau \\ & \quad + c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \cdot \|\Phi(x_\varphi(\tau)) - \Phi(x_\psi(\tau))\| \cdot \|W_\varphi(\tau)\| d\tau \\ & \quad + c \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \cdot \|\Phi(x_\psi(\tau))\| \cdot \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau, \end{aligned}$$

و با استفاده از (۳۳.۵)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\psi, \Phi)(z)\| \\ & \leq c^2 \int_0^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & \quad + c^2 \int_0^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & \quad + 2c\delta \int_0^{+\infty} e^{-\mu\tau} \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & \quad + c^2\delta \int_0^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \|\Phi(x_\varphi(\tau)) - \Phi(x_\psi(\tau))\| d\tau. \end{aligned}$$

فرض کنید $\epsilon > 0$. از (۳۰.۴) نتیجه می‌شود که $T > 0$ موجود است به گونه‌ای که برای هر $z \in E^s$,

$$\begin{aligned} & c^2 \int_T^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & + c^2 \int_T^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & + 2c\delta \int_T^{+\infty} e^{-\mu\tau} \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & + c^2\delta \int_T^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \|\Phi(x_\varphi(\tau)) - \Phi(x_\psi(\tau))\| d\tau \\ & \leq 10c^2\delta \int_T^{+\infty} e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} d\tau < \epsilon. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} & \|A(\varphi, \Phi)(z) - A(\psi, \Phi)(z)\| \\ & \leq c^2 \int_0^T e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & + c^2 \int_0^T e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \quad (۴۰.۵) \\ & + c^2 \int_0^T e^{-\mu\tau} \left(\left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| + \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \right) \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & + c^2 \int_0^T e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| \cdot \|\Phi(x_\varphi(\tau)) - \Phi(x_\psi(\tau))\| d\tau + \epsilon. \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که تابع \bar{g} خارج یک گوی بسته $\overline{B(0, r)}$ صفر می‌شود (۲۹.۴) را ببینید). از این رو، کافیت در رابطه (۴۰.۵)، $\tau \in [0, T]$ و $z \in E^s$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$\|y_\varphi(\tau, z)\|, \|y_\psi(\tau, z)\| < r.$$

از طرف دیگر، از آنجایی که خارج گوی $\overline{B(0, r)}$ داریم $\bar{g} = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که برای $R > 0$ به اندازه کافی بزرگ، جواب معادله $x' = Ax + h_\varphi(x)$ (۱۳.۵) را ببینید) با شرط اولیه $x(0) \in E^s$ با $\|x(0)\| > R$ ،

برای هر $t \in [0, T]$ و $\varphi \in Y$

$$\|(x(t), \varphi(x(t)))\| > r,$$

صدق می‌کند (چون در این صورت، جواب‌های معادله $x' = Ax$ نیز هستند). بنابراین، برای هر $\tau \in [0, T]$ و

$$z \in E^s \text{ که } \|z\| > R \text{ داریم}$$

$$\|y_\varphi(\tau, z)\|, \|y_\psi(\tau, z)\| > r.$$

این نشان می‌دهد که برای r در برهان قضیه ۷.۴ همه انتگرال‌ها در (۴۰.۵) خارج از $\|z\| > R$ صفر می‌شوند.

از این رو،

$$\begin{aligned} & d(A(\varphi, \Phi)(z), A(\psi, \Phi)) \\ & \leq c^2 \sup_{z \in B(0, R)} \int_0^T e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & \quad + c^2 \sup_{z \in B(0, R)} \int_0^T e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & \quad + 2c\delta \sup_{z \in B(0, R)} \int_0^T e^{-\mu\tau} \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \quad (41.5) \\ & \quad + c^2 \delta \sup_{z \in B(0, R)} \int_0^T e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \|\Phi(x_\varphi(\tau)) - \Phi(x_\psi(\tau))\| d\tau + \epsilon. \end{aligned}$$

از آنجایی که توابع $d\bar{g}$ و Φ روی گوی بسته $\overline{B(0, 2cR)}$ به‌طور یکنواخت پیوسته هستند، $\eta > 0$ موجود است

به‌گونه‌ای که برای $w, \bar{w} \in \overline{B(0, 2cR)}$ با $\|w - \bar{w}\| < \eta$ داریم

$$\left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(w) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(\bar{w}) \right\| + \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(w) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(\bar{w}) \right\| < \epsilon, \quad (42.5)$$

و

$$\|\Phi(w) - \Phi(\bar{w})\| < \epsilon. \quad (43.5)$$

علاوه بر آن، از (۱۲.۵) و (۲۰.۵) نتیجه می‌شود که برای هر $\tau \geq 0$ و $z \in E^s$ و هر δ به اندازه کافی کوچک که

$$\mu - 4c\delta > 0$$

$$\|y_\varphi(\tau, z) - (y_\psi(\tau, z))\| \leq 2\|x_\varphi(\tau) - x_\psi(\tau)\| \quad (۴۴.۵)$$

$$\leq cd(\varphi, \psi)\|z\|e^{(-\mu+4c\delta)\tau} \leq cRd(\varphi, \psi).$$

اکنون $W_\varphi(t) - W_\psi(t)$ را تخمین می‌زنیم. از رابطه (۳۰.۵) داریم

$$\begin{aligned} & \|W_\varphi(t) - W_\psi(t)\| \\ & \leq c \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \|G(\tau, z, \varphi, \Phi)W_\varphi(\tau) - G(\tau, z, \psi, \Phi)W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & \leq c^2 \int_0^t e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & \quad + c^2 \int_0^t e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \left\| \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\varphi(\tau, z)) - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) \right\| d\tau \\ & \quad + 2c\delta \int_0^t e^{-\mu\tau} \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \\ & \quad + c^2\delta \int_0^t e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} \|\Phi(x_\varphi(\tau)) - \Phi(x_\psi(\tau))\| d\tau. \end{aligned}$$

از رابطه (۱۶.۵)

$$\|x_\varphi(\tau)\| \leq c\|z\| \leq cR,$$

و بنابراین

$$\|y_\varphi(\tau, z)\| \leq 2c\|z\| \leq 2cR,$$

برای $\varphi \in Y$ ، $\tau \geq 0$ و $z \in \overline{B(0, R)}$. از این رو، از (۲۰.۵)، (۴۲.۵) و (۴۳.۵) و (۴۴.۵) برای $t \geq 0$ هنگامی که

$$d(\varphi, \psi) < \eta/(cR)$$

$$\|W_\varphi(t) - W_\psi(t)\| \leq c^2\epsilon \int_0^t e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} d\tau + c^2\delta\epsilon \int_0^t e^{-(2\mu-2c\delta)\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + 2c\delta \int_0^t e^{-\mu\tau} \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau \\
& \leq \frac{c^2(1+\delta)\epsilon}{2\mu - 2c\delta} + 2c\delta \int_0^t \|W_\varphi(\tau) - W_\psi(\tau)\| d\tau.
\end{aligned}$$

از لم گرونوال، برای $t \geq 0$ ، رابطه

$$\|W_\varphi(t) - W_\psi(t)\| \leq \frac{c^2(1+\delta)\epsilon}{2\mu - 2c\delta} e^{2c\delta t},$$

به دست می‌آید و از (۴۱.۵)، (۴۲.۵) و (۴۳.۵) برای $d(\varphi, \psi) < \eta/(cR)$

$$\begin{aligned}
d(A(\varphi, \Phi), A(\psi, \Phi)) & \leq \frac{c^2\epsilon}{2\mu - 2c\delta} + \frac{c^3(1+\delta)\delta\epsilon}{\mu - c\delta} \int_0^T e^{-(\mu-2c\delta)\tau} d\tau + \frac{c^2\delta\epsilon}{2\mu - 2c\delta} \\
& = \frac{c^2\epsilon}{2\mu - 2c\delta} \left(1 + \delta + \frac{c(1+\delta)\delta}{2\mu - 4c\delta} \right),
\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. این نشان می‌دهد که تبدیل A پیوسته است و تار انقباضی S نیز پیوسته است (می‌دانیم که T یک انقباض است؛ (۵.۲۷) را ببینید).

مرحله چهارم. همواری تابع φ . ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $\psi \in Y$ از کلاس C^1 بوده و T یک تبدیل در

(۲۶.۵) باشد، آنگاه $T(\psi)$ از کلاس C^1 است و

$$d_z T(\psi) = A(\psi, d\psi)(z). \quad (۴۵.۵)$$

برای این منظور، توجه می‌کنیم که اگر ψ از کلاس C^1 باشد، آنگاه نگاشت $h_\psi : E^s \rightarrow E^s$ با ضابطه

$$h_\psi(x) = P_s \bar{g}(x, \psi(x)),$$

نیز از کلاس C^1 است ((۱۳.۵) را ببینید). بنابراین با به‌کاربردن قضیه ۴۲.۱ برای معادله

$$x' = Ax + h_\psi(x),$$

نتیجه می‌شود که تابع u با تعریف $u(t, z) = x_\psi(t)$ از کلاس C^1 است. علاوه بر آن، برای $\Phi(z) = d_z \psi$ از

(۳۰.۵) داریم $W(t) = \partial u / \partial z$. در واقع، با جایگذاری این تابع W در سمت راست (۵.۳۰) φ را جایگزین

ψ می‌کنیم) و همچنین با استفاده از فرمول وردش پارامترها در قضیه ۲۶.۲، داریم

$$\begin{aligned} P_s e^{At} + \int_0^t P_s e^{A(t-\tau)} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(y_\psi(\tau, z)) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}(y_\psi(\tau, z)) d_{x_\psi(\tau)} \psi \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\tau \\ = P_s e^{At} + \int_0^t P_s e^{A(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial z} \bar{g}(y_\psi(\tau, z)) d\tau \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{At} z + \int_0^t P_s e^{A(t-\tau)} \bar{g}(y_\psi(\tau, z)) d\tau \right) \\ = \frac{\partial x_\psi(\tau)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

از یکتایی جواب‌های معادله دیفرانسیل درمی‌یابیم که $W(t) = \partial u / \partial z$. علاوه بر آن، با اعمال قانون لیبشیتز در (۳۰.۵)،

$$A(\psi, d\psi)(z) = - \int_0^{+\infty} d_z [P_u e^{-A\tau} \bar{g}(y_\psi(\tau, z))] d\tau = d_z T(\psi),$$

به دست می‌آید. از آنجایی که $z \mapsto A(\psi, d\psi)(z)$ پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که $T(\psi)$ از کلاس C^1 است. اکنون جفت $(\varphi_0, \Phi_0) = (0, 0) \in Y \times Z$ را در نظر بگیرید. به روشنی، $\Phi_0(z) = d_z \varphi_0$. دنباله بازگشتی (φ_n, Φ_n) را به صورت

$$(\varphi_{n+1}, \Phi_{n+1}) = S(\varphi_n, \Phi_n) = (T(\varphi_n), A(\varphi_n, \Phi_n)),$$

تعریف می‌کنیم. با فرض اینکه φ_n از کلاس C^1 بوده و $\Phi_n(z) = d_z \varphi_n$ ، از (۴۵.۵) نتیجه می‌شود که تابع φ_{n+1} از کلاس C^1 است و

$$d_z \varphi_{n+1} = d_z T(\varphi_n) = A(\varphi_n, \Phi_n) = \Phi_{n+1}. \quad (۴۶.۵)$$

علاوه بر آن، اگر φ و Φ به ترتیب نقاط ثابت T و $A(\varphi, \Psi) \mapsto \Psi$ باشند، آنگاه با استفاده از قضیه انقباض تار (قضیه ۳۸.۱)، دنباله‌های φ_n و Φ_n در هر یک از فضاهاى فشرده E^s به‌طور یکنواخت به ترتیب به φ و Φ میل می‌کنند. از (۴۶.۵) و قضیه ۴۱.۱ نتیجه می‌شود که φ دیفرانسیل پذیر بوده و $d_z \varphi = \Phi(z)$. از آنجایی که Φ پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که φ از کلاس C^1 است. \square

۵.۵ تمرین‌ها

تمرین ۱.۵. خلاصه‌ای از برهان قضیه ۲.۵ برای $k = 2$ ، ارائه کنید؛ به این معنی که نشان دهید اگر تابع f از کلاس C^2 باشد، آنگاه یک همسایگی B از x_0 موجود است به گونه‌ای که $V^s \cap B$ نمودار یک تابع از کلاس C^2 است. تمرین ۲.۵. دیفیومورفیسم $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را از کلاس C^1 در نظر بگیرید به گونه‌ای که $f(0) = 0$ ،

$$d_0 f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ و } 0 < a < 1 < b \text{ برای } \delta > 0 \text{ داده شده، فرض کنید}$$

$$V = \{x \in B(0, \delta) : f^n(x) \in B(0, \delta), n \in \mathbb{N}\}.$$

نشان دهید که δ و λ با $a < \lambda < 1$ موجود است به طوری که اگر $(x, y) \in V$ ، آنگاه

$$\|f^n(x, y)\| \leq \lambda^n \|(x, y)\|, n \in \mathbb{N}.$$

راهنمایی: f را به صورت

$$f^n(x, y) = (ax + g(x, y), bx + h(x, y)),$$

نوشته و به دنبال V به عنوان نمودار

$$V = \{(x, \varphi(x)) : x \in (-\delta, \delta)\}$$

از تابع لیپشیتزی مانند $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ با $\varphi(0) = 0$ بگردید.

بخش سوم

معادلات در صفحه

فصل ۶

نظریه شاخص

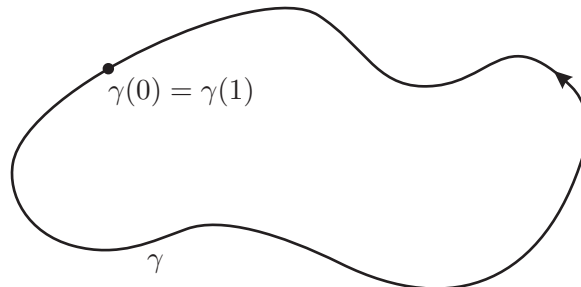
در این فصل، مفهوم شاخص یک مسیر بسته را با توجه به یک میدان برداری در صفحه معرفی می‌کنیم. ما عمداً، گاهی کلی‌ترین شکل نتایج را ارائه نمی‌کنیم، زیرا در غیر این صورت به راهکارهایی نیاز داریم که خارج از حوصله کتاب است. به‌طور خاص، در مورد اینکه چگونه شاخص با اختلالات مسیر و میدان برداری تغییر می‌کند، بحث می‌کنیم – شاخص تغییر نمی‌کند مشروط بر اینکه اختلالات از صفرهای میدان برداری اجتناب کنند. به‌عنوان یک کاربرد مفهوم شاخص، وجود یک نقطه بحرانی در درون هر مدار تناوبی را در صفحه (به‌مفهوم قضیه خم جردن) مشخص می‌کنیم. برای مباحث بیشتر، خواننده را به [۴، ۹، ۱۹] ارجاع می‌دهیم.

۱.۶ شاخص میدان‌های برداری در صفحه

در این بخش، مفهوم شاخص یک مسیر بسته را با توجه به یک میدان برداری در صفحه معرفی می‌کنیم، و نحوه تغییر آن با اختلالات مسیر و میدان برداری را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۱.۶. مفاهیم پایه‌ای. ابتدا مفهوم مسیر هموار را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۶. تابع پیوسته $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک مسیر هموار نامیده می‌شود هرگاه تابع $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ از کلاس C^1 در بازه $[0, 1] \supset (a, b)$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای $t \in [0, 1]$ و $\alpha(t) = \gamma(t)$ و $\alpha'(t) \neq 0$.



شکل ۱.۶: مسیر بسته.

تصویر $\gamma([0, 1])$ از یک مسیر هموار یک خم نامیده می‌شود.

برای سادگی در ارئه، مفهوم زیر را نیز معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۶. یک مسیر هموار $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، یک مسیر بسته نامیده می‌شود هرگاه $\gamma(0) = \gamma(1)$ و تعیین $\gamma|_{(0, 1)}$ یک به یک باشد (شکل ۱.۶ را ببینید).

توجه کنید که تصویر $\gamma([0, 1])$ از یک خم بسته هیچ نقطه برخوردی به جز نقاط ابتدایی و انتهایی $\gamma(0) = \gamma(1)$ ندارد. میدان برداری $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ از کلاس C^1 را با نوشتن $f = (f_1, f_2)$ که $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ مؤلفه‌های f هستند در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که انتگرال خطی f در طول مسیر هموار γ به صورت

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 [f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)] dt,$$

تعریف می‌شود که $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

تعریف ۳.۶. برای مسیر بسته γ که $\gamma([0, 1])$ شامل هیچ یک از ریشه‌های f نباشد، تعداد

$$\text{Ind}_f \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1}{f_1^2 + f_2^2},$$

شاخص γ (با توجه به f) نامیده می‌شود.

در اینجا توصیفی هندسی از مفهوم شاخص ارائه می‌دهیم. برای این منظور، توجه می‌کنیم که در همسایگی هر

نقطه $x \in \gamma([0, 1])$ ، زاویه بین $f(x)$ و قسمت مثبت محور افقی به صورت

$$\theta(x) = \begin{cases} \arctan(f_2(x)/f_1(x)), & f_1(x) > 0, \\ \pi/2, & f_1(x) = 0, f_2(x) > 0, \\ \arctan(f_2(x)/f_1(x)) + \pi, & f_1(x) < 0, \\ -\pi/2, & f_1(x) = 0, f_2(x) < 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

بدست می‌آید که \arctan نشان دهنده وارون تانژانت با مقادیر در $(-\pi/2, \pi/2)$ است. اکنون

$$\begin{aligned} N(f, \gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{dt} \theta(\gamma(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \nabla \theta(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

را تعریف می‌کنیم. توجه می‌کنیم که اگرچه تابع θ فقط به صورت موضعی و با اختلاف مضرب صحیحی از 2π تعریف می‌شود، گرادیان $\nabla \theta$ به صورت سراسری تعریف می‌شود.

قضیه ۴.۶. اگر $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک مسیر بسته باشد به طوری که $\gamma([0, 1])$ شامل هیچ یک از ریشه‌های f

نباشد، آنگاه $\text{Ind}_f \gamma = N(f, \gamma)$.

برهان. برای تابع θ در (۱.۶) داریم

$$\nabla \theta = \frac{f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1}{f_1^2 + f_2^2},$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Ind}_f \gamma &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \nabla \theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \nabla \theta(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{dt} \theta(\gamma(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

□

این، نتیجه را بدست می‌دهد.

از تعریف $N(f, \gamma)$ در (۲.۶) و قضیه ۴.۶ نتیجه می‌شود که شاخص، همیشه یک عدد صحیح است.

مثال ۵.۶. تصاویر فاز شکل ۲.۶ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان بررسی کرد که در تصویر فاز نخست،

$$\text{Ind}_f \gamma_1 = 0, \quad \text{Ind}_f \gamma_2 = -1,$$

و در تصویر فاز دوم

$$\text{Ind}_f \gamma_3 = 0, \quad \text{Ind}_f \gamma_4 = -1.$$

توجه می‌کنیم که اگر یک مسیر بسته در جهت مخالف طی شود، شاخص تغییر علامت می‌دهد. به‌طور دقیق‌تر،

برای مسیر بسته $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، ما مسیر بسته $-\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با ضابطه

$$(-\gamma)(t) = \gamma(1-t),$$

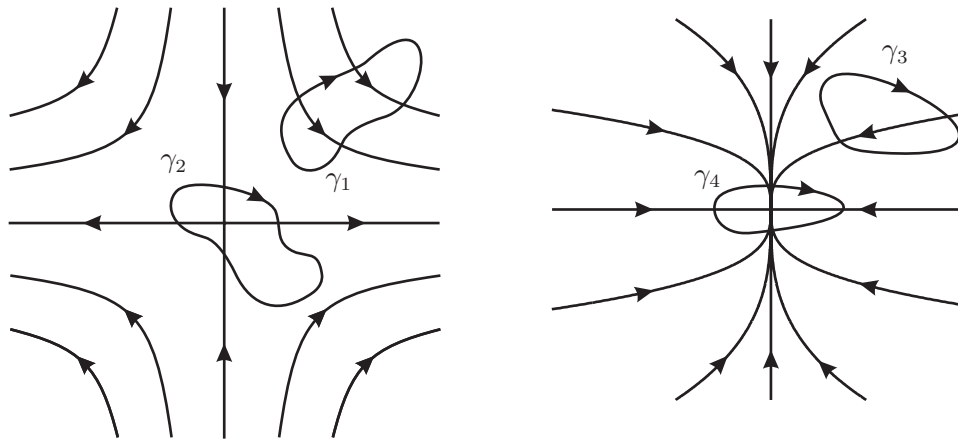
در نظر می‌گیریم. از آنجایی که γ و $-\gamma$ دارای تصویر یکسانی هستند، اگر خم $\gamma([0, 1])$ شامل هیچ‌یک از ریشه‌های f نباشد، آنگاه $\text{Ind}_f(-\gamma)$ نیز خوش‌تعریف است و

$$\text{Ind}_f(-\gamma) = -\text{Ind}_f \gamma.$$

اکنون بررسی می‌کنیم که در یک همسایگی به‌اندازه‌کافی کوچک از یک نقطه غیربحرانی، شاخص همیشه صفر است.

قضیه ۶.۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. اگر $x_0 \in \mathbb{R}^2$ به‌گونه‌ای تعریف شده باشد که $f(x_0) \neq 0$ ، آنگاه برای هر مسیر بسته γ که تصویرش مشمول در هر همسایگی به‌اندازه‌کافی کوچک از x_0 است، $\text{Ind}_f \gamma = 0$ است.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که با توجه به پیوستگی، تابع f مقدار صفر را در یک همسایگی به‌اندازه‌کافی کوچک از x_0 نمی‌گیرد. بنابراین، برای هر مسیر بسته γ در این همسایگی، تصویر $\gamma([0, 1])$ فاقد ریشه‌های f است و شاخص $\text{Ind}_f \gamma$ خوش‌تعریف است. علاوه‌براین، با توجه به پیوستگی f در یک همسایگی به‌اندازه‌کافی کوچک از x_0 ، تابع θ در (۱.۶) فقط مقادیری را از بازه‌ای مانند $[a, b]$ با طول کمتر از 2π دریافت می‌کند و بنابراین، از نخستین انتگرال در (۲.۶)، $N(f, \gamma) = 0$ ، از گزاره ۴.۶، $\text{Ind}_f \gamma = 0$ حاصل می‌شود. \square



شکل ۲.۶: تصاویر فاز مثال ۶.۵.

۲.۱.۶. اختلالات مسیر و میدان برداری. در این بخش نحوه تغییر شاخص به دلیل اختلالات مسیر γ و

میدان برداری f را بررسی می‌کنیم.

ابتدا مفهوم هموتوپی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۷.۶. دو مسیر بسته $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] : \gamma_0, \gamma_1$ هموتوپیک نامیده می‌شوند هرگاه یک تابع پیوسته

$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ موجود باشد (شکل ۳.۶ را ببینید) به گونه‌ای که

(الف) برای هر $t \in [0, 1]$ ، $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ و $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ ؛

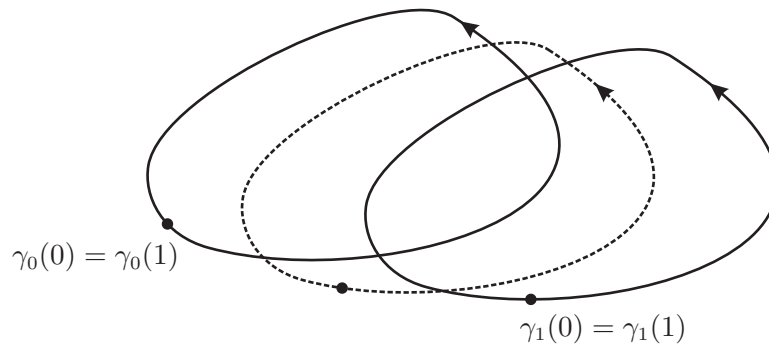
(ب) برای هر $s \in [0, 1]$ ، $H(0, s) = H(1, s)$. می‌گوئیم H یک هموتوپی بین مسیرهای γ_0 و γ_1

است.

نتیجه زیر چگونگی تغییر شاخص با هموتوپی‌های مسیر را توضیح می‌دهد.

قضیه ۸.۶. شاخص یک مسیر بسته با توجه به میدان برداری $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f$ از کلاس C^1 ، تحت هموتوپی

بین مسیرهای بسته که تصاویر آنها فاقد ریشه‌های f هستند، تغییر نمی‌کند.



شکل ۳.۶: هومتوپی بین مسیرهای بسته.

برهان. فرض کنید $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک هومتوپی بین دو مسیر بسته γ_0 و γ_1 باشد به گونه‌ای که $H([0, 1] \times [0, 1])$ فاقد ریشه‌های f باشد. از آنجایی که تابع $(t, s) \mapsto f(\gamma_s(t))$ روی مجموعه فشرده $[0, 1] \times [0, 1]$ پیوسته یکنواخت است (زیرا توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده، پیوسته یکنواخت هستند)، برای $\epsilon > 0$ داده شده و $s \in [0, 1]$ همسایگی I_s از s در $[0, 1]$ موجود است به گونه‌ای که برای هر $t \in [0, 1]$ و $r \in I_s$

$$\|f(\gamma_r(t)) - f(\gamma_s(t))\| < \epsilon,$$

برقرار است. از اینجا نتیجه می‌شود که برای $r \in I_s$ $N(f, \gamma_r) = \text{Ind}_f \gamma_s$ (چون شاخص یک عدد صحیح است). بنابراین، برای $r \in I_s$

$$\text{Ind}_f \gamma_r = \text{Ind}_f \gamma_s.$$

از آنجایی که بازه $[0, 1]$ فشرده است، یک زیرپوشش متناهی I_{s_1}, \dots, I_{s_n} از $[0, 1]$ با $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ موجود است. از این رو

$$\text{Ind}_f \gamma_0 = \text{Ind}_f \gamma_{s_1} = \text{Ind}_f \gamma_{s_2} = \dots = \text{Ind}_f \gamma_{s_n} = \text{Ind}_f \gamma_1,$$

□

که نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

اکنون اختلالی از میدان برداری f را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۹.۶. فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع پیوسته باشد به گونه‌ای که $x \mapsto F(x, s)$ برای هر $s \in [0, 1]$ از کلاس C^1 است. اگر γ یک مسیر بسته باشد که برای هر $x \in \gamma([0, 1])$ و $s \in [0, 1]$ داشته باشیم $F_s(x) = F(x, s) \neq 0$ ، آنگاه $\text{Ind}_{F_0} \gamma = \text{Ind}_{F_1} \gamma$ که $F_s(x) = F(x, s)$.

برهان. به روشی مشابه در برهان قضیه ۶.۸ عمل می‌کنیم. از آنجایی که تابع $f(\gamma(t), s) \mapsto (t, s)$ روی $[0, 1] \times [0, 1]$ پیوسته یکنواخت است، برای هر $\epsilon > 0$ و $s \in [0, 1]$ ، همسایگی J_s از s در $[0, 1]$ موجود است به گونه‌ای که برای هر $r \in J_s$ و $t \in [0, 1]$

$$\|F(\gamma(t), r) - F(\gamma(t), s)\| < \epsilon.$$

این نشان می‌دهد که برای $r \in J_s$ ، $\text{Ind}_{F_r} \gamma = \text{Ind}_{F_s} \gamma$. از آنجایی که بازه $[0, 1]$ فشرده است، یک زیرپوشش J_{s_1}, \dots, J_{s_m} از $[0, 1]$ با $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ موجود است. از این رو

$$\text{Ind}_{F_0} \gamma = \text{Ind}_{F_{s_1}} \gamma = \text{Ind}_{F_{s_2}} \gamma = \dots = \text{Ind}_{F_{s_m}} \gamma = \text{Ind}_{F_1} \gamma$$

□

که نتیجه حاصل می‌شود.

۲.۶ کاربردهایی از مفهوم شاخص

چندین کاربرد از مفهوم شاخص ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۶. مدارهای تناوبی و نقاط بحرانی. در این بخش به عنوان یک کاربرد از قضیه ۸.۶ نشان می‌دهیم که هر مدار تناوبی یک نقطه بحرانی در درون خود دارد (به مفهوم قضیه خم جردن). ابتدا مفهوم مجموعه همبند را به یاد می‌آوریم.

تعریف ۱.۰.۶. مجموعه $U \subset \mathbb{R}^2$ ناهمبند نامیده می‌شود هرگاه بتوان آن را به صورت $U = A \cup B$ برای

مجموعه‌های ناتهی A و B نوشت به‌گونه‌ای که

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset.$$

مجموعه $U \subset \mathbb{R}^2$ همبند نامیده می‌شود هرگاه ناهمبند نباشد.

همچنین مفهوم یک مؤلفه همبند را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۶. برای $U \subset \mathbb{R}^2$ داده‌شده، مجموعه $A \subset U$ ، مؤلفه همبند U نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه همبند $B \subset U$ که شامل A است، برابر با A باشد.

اکنون قضیه خم جردن را یادآوری می‌کنیم (برای برهان، می‌توانید [۱۰] را ببینید).

قضیه ۱۲.۶. (قضیه خم جردن).^۱ اگر $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع پیوسته با $\gamma(0) = \gamma(1)$ باشد که $\gamma|_{(0, 1)}$ یک‌به‌یک است، آنگاه $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$ دارای دو مؤلفه همبند است که یکی کراندار و دیگری بی‌کران است.

مؤلفه همبند کراندار در قضیه ۱۲.۶ درون خم $\gamma([0, 1])$ نامیده می‌شود. اکنون می‌توان نتیجه زیر را فرمول‌بندی کرد.

قضیه ۱۳.۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^2 بوده و $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک خم بسته باشد. اگر $\text{Ind}_f \gamma \neq 0$ ، آنگاه درون خم $\gamma([0, 1])$ شامل حداقل یکی از ریشه‌های بحرانی معادله $x' = f(x)$ است.

برهان. با برهان خلف فرض می‌کنیم که درون U از خم $\gamma([0, 1])$ شامل هیچ نقطه بحرانی نباشد. از آنجایی که θ از کلاس C^2 بوده و $\nabla \theta = (\partial \theta / \partial x, \partial \theta / \partial y)$ از قضیه گرین نتیجه می‌شود که

$$0 \neq \text{Ind}_f \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \nabla \theta = \frac{1}{2\pi} \int_U \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] dx dy = 0.$$

این تناقض نشان می‌دهد که U دارای حداقل یک نقطه بحرانی است. \square

¹Jordan's curve theorem

نتیجه زیر از قضیه ۶.۱۳ به دست می آید.

قضیه ۱۴.۶. اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^2 باشد، آنگاه در درون هر مدار تناوبی معادله $x' = f(x)$ حداقل یک نقطه بحرانی موجود است.

برهان. فرض کنید γ یک مسیر بسته باشد که تصویر آن $\gamma([0, 1])$ یک مدار تناوبی است. ابتدا نشان می دهیم $\text{Ind}_f \gamma = \pm 1$. توجه کنید $\text{Ind}_f \gamma = \text{Ind}_g \gamma$ ، که در یک همسایگی از $\gamma([0, 1])$ به صورت $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ تعریف شده است (به روشنی، f روی مدار تناوبی صفر نمی شود). این به راحتی از قضیه ۴.۶ نتیجه می شود زیرا تابع θ در (۱.۶) مقادیر یکسانی را برای f و g می گیرد. علاوه بر این، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که خم $\gamma([0, 1])$ در نیم صفحه بالایی قرار دارد و محور افقی، مماس بر $\gamma([0, 1])$ در نقطه $\gamma(0)$ بوده و $\gamma'(0)$ به سمت جهت مثبت محور است (اگر خم γ در جهت مخالف طی شود، می توان خم $-\gamma$ را در نظر گرفت و از اتحاد $\text{Ind}_f \gamma = -\text{Ind}_f(-\gamma)$ استفاده کرد).

اکنون تابع $\nu: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ را در مثلث

$$\Delta = \{(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1] : t \leq s\},$$

با ضابطه

$$\nu(t, s) = \begin{cases} -g(\gamma(0)), & (t, s) = (0, 1), \\ g(\gamma(t)), & t = s, \\ (\gamma(s) - \gamma(t))/\|\gamma(s) - \gamma(t)\|, & t < s, (t, s) \neq (0, 1), \end{cases}$$

تعریف می کنیم. به راحتی می توان بررسی کرد که تابع ν پیوسته است و مقدار صفر را نمی گیرد. فرض کنید $\alpha(t, s)$ زاویه بین $\nu(t, s)$ و قسمت مثبت محور افقی باشد. واضح است که $\alpha(0, 0) = 0$ ، زیرا $\gamma'(0)$ افقی و به سمت جهت مثبت است. علاوه بر این، از آنجایی که $\gamma([0, 1])$ در نیم صفحه بالایی قرار دارد، تابع $\alpha(0, s) \ni s \in [0, 1]$ از ۰ تا π تغییر می کند. به طور مشابه، تابع $\alpha(t, 1) \ni t \in [0, 1]$ از ۰ تا 2π تغییر می کند.

از طرف دیگر، از آنجایی که ν مقدار صفر را در Δ نمی‌گیرد، از قضیه ۱۳.۶ نتیجه می‌شود $\text{Ind}_\nu \partial \Delta = 0$. این نشان می‌دهد که تابع $\alpha(t, t) \ni t \in [0, 1]$ از 0 تا 2π تغییر می‌کند. اکنون مشاهده می‌کنیم که با توجه به تعریف ν ، $\alpha(t, t)$ با زاویه $\theta(\gamma(t))$ بین $g(\gamma(t))$ و قسمت مثبت محور افقی منطبق است. از این رو

$$N(g, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{dt} \theta(\gamma(t)) dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

و از قضیه ۴.۶ نتیجه می‌شود $\text{Ind}_f \gamma = 1$.

با اعمال قضیه ۱۳.۶، نتیجه می‌شود که حداقل یک نقطه بحرانی در درون مدار تناوبی موجود است. \square

در ادامه، تعمیم قضیه ۱۳.۶ به میدان‌های برداری از کلاس C^1 برای مسیرهای بسته که تصویر آنها یک دایره است، ارائه شده است.

قضیه ۱۵.۶. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 بوده و $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ مسیر بسته‌ای باشد که تصویرش یک دایره است. اگر $\text{Ind}_f \gamma \neq 0$ ، آنگاه درون خم $\gamma([0, 1])$ شامل حداقل یک نقطه بحرانی از معادله $x' = f(x)$ است.

برهان. فرض کنید که درون خم $\gamma([0, 1])$ هیچ نقطه بحرانی ندارد. اکنون، فرض کنید α یک مسیر بسته در درون $\gamma([0, 1])$ باشد که در همان جهت γ پیمایش می‌کند. سپس تابع $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ که با ضابطه

$$H(s, t) = s\gamma(t) + (1-s)\alpha(t),$$

تعریف شده یک هموتوپی بین γ و α است. علاوه بر این، $H([0, 1] \times [0, 1])$ شامل هیچ نقطه بحرانی نیست. از گزاره ۸.۶ برمی‌آید که $\text{Ind}_f \alpha = \text{Ind}_f \gamma \neq 0$. از سوی دیگر، اگر قطر مجموعه $\alpha([0, 1])$ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه از قضیه ۶.۶ نتیجه می‌شود که $\text{Ind}_f \alpha = 0$. این تناقض نشان می‌دهد که حداقل یک نقطه بحرانی در درون خم $\gamma([0, 1])$ وجود دارد. \square

۲.۲.۶. قضیه نقطه ثابت براوئر^۱ در اینجا و در بخش بعدی دو کاربرد از قضیه ۹.۶ ارائه می‌دهیم. نخستین برهان، برهان یک حالت خاص از قضیه نقطه ثابت براوئر است. به این معنی که فقط توابع از کلاس C^1 را در صفحه در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱۶.۶. اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 بوده و $B \subset \mathbb{R}^2$ یک گوی بسته باشد به گونه‌ای که $f(B) \subset B$ ، آنگاه f دارای حداقل یک نقطه ثابت در B است.
برهان. با تغییر متغیر، همیشه می‌توان فرض کرد که در نهایت

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

اکنون تبدیل $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با تعریف $g(x) = x - f(x)$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم که g در B ریشه دارد. اگر ریشه‌هایی در مرز B باشند، چیزی برای اثبات وجود ندارد. بنابراین، فرض می‌کنیم که هیچ ریشه‌ای در مرز B وجود ندارد و تابع $F: \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با تعریف

$$F(x, t) = tf(x) - x.$$

در نظر می‌گیریم. توجه کنید که با توجه به فرض، برای $x \in \partial B$ ، $F(x, 1) = g(x) \neq 0$. علاوه بر آن، برای $t \in [0, 1]$ داریم $\|tf(x)\| < 1$ و بنابراین برای $\|x\| = 1$ رابطه $tf(x) = x$ به دست می‌آید. این نشان می‌دهد که برای هر $x \in \partial B$ و $t \in [0, 1]$ ، $F(x, t) \neq 0$. اکنون مسیر بسته، $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ با تعریف

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

را در نظر بگیرید که مرز B را در جهت مثبت می‌پیماید. در این صورت، شرایط قضیه ۹.۶ برقرار می‌شود و نتیجه می‌گیریم که

$$\text{Ind}_g \gamma = \text{Ind}_{F_1} \gamma = \text{Ind}_{F_0} \gamma = \text{Ind}_{\text{Id}} \gamma = 1.$$

بنابراین از قضیه ۱۵.۶ نتیجه می‌شود که g حداقل یک ریشه در درون گوی B دارد. \square

¹Brouwer fixed-point theorem

۳.۲.۶. قضیه اساسی جبر. اکنون دوباره به عنوان کاربرد قضیه ۹.۶، اثباتی از قضیه اساسی جبر ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۷.۶. (قضیه اساسی جبر). برای $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ داده شده، معادله $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ حداقل یک ریشه در \mathbb{C} دارد.

برهان. با معادل دانستن \mathbb{C} با \mathbb{R}^2 ، تابع $F: \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه

$$F(z, t) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$$

تعریف می‌کنیم. علاوه بر آن، برای $r > 0$ داده شده، مسیر بسته $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ با تعریف $\gamma(t) = r e^{2\pi i t}$ را در نظر می‌گیریم. اکنون فرض می‌کنیم

$$r > 1 + |a_1| + \dots + |a_n|.$$

برای $z \in \gamma([0, 1])$ و $t \in [0, 1]$ ، از $r > 1$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |z^n| = r^n &> |a_1| r^{n-1} + |a_2| r^{n-1} + \dots + |a_n| r^{n-1} \\ &> |a_1| r^{n-1} + |a_2| r^{n-1} + \dots + |a_n| \\ &\geq |a_1 z^{n-1} + a_2 + \dots + a_n| \\ &\geq t |a_1 z^{n-1} + a_2 + \dots + a_n|. \end{aligned}$$

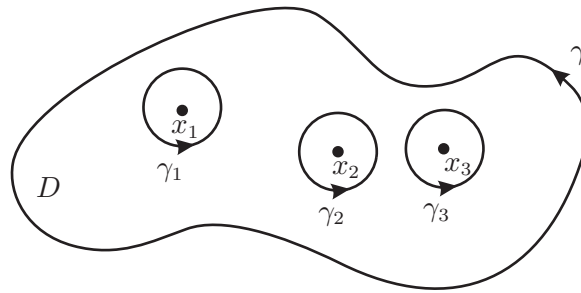
این نشان می‌دهد که برای $z \in \gamma([0, 1])$ و $t \in [0, 1]$ ، $F(z, t) \neq 0$. بنابراین، با قرار دادن $F_t(z) = F(z, t)$ برای هر $t \in [0, 1]$ ، از قضیه ۹.۶ نتیجه می‌شود

$$\text{Ind}_{F_1} \gamma = \text{Ind}_{F_0} \gamma. \quad (۴.۶)$$

از طرف دیگر، به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\text{Ind}_{F_0} \gamma = n \neq 0$. از (۴.۶) نتیجه می‌شود $\text{Ind}_{F_0} \gamma \neq 0$. از این رو، طبق قضیه ۱۵.۶، حداقل یک ریشه از F_1 در درون $\gamma([0, 1])$ موجود است که به این معنی است که چندجمله‌ای

$$F_1(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

حداقل یک ریشه در $|z| < r$ دارد. \square



شکل ۴.۶: مسیره‌های γ و γ_i برای $i = 1, \dots, n$.

۳.۶ شاخص یک نقطه بحرانی تنها

در این بخش، مفهوم شاخص یک نقطه بحرانی تنها از معادله $x' = f(x)$ را برای میدان برداری $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ از کلاس C^1 معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱۸.۶. نقطه بحرانی x_0 از معادله $x' = f(x)$ تنها نامیده می‌شود در صورتی که این نقطه، تنها نقطه بحرانی در همسایگی‌ای از x_0 باشد.

برای نقطه بحرانی تنهای x_0 از معادله $x' = f(x)$ ، ϵ را به اندازه کافی کوچک بگیرد به گونه‌ای که گوی $B(x_0, \epsilon)$ شامل هیچ نقطه بحرانی دیگری غیر از x_0 نباشد و مسیر بسته $\gamma_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با ضابطه

$$\gamma_\epsilon(t) = x_0 + \epsilon(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

در نظر بگیرید. طبق قضیه ۸.۶، عدد صحیح $\text{Ind}_f \gamma_\epsilon$ برای هر $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک یکسان است و می‌توان مفهوم زیر را معرفی کرد.

تعریف ۱۹.۶. برای نقطه بحرانی تنهای x_0 از $x' = f(x)$ ، شاخص x_0 (با توجه به f) برای هر $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، عدد صحیح $\text{Ind}_f \gamma_\epsilon$ است که آن را با $\text{Ind}_f x_0$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۰.۶. تصاویر فاز را در شکل ۱۶.۲ در نظر بگیرید. مبدأ، یک نقطه بحرانی تنها در همه آنهاست. می‌توان

به راحتی بررسی کرد که شاخص در حالت نقطه زینی برابر با -1 و در سایر تصاویر فاز برابر با 1 است.

نشان می‌دهیم که برای محاسبه شاخص هر مسیر بسته، کفایت شاخص نقاط بحرانی تنها را بدانیم. برای سادگی اثبات، فقط میدان‌های برداری از کلاس C^2 را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲۱.۶. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تابعی از کلاس C^2 و γ مسیر بسته‌ای با جهت مثبت باشد. اگر معادله $x' = f(x)$ دارای تعداد متناهی نقطه بحرانی x_1, \dots, x_n در داخل خم $\gamma([0, 1])$ باشد، آنگاه

$$\text{Ind}_f \gamma = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_f x_i.$$

برهان. فرض کنید U درون خم $\gamma([0, 1])$ باشد و $\epsilon > 0$ را به اندازه کافی کوچک در نظر بگیرید به گونه‌ای که برای $i = 1, \dots, n$ همچنین $\overline{B(x_i, \epsilon)} \subset U$. همچنین برای $i = 1, \dots, n$ مسیرهای بسته $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$$\gamma_i(t) = x_i + \epsilon(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

را در نظر بگیرید (شکل ۴.۶ را ببینید). از قضیه گرین نتیجه می‌شود

$$0 = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] dx dy = \int_\gamma \nabla \theta - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \nabla \theta,$$

که $D = \overline{U} \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$. بنابراین، از (۳.۶) داریم

$$\text{Ind}_f \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \nabla \theta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \nabla \theta = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_f \gamma_i.$$

از آنجایی که درون هر خم $\gamma_i([0, 1])$ شامل هیچ نقطه بحرانی دیگری به غیر از x_i نیست، نتیجه می‌گیریم که برای $i = 1, \dots, n$ $\text{Ind}_f \gamma_i = \text{Ind}_f x_i$. از این رو،

$$\text{Ind}_f \gamma = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_f \gamma_i = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_f x_i,$$

□

که نتیجه حاصل می‌شود.

تمرین‌ها

تمرین ۱.۶. معادله زیر را در دستگاه مختصات قطبی در نظر بگیرید

$$\begin{cases} r' = r \cos \theta, \\ \theta' = \sin \theta. \end{cases}$$

(الف) تصویر فاز را رسم کنید.

(ب) پایداری نقاط بحرانی را تعیین کنید.

(ج) شاخص همه نقاط بحرانی تنها را بیابید.

تمرین ۲.۶. برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -x/4 + \alpha y - \beta(x^2 + 4y^2)y - (x^2 + 4y^2)^2 y. \end{cases}$$

(الف) شاخص مبدأ را در حالت $\alpha = 1$ بیابید.

(ب) آیا در حالت $\alpha \neq 0$ معادله پایستار است؟

(ج) نشان دهید که اگر $\alpha = \beta = 0$ ، آنگاه مبدأ پایدار است.

(د) نشان دهید که اگر $\alpha > 0$ ، آنگاه دستکم یک مدار تناوبی موجود است.

تمرین ۳.۶. معادله زیر را در دستگاه مختصات قطبی در نظر بگیرید

$$\begin{cases} r' = r(1 + \cos \theta), \\ \theta' = r(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

(الف) تصویر فاز را رسم کنید.

(ب) پایداری نقاط بحرانی را تعیین کنید.

(ج) شاخص همه نقاط بحرانی تنها را بیابید.

(د) بررسی کنید آیا جواب‌های سراسری موجودند که بحرانی نباشند.

تمرین ۴.۶. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u' = u - uv, \\ v' = uv - v. \end{cases}$$

(الف) شاخص مبدأ را بیابید.

(ب) نشان دهید

$$H(u, v) = u + v - \log(uv)$$

یک انتگرال از ربع $\{(u, v) : u, v > 0\}$ است. نشان دهید به تعداد نامتناهی مدار تناوبی موجود است.

راهنمایی: بررسی کنید H در $(1, 1)$ دارای مینیمم است.

(د) تصویر فاز را ترسیم کنید.

تمرین ۵.۶. نشان دهید که اگر $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ توابع پیوسته کراندار باشند، آنگاه معادله

$$\begin{cases} x' = y + f(x, y), \\ y' = -x + g(x, y), \end{cases}$$

دارای دست‌کم یک نقطه بحرانی است.

تمرین ۶.۶. فرض کنید $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته کراندار باشد.

(الف) نشان دهید یک $x \in \mathbb{R}$ موجود است به گونه‌ای که $F(-F(x)) = x$. راهنمایی: از تمرین ۵.۶ استفاده کنید.

(ب) نشان دهید یک $x \in \mathbb{R}$ موجود است به گونه‌ای که $\sin(1 - \sin^2(1 - x^2)) = x$.

تمرین ۷.۶. شاخص میدان برداری زیر را در مبدأ بیابید

$$f(x, y) = (2x + y + x^2 + xy^3, x + y - y^2 + x^2y^3).$$

تمرین ۸.۶. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. نشان دهید اگر معادله $x' = f(x)$ دارای

یک مدار تناوبی γ باشد، آنگاه گزاره زیر برقرار است: یا در درون U از γ ، $\operatorname{div} f = 0$ (به مفهوم قضیه خم

جردن)، یا دارای علامت‌های متفاوتی در U می‌شود. راهنمایی: بنویسید $f = (f_1, f_2)$ و توجه کنید که

طبق قضیه گرین،

$$\int_U \operatorname{div} f = \int_{\gamma} (-f_2, f_1).$$

تمرین ۹.۶. نشان دهید اگر $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع از کلاس C^1 باشند، آنگاه معادله

$$\begin{cases} x' = f(y), \\ y' = g(x) + y^3, \end{cases}$$

شامل هیچ مدار تناوبی نیست.

تمرین ۱۰.۶. معادله

$$x'' = p(x)x' + q(x),$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از تمرین ۸.۶، نشان دهید که اگر $p < 0$ ، آنگاه هیچ مدار تناوبی موجود نیست.

تمرین ۱۱.۶. معادله

$$\begin{cases} x' = y(1 + x - y^2), \\ y' = x(1 + y - x^2), \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید در ربع اول هیچ مدار تناوبی موجود نیست.

تمرین ۱۲.۶. بررسی کنید که آیا معادله زیر جواب‌های تناوبی دارد یا خیر

$$(الف) \quad x'' + x^6 + 1 = 0;$$

(ب)

$$\begin{cases} x' + y^3 - 1 = 0, \\ y' + x^6 + 1 = 0. \end{cases}$$

جواب‌ها .

۱.۶ (ب) مبدأ، تنها نقطه بحرانی بوده و ناپایدار است.

(ج) ۲.

۲.۶ (الف) ۱.

(ب) خیر.

۳.۶ (ب) $(0, 0)$ ناپایدار است.

(ج) ۱.

(د) موجود است.

۴.۶ (الف) ۱-.

۱۷.۶-۱.

۱۲.۶ (الف) ندارد.

(ب) ندارد.

فصل ۷

قضیه پوانکاره- بندیکسون

این فصل مقدمه‌ای بر نظریه پوانکاره- بندیکسون است. پس از معرفی مفهوم مجموعه ناوردا، مجموعه‌های α -حدی و ω -حدی را در نظر می‌گیریم و برخی از ویژگی‌های اساسی آنها را مشخص می‌کنیم. به‌طور خاص، نشان می‌دهیم که نیم‌مدارهای کراندار، مجموعه‌های فشرده همبند α -حدی و ω -حدی را به‌وجود می‌آورند. سپس یکی از نتایج مهم نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل در صفحه، یعنی قضیه پوانکاره- بندیکسون را ثابت می‌کنیم که مجموعه‌های α -حدی و ω -حدی نیم‌مدارهای کراندار را مشخص می‌کند. به‌طور خاص، معیاری برای وجود مدارهای تناوبی ایجاد کند. برای مباحث بیشتر، خواننده را به [۹، ۱۳، ۱۵، ۱۷] ارجاع می‌دهیم.

۱.۷ مجموعه‌های حدی

فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته و موضعاً لیبشیتز باشد (تعریف ۱۵.۳ را ببینید). در این صورت، معادله

$$x' = f(x), \quad (1.7)$$

دارای جواب یکتاست. برای $\varphi_t(x_0)$ ، جواب $x(0) = x_0$ را با $t \in I_{x_0}$ نشان می‌دهیم که بازه ماکسیمال متناظر است.

۱.۱.۷. مفاهیم پایه‌ای. ابتدا مفهوم مجموعه ناوردا را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۷. مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ يك مجموعه ناوردا (با توجه به معادله (۱.۷)) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in A$ و $t \in I_x$ داشته باشیم $\varphi_t(x) \in A$.

مثال ۲.۷. معادله

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases} \quad (۲.۷)$$

را در نظر بگیرید. تصویر فاز آن در شکل ۴.۱ رسم شده است. مبدأ و هر دایره به مرکز مبدأ ناوردا هستند. به طور کلی تر، هر اجتماعی از دایره‌ها و هر اجتماعی از دایره‌ها به همراه مبدأ، مجموعه‌های ناوردا هستند.

مدار يك نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ (تعریف ۵۰.۱ را ببینید) را با

$$\gamma(x) = \gamma_f(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x\},$$

نمایش می‌دهیم.

معرفی مفاهیم زیر نیز مناسب است.

تعریف ۳.۷. برای $x \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه

$$\gamma^+(x) = \gamma_f^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^+\},$$

نیم‌مدار مثبت x و مجموعه

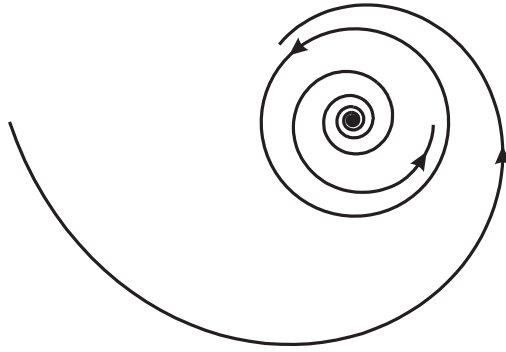
$$\gamma^-(x) = \gamma_f^-(x) = \{\varphi_t(x) : t \in I_x \cap \mathbb{R}^-\},$$

نیم‌مدار منفی x نامیده می‌شود.

به راحتی می‌توان بررسی کرد که یک مجموعه ناورداست اگر و فقط اگر اجتماعی از مدارها باشد. به عبارت دیگر،

يك مجموعه $A \subset \mathbb{R}^n$ ناورداست اگر و فقط اگر

$$A = \bigcup_{x \in A} \gamma(x).$$



شکل ۱.۷: تصویر فاز برای معادله (۳.۷).

اکنون، مفهوم مجموعه‌های α -حدی و ω -حدی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴.۷. برای $x \in \mathbb{R}^n$ ، مجموعه‌های α -حدی و ω -حدی x (با توجه به معادله (۱.۷)) به ترتیب به صورت

$$\alpha(x) = \alpha_f(x) = \bigcap_{y \in \gamma(x)} \overline{\gamma^-(y)},$$

و

$$\omega(x) = \omega_f(x) = \bigcap_{y \in \gamma(x)} \overline{\gamma^+(y)},$$

تعریف می‌شوند.

مثال ۵.۷. (ادامه مثال ۲.۷). برای معادله (۲.۷)، برای هر $x \in \mathbb{R}^2$ داریم

$$\alpha(x) = \omega(x) = \gamma^+(x) = \gamma^-(x) = \gamma(x).$$

مثال ۶.۷. معادله

$$\begin{cases} r' = r(1-r), \\ \theta' = 1, \end{cases} \quad (۳.۷)$$

را در دستگاه مختصات قطبی در نظر بگیرید. تصویر فاز آن در شکل ۱.۷ نشان داده شده است. قرار دهید

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

برای هر $x \in \{(0, 0)\} \cup S$,

$$\alpha(x) = \omega(x) = \gamma^+(x) = \gamma^-(x) = \gamma(x),$$

برای هر $x \in \mathbb{R}^2$ با $0 < \|x\| < 1$

$$\alpha(x) = \{(0, 0)\}, \quad \omega(x) = S,$$

و در نهایت برای هر $x \in \mathbb{R}^2$ با $\|x\| > 1$ داریم

$$\alpha(x) = \emptyset, \quad \omega(x) = S.$$

مثال ۷.۷. برای تصویر فاز داده شده در شکل ۲.۷ داریم

$$\alpha(x_1) = \omega(x_1) = \emptyset,$$

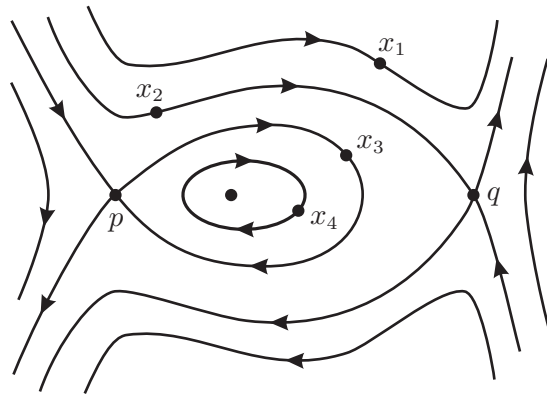
$$\alpha(x_2) = \emptyset, \quad \omega(x_2) = \{q\},$$

$$\alpha(x_3) = \omega(x_3) = \{p\},$$

$$\alpha(x_4) = \omega(x_4) = \gamma(x_4).$$

خواص بیشتر

در این بخش برخی از ویژگی‌های مجموعه‌های α -حدی و ω -حدی را برای معادله (۱.۷) تعیین می‌کنیم.



شکل ۲.۷: تصویر فاز برای مثال ۷.۷.

قضیه ۸.۷. اگر نیم‌مدار مثبت $\gamma^+(x)$ از نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ کراندار باشد، آنگاه

(الف) $\omega(x)$ فشرده، همبند و ناتهی است؛

(ب) $y \in \omega(x)$ اگر و تنها اگر دنباله $t_k \nearrow +\infty$ موجود باشد به گونه‌ای که وقتی $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه

$$\varphi_{t_k}(x) \rightarrow y$$

(ج) برای هر $y \in \omega(x)$ و هر $t > 0$ ، $\varphi_t(y) \in \omega(x)$ ؛

$$\inf\{\|\varphi_t(x) - y\| : y \in \omega(x)\} \rightarrow 0 \text{ که } t \rightarrow \infty.$$

برهان. قرار دهید $K = \overline{\gamma^+(x)}$. از تعریف مجموعه ω - حدی می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که $\omega(x)$ بسته

است. از سوی دیگر، $\omega(x) \subset K$ و بنابراین، $\omega(x)$ نیز کراندار است. از این رو، مجموعه ω - حدی فشرده است.

علاوه بر آن، از آنجایی که نیم‌مدار $\gamma^+(x)$ کراندار است، داریم $\mathbb{R}^+ \subset I_x$ (با توجه به قضیه (۴۶.۱)) و بنابراین

$$\omega(x) = \bigcap_{t>0} A_t, \quad (۴.۷)$$

که در آن

$$A_t = \overline{\{\varphi_s(x) : s > t\}}.$$

رابطه (۴.۷) دوّمین خاصیت قضیه را به دست می دهد. در واقع، اگر $y \in \omega(t)$ ، آنگاه دنباله $t_k \nearrow +\infty$ موجود است به گونه ای که برای $k \in \mathbb{N}$ ، $y \in A_{t_k}$ ، در نتیجه، دنباله $s_k \nearrow +\infty$ نیز با $s_k \geq t_k$ برای $k \in \mathbb{N}$ موجود است به گونه ای که وقتی $k \rightarrow \infty$ آنگاه $\varphi_{s_k}(x) \rightarrow y$. از سوی دیگر، اگر دنباله $t_k \nearrow +\infty$ با خاصیت دوم قضیه موجود باشد، آنگاه برای $k \in \mathbb{N}$ ، $y \in A_{t_k}$ و در نتیجه

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{t_k} = \bigcap_{t>0} A_t,$$

چون برای $t > t'$ ، $A_t \subset A_{t'}$.

اکنون، دنباله $(\varphi_k(x))_k$ مشمول در مجموعه فشرده K را در نظر بگیرید. به دلیل فشرده بودن، زیردنباله $(\varphi_{t_k}(x))_k$ با $t_k \nearrow +\infty$ وجود دارد که همگرا به یک نقطه از K است. این نشان می دهد که $\omega(x)$ ناتهی است.

حال نشان می دهیم $\omega(x)$ همبند است. در غیر این صورت، با توجه به تعریف ۱۰.۶، برای مجموعه های ناتهی A و B که $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ داریم $\omega(x) = A \cup B$. از آنجایی که $\omega(x)$ بسته است، نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A} \cap \omega(x) = \bar{A} \cap (A \cup B) \\ &= (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A, \end{aligned}$$

و به طور مشابه، $\bar{B} = B$. این نشان می دهد که مجموعه های A و B بسته و در نتیجه دارای فاصله مثبت هستند. به عبارت دیگر،

$$\delta := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0.$$

حال مجموعه

$$C = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \inf_{y \in \omega(x)} \|z - y\| \geq \frac{\delta}{4} \right\},$$

را در نظر بگیرید. به راحتی می توان بررسی کرد که $C \cap K$ فشرده و ناتهی است. بنابراین، از خاصیت دوم در قضیه نتیجه می شود $C \cap K \cap \omega(x) \neq \emptyset$. اما از تعریف مجموعه C می دانیم که $C \cap K$ با $\omega(x)$ اشتراک ندارد. این تناقض نشان می دهد که $\omega(x)$ همبند است.

برای بررسی ویژگی سوم قضیه، یادآوری می‌کنیم که به دلیل خاصیت دوم، اگر $y \in \omega(x)$ ، آنگاه دنباله $t_k \nearrow +\infty$ وجود دارد به گونه‌ای که $\varphi_{t_k} \rightarrow y$ وقتی $k \rightarrow \infty$. طبق قضیه ۴۰.۱، تابع $\varphi_t(y) \mapsto y$ برای هر t ثابت، پیوسته است. بنابراین، برای $t > 0$ ، هنگامی که $k \rightarrow \infty$ داریم

$$\varphi_{t_k+t}(y) = \varphi_t(\varphi_{t_k}(y)) \rightarrow \varphi_t(y).$$

از آنجایی که $t_k + t \nearrow +\infty$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$ ، از خاصیت دوم نتیجه می‌شود که $\varphi_{t_k}(y) \in \omega(x)$. در نهایت، آخرین خاصیت قضیه را اثبات می‌کنیم. اگر این خاصیت برقرار نباشد، دنباله $t_k \nearrow +\infty$ و یک ثابت $\delta > 0$ وجود خواهد داشت به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ،

$$\inf_{y \in \omega(x)} \|\varphi_{t_k}(x) - y\| \geq \delta. \quad (5.7)$$

از آنجا که K فشرده است، زیردنباله همگرای $(\varphi_{t'_k}(x))_k$ از $K \subset (\varphi_{t_k}(x))_k$ موجود است به گونه‌ای که با توجه به خاصیت دوم قضیه دارای حد $p \in \omega(x)$ است. از طرف دیگر، از (5.7) نتیجه می‌شود که برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $y \in \omega(x)$

$$\|\varphi_{t'_k}(x) - y\| \geq \delta.$$

بنابراین برای هر $y \in \omega(x)$ داریم $\|p - y\| \geq \delta$ که نتیجه می‌دهد $p \notin \omega(x)$. این تناقض نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد. \square

نتیجه مشابهی برای مجموعه α -حدی وجود دارد.

قضیه ۹.۷. اگر نیم‌مدار مثبت $\gamma^-(x)$ از نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ کراندار باشد، آنگاه

(الف) $\alpha(x)$ فشرده، همبند و ناتهی است؛

(ب) $y \in \alpha(x)$ اگر و تنها اگر یک دنباله $t_k \searrow -\infty$ موجود باشد به گونه‌ای که وقتی $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه

$$\varphi_{t_k}(x) \rightarrow y$$

(ج) برای هر $y \in \alpha(x)$ و هر $t < 0$ ، $\varphi_t(y) \in \alpha(x)$ ؛

(د) $\inf\{\|\varphi_t(x) - y\| : y \in \alpha\} \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow -\infty$.

برهان. همانند برهان قضیه ۴.۵، فرض کنید تابع $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ به صورت $g(x) = -f(x)$ تعریف شود. یادآوری می‌کنیم که اگر $\varphi_t(x_0)$ جواب معادله $x' = f(x)$ با شرط $x(0) = x_0$ برای t در بازهٔ ماکسیمال $I_{x_0} = (a, b)$ باشد، آنگاه $\psi_t(x_0) = \varphi_{-t}(x_0)$ جواب معادله $x' = g(x)$ با شرط $x(0) = x_0$ برای $t \in (-b, -a)$ است. این نتیجه می‌دهد که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma_g(x) = \gamma_f(x), \quad \gamma_g^+(x) = \gamma_f^-(x), \quad (۶.۷)$$

و بنابراین

$$\alpha_f(x) = \bigcap_{y \in \gamma_f(x)} \overline{\gamma_f^-(y)} = \bigcap_{y \in \gamma_g(x)} \overline{\gamma_g^+(y)} = \omega_g(x). \quad (۷.۷)$$

اکنون، فرض کنید که نیم‌مدار منفی $\gamma_f^-(x)$ کراندار باشد. از آنجایی که $\gamma_g^+(x) = \gamma_f^-(x)$ ، از قضیه ۸.۷ داریم

(الف) $\omega_g(x)$ فشرده، همبند و ناتهی است؛

(ب) اگر $y \in \omega_g(x)$ و تنها اگر دنباله $t_k \nearrow +\infty$ موجود باشد به گونه‌ای که وقتی $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه

$$\psi_{t_k}(x) \rightarrow y$$

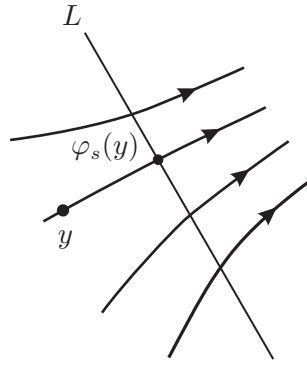
(ج) برای هر $y \in \omega_g(x)$ و هر $t > 0$ ، $\varphi_t(y) \in \omega_g(x)$ ؛

(د) $\inf\{\|\psi_t(x) - y\| : y \in \omega_g(x)\} \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow +\infty$.

از آنجایی که $\psi_t = \varphi_{-t}$ ، قضیه به‌سادگی از (۷.۷) و این چهار ویژگی حاصل می‌شود. \square

۲.۷ قضیهٔ پوانکاره-بندیکسون

اکنون به فضای \mathbb{R}^2 برمی‌گردیم و یکی از نتایج مهم کیفی نظریهٔ معادلات دیفرانسیل یعنی قضیهٔ پوانکاره-بندیکسون را ثابت می‌کنیم.



شکل ۳.۷: مدارها در همسایگی یک قاطع.

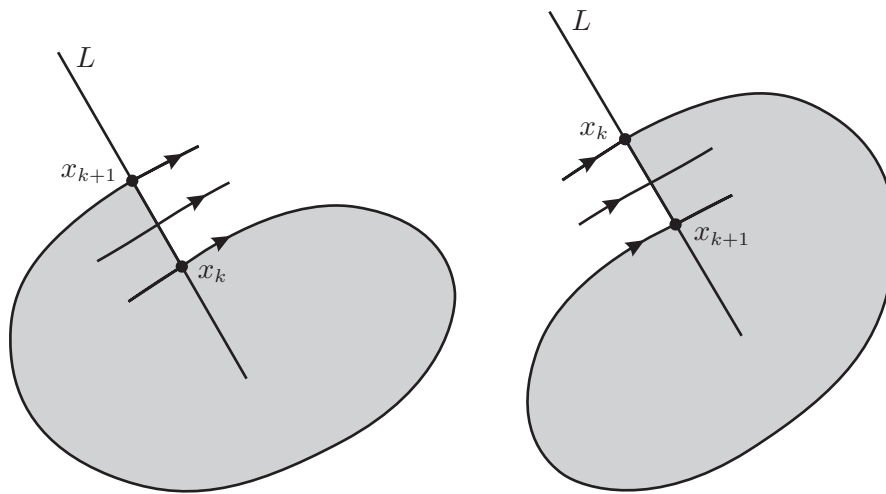
۱.۲.۷. اشتراک با خطوط قاطع. ابتدا یک نتیجه کمکی بیان می‌کنیم. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. همچنین فرض کنید L یک قطعه خط قاطع بر f باشد. این بدان معنی است که برای هر $x \in L$ جهت‌های L و $f(x)$ را تولید می‌کنند (شکل ۳.۷ را ببینید). در این صورت، می‌گوییم که L یک خط قاطع بر f است.

قضیه ۱.۰.۷. برای $x \in \mathbb{R}^2$ ، اشتراک $\omega(x) \cap L$ شامل حداکثر یک نقطه است.

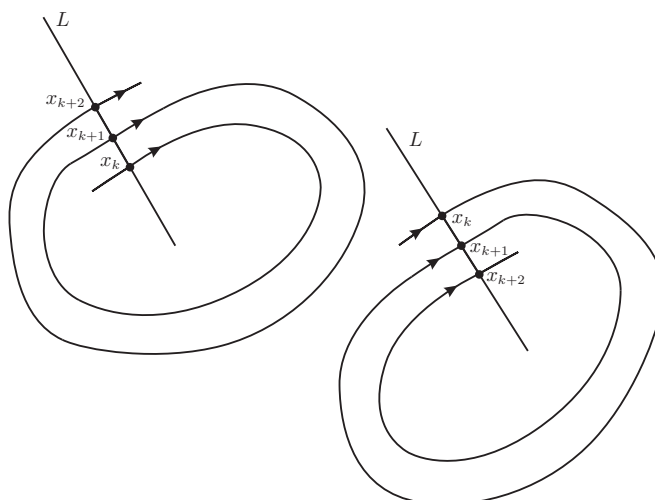
برهان. فرض کنید $\omega(x) \cap L$ ناتهی باشد. $q \in \omega(x) \cap L$ را انتخاب کنید. طبق قضیه ۸.۷، دنباله $t_k \nearrow +\infty$ موجود است به گونه‌ای که وقتی $k \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow q$. از سوی دیگر، از آنجایی که L قاطع بر f است، از قضیه جعبه شار (قضیه ۵۴.۱) نتیجه می‌شود که برای هر $y \in \mathbb{R}^2$ به اندازه کافی نزدیک به L یک زمان یکتای s هست به گونه‌ای که $\varphi_s(y) \in L$ و برای $t \in (0, s)$ که $s > 0$ ، یا برای $t \in (s, 0)$ که $s < 0$ داریم $\varphi_s(y) \notin L$ (شکل ۳.۷ را ببینید)؛ به ویژه، برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، همانند بالا $s = s_k$ موجود است به گونه‌ای که

$$x_k = \varphi_{t_k + s_k}(x) \in L$$

حال دو حالت را در نظر می‌گیریم: یا $(x_k)_k$ دنباله‌ای ثابت است که در این صورت، مدار x تناوبی است، یا $(x_k)_k$ دنباله ثابت نیست. در حالت نخست، از آنجایی که مدار x تناوبی است، مجموعه ω - حدی $\omega(x) =$

شکل ۴.۷: نقاط برخورد با قاطع L .

L را فقط در مقدار ثابت دنباله $(x_k)_k$ و بنابراین در $\omega(x) \cap L = \{q\}$ قطع می‌کند. در حالت دوم، دو نقطه متوالی در اشتراک مانند x_k و x_{k+1} را در نظر می‌گیریم که می‌توانند به دو شکل در L همانند شکل ۴.۷ قرار بگیرند. توجه کنید که در طول L میدان برداری f همیشه به‌سوی همان جهت است (به‌عبارت‌دیگر، تصویر f روی عمود L همیشه در همان جهت است). در غیر این صورت، از آنجایی که f پیوسته است دست‌کم یک نقطه $z \in L$ با $f(z)$ برابر با صفر یا با جهت L موجود است ولی در این صورت، L نمی‌تواند قاطع باشد. همچنین توجه می‌کنیم که قطعه مدار بین x_k و x_{k+1} همراه با پاره‌خط بین این دو نقطه، منحنی پیوسته C را تشکیل می‌دهند که مکمل آن یعنی $\mathbb{R}^2 \setminus C$ طبق نتیجه قضیه منحنی جردن (قضیه ۱۲.۶)، دو مؤلفه همبند دارد. مؤلفه همبند کراندار در شکل ۴.۷ به رنگ خاکستری مشخص شده است. با توجه به جهت f در قطعه بین x_k و x_{k+1} (به شکل ۴.۷ مراجعه کنید)، نیم‌مدار مثبت $\gamma^+(x_k)$ در مؤلفه همبند غیرکراندار قرار دارد. این بدان معناست که نقطه مشترک بعدی یعنی x_{k+2} ، به پاره‌خط بین x_k و x_{k+1} تعلق ندارد. بنابراین، نقاط x_k, x_{k+1}, x_{k+2} بر روی خط قاطع L به‌صورتی که در شکل ۵.۷ نشان داده شده است مرتب شده‌اند. به‌دلیل یکنوایی دنباله $(x_k)_k$ در امتداد L ، حداکثر یک نقطه تجمعی در L دارد و بنابراین $\omega(x) \cap L = \{q\}$. \square



شکل ۵.۷: نقاط برخورد x_k, x_{k+1}, x_{k+2} با قاطع L .

۲.۲.۷. قضیه پوانکاره-بندیکسون.^۱ نتیجه اصلی این فصل به شرح زیر است.

قضیه ۱۱.۷. (پوانکاره-بندیکسون). فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. برای معادله (۱.۷)، اگر نیم مدار مثبت $\gamma^+(x_k)$ از نقطه x کراندار بوده و $\omega(x)$ هیچ نقطه بحرانی نداشته باشد، آنگاه $\omega(x)$ یک مدار تناوبی است.

برهان. از آنجایی که نیم مدار $\gamma^+(x_k)$ کراندار است، از گزاره ۸.۷ نتیجه می شود که $\omega(x)$ تهی نیست. نقطه $p \in \omega(x)$ را در نظر بگیرید. از خاصیت های اول و سوم در گزاره ۸.۷، همراه با تعریف مجموعه ω -حدی، نتیجه می شود که $\omega(p)$ ناتهی بوده و $\omega(p) \subset \omega(x)$ است. یک نقطه مانند $q \in \omega(x)$ را در نظر بگیرید. طبق فرض، q یک نقطه بحرانی نیست، و بنابراین، یک پاره خط L شامل q که قاطع بر f است وجود دارد. از آنجایی که $q \in \omega(p)$ ، با خاصیت دوم در گزاره ۸.۷، یک دنباله $t_k \nearrow +\infty$ وجود دارد به گونه ای که $q \rightarrow \varphi_{t_k}(p)$ زمانی که $k \rightarrow \infty$. با روندی مشابه با قضیه ۱۰.۷، همیشه می توان فرض کرد که برای $k \in \mathbb{N}$ ، $\varphi_{t_k}(p) \in L$ از طرف

^۱Poincaré-Bendixon theorem

دیگر، از آنجایی که $p \in \omega(x)$ ، از خاصیت سوم قضیه ۸.۷ نتیجه می‌شود که برای $k \in \mathbb{N}$ ، $\varphi_{t_k}(p) \in \omega(x)$.
از آنجایی که $\varphi_{t_k}(p) \in \omega(x) \cap L$ ، طبق قضیه ۱۰.۷ داریم

$$\varphi_{t_k}(p) = q, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

این بدان معناست که $\gamma(p)$ یک مدار تناوبی است. به‌ویژه، $\gamma(p) \subset \omega(x)$.
اکنون باید نشان دهیم $\omega(x) = \gamma(x)$. اگر $\omega(x) \setminus \gamma(p) \neq \emptyset$ ، آنگاه از آنجایی که $\omega(x)$ همبند است، در هر همسایگی $\gamma(p)$ از $\omega(x)$ وجود دارند که در $\gamma(p)$ نیستند. توجه کنید که هر همسایگی از $\gamma(p)$ که به اندازه کافی کوچک باشد، هیچ نقطه بحرانی ندارد. بنابراین، یک قاطع L' بر f حاوی یکی از این نقاط است که در $\omega(x)$ و یک نقطه از $\gamma(p)$ قرار دارد. یعنی، $\omega(x) \cap L'$ حاوی حداقل دو نقطه است، زیرا $\gamma(p) \subset \omega(x)$ ؛ اما این با قضیه ۱۰.۷ در تناقض است. بنابراین، $\gamma(p) = \omega(x)$ و مجموعه ω - حدی x یک مدار تناوبی است. \square

می‌توان نتیجه‌ای مشابه با قضیه ۱۱.۷ برای نیمه مدارهای منفی کراندار به دست آورد.

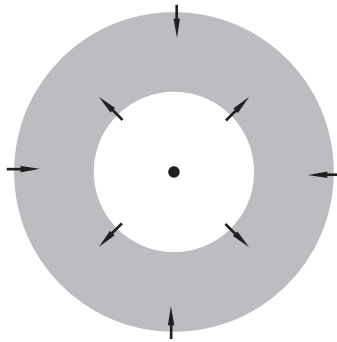
قضیه ۱۲.۷. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. برای معادله (۱.۷)، اگر نیم‌مدار منفی $\gamma^-(x)$ از نقطه x کراندار بوده و $\alpha(x)$ هیچ نقطه بحرانی نداشته باشد، آنگاه $\alpha(x)$ یک مدار تناوبی است.

برهان. همانند اثبات قضیه ۹.۷، تابع $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با تعریف $g(x) = -f(x)$ و معادله $x' = g(x)$ در نظر بگیرید. از روابط (۶.۷) و (۷.۷) داریم

$$\gamma_f^-(x) = \gamma_g^+(x), \quad \alpha_f(x) = \omega_g(x),$$

اکنون اثبات، نتیجه فوری قضیه ۱۱.۷ است. \square

مثال ۱۳.۷. (ادامه مثال ۶.۷). می‌دانیم که معادله (۳.۷) دارای یک مدار تناوبی، یعنی دایره‌ای با شعاع ۱ با مرکز مبدأ است (شکل ۱.۷ را ببینید). اکنون وجود یک مدار تناوبی را به‌عنوان کاربرد قضیه پوانکاره - بندیکسون ثابت

شکل ۶.۷: رفتار در مرز D .

می‌کنیم. حلقه

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < \|x\| < 2 \right\},$$

را در نظر بگیرید. برای $r = 1/2$ داریم $r' = 1/4 > 0$ و برای $r = 2$ داریم $r' = 2 < 0$. این بدان معناست که هر مداری که وارد D شود دیگر (برای زمان‌های مثبت) از D خارج نمی‌شود. این با رفتار کیفی نشان داده شده در شکل ۶.۷ مطابقت دارد. به‌طور خاص، هر نیم‌مدار مثبت $\gamma^+(x)$ از نقطه $x \in D$ مضمول در D است و در نتیجه کراندار است. علاوه بر این، از (۳.۷) نتیجه می‌شود که مبدأ تنها نقطه بحرانی است. با قضیه پوانکاره- بندیکسون (قضیه ۱۱.۷)، نتیجه می‌گیریم که $\omega(x)$ یک مدار تناوبی برای هر $x \in D$ است.

مثال ۱۴.۷. معادله

$$\begin{cases} x' = x(x^2 + y^2 - 3x - 1) - y, \\ y' = y(x^2 + y^2 - 3x - 1) + x, \end{cases} \quad (۸.۷)$$

را در نظر بگیرید که در دستگاه مختصات قطبی به شکل

$$\begin{cases} r' = r(r^2 - 3r \cos \theta - 1), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

است. برای هر r به اندازه کافی کوچک داریم

$$r^2 - 3r \cos \theta - 1 < 0,$$

و در نتیجه $r' < 0$. علاوه بر آن، برای هر r به اندازه کافی بزرگ داریم

$$r^2 - 3r \cos \theta - 1 > 0,$$

و بنابراین $r' > 0$. از سوی دیگر، مبدأ، تنها نقطه بحرانی است. اکنون از یک استدلال مشابه در مثال ۱۳.۷ استفاده می‌کنیم. یعنی، برای $r_1 > 0$ به اندازه کافی کوچک و $r_2 > 0$ به اندازه کافی بزرگ، هیچ نقطه بحرانی در حلقه

$$D' = \{x \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|x\| < r_2\},$$

وجود ندارد. علاوه بر این، هر نیم‌مدار منفی $\gamma^-(x)$ نقطه $x \in D'$ مشمول در D' است و از این رو، کراندار است. از قضیه ۱۲.۷ برمی‌آید که $\alpha(x) \subset D'$ یک مدار تناوبی برای هر $x' \in D$ است. به ویژه، معادله (۸.۷) دارای حداقل یک مدار تناوبی در D' دارد.

اکنون نتیجه‌ای را فرمول‌بندی می‌کنیم که قضیه پوانکاره-بندیکسون را به حالتی تعمیم می‌دهد که $\omega(x)$ حاوی نقاط بحرانی باشد.

قضیه ۱۵.۷. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. برای معادله (۱.۷)، اگر نیم‌مدار مثبت $\gamma^+(x)$ نقطه x مشمول در مجموعه فشرده‌ای باشد که در آن حداکثر به تعداد متناهی نقطه بحرانی وجود دارد، آنگاه یکی از گزینه‌های زیر صادق است

(الف) $\omega(x)$ یک نقطه بحرانی است؛

(ب) $\omega(x)$ یک مدار تناوبی است؛

(ج) $\omega(x)$ اجتماعی از تعداد متناهی نقاط بحرانی و مدارهای هموکلینیک یا هتروکلینیک است.

برهان. از آنجایی که $\omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ ، نتیجه می‌گیریم مجموعه $\omega(x)$ دارای حداکثر تعداد متناهی نقاط بحرانی است. اگر این مجموعه فقط حاوی نقاط بحرانی باشد، آنگاه از آنجایی که طبق قضیه ۸.۷، مجموعه همبند است، نتیجه می‌شود لزوماً یک نقطه بحرانی منفرد است.

حال فرض می‌کنیم که $\omega(x)$ حاوی نقاط غیربحرانی است و دارای دست‌کم یک مدار تناوبی $\gamma(p)$ است. نشان می‌دهیم که $\omega(x)$ مدار تناوبی است. در غیراین‌صورت، از آنجایی که $\omega(x)$ همبند است، یک دنباله $(x_k)_k \subset \omega(x) \setminus \gamma(p)$ و یک نقطه $x_0 \in \gamma(p)$ وجود خواهد داشت به‌گونه‌ای که $x_k \rightarrow x_0$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$. اکنون یک قاطع L به میدان برداری f در نظر می‌گیریم به‌گونه‌ای که $x_0 \in L$. از گزاره ۱۰.۷ نتیجه می‌شود که $\omega(x) \subset L = \{x_0\}$. از سوی دیگر، همانند اثبات قضیه ۱۰.۷، نتیجه می‌شود که $\omega(x) \subset \gamma^+(x_k)$ برای k به اندازه کافی بزرگ $(x_k)_k$ را قطع می‌کند. از آنجایی که $\omega(x) \cap L = \{x_0\}$ ، برای k به اندازه کافی بزرگ داریم $x_k \in \gamma(x_0) = \gamma(p)$ که با انتخاب دنباله $(x_k)_k$ در تناقض است. در نتیجه $\omega(x)$ یک مدار تناوبی است.

سرانجام، فرض می‌کنیم $\omega(x)$ شامل نقاط غیربحرانی بوده ولی شامل هیچ مدار تناوبی نباشد. نشان می‌دهیم برای هر نقطه غیربحرانی $p \in \omega(x)$ ، مجموعه‌های $\omega(p)$ و $\alpha(p)$ نقاط بحرانی هستند. ما فقط $\omega(p)$ را در نظر می‌گیریم چون بحث مربوط به $\alpha(p)$ مشابه است. فرض کنید $p \in \omega(x)$ یک نقطه غیربحرانی باشد. توجه کنید که $\omega(p) \subset \omega(x)$. اگر $q \in \omega(p)$ یک نقطه بحرانی نباشد و قاطع L بر f شامل q باشد، آنگاه طبق قضیه ۱۰.۷،

$$\omega(x) \cap L = \omega(p) \cap L = \{q\};$$

به‌ویژه، مدار $\gamma^+(p)$ ، L را در نقطه‌ای مانند x_0 قطع می‌کند. از آنجایی که $\gamma^+(p) \subset \omega(x)$ ، نتیجه می‌گیریم $x_0 = q$ و بنابراین، $\gamma^+(p)$ و $\omega(p)$ هر دو شامل نقطه q هستند. دوباره، مانند روند اثبات قضیه ۱۰.۷، نتیجه می‌گیریم که $\omega(p) = \gamma(p)$ یک مدار تناوبی است. این تناقض نشان می‌دهد که $\omega(p)$ فقط شامل نقاط بحرانی است و از آنجایی که همبند است حاوی فقط یک نقطه بحرانی است. \square

یادآوری می‌کنیم که طبق قضیه ۸.۷ مجموعه $\omega(x)$ همبند می‌شود. تحت مفروضات قضیه ۱۰.۷، برای مثال، این اجازه نمی‌دهد که $\omega(x)$ یک اجتماع (متاهی) از نقاط بحرانی باشد.

همچنین می‌توان یک نتیجه متناظر را برای نیم‌مدارهای منفی فرمول‌بندی کرد.

تمرین‌ها

تمرین ۱.۷. ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید.

(الف) برای معادله $x' = Ax$ نشان دهید که برای هر $x \in \mathbb{R}^5$ داریم $\alpha(x) = \{0\}$.

(ب) برای معادله $x' = Bx$ نشان دهید که یک جواب x کراندار است اگر و تنها اگر $x(0) \in \{0\}^3 \times \mathbb{R}^2$.

تمرین ۲.۷. با رسم تصویر فاز، بررسی کنید که معادلاتی در صفحه با دست‌کم یک مجموعه ناهمبند ω -حدی موجود است.

تمرین ۳.۷. معادله

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = y^2 - x^2 - 1, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که خط راست $x = 0$ اجتماعی از مدارهاست.

(ب) بررسی کنید که آیا خطوط راست دیگری با ویژگی مشابه از مبدأ می‌گذرند یا خیر.

تمرین ۴.۷. برای هر $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، معادله

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \theta' = \sin^2 \theta + \epsilon, \end{cases}$$

را در مختصات قطبی در نظر بگیرید.

(الف) برای هر $\epsilon \in \mathbb{R}$ تصویر حالت را رسم کنید.

(ب) همه مقادیری از ϵ را که برای آنها معادله پایستار است، بیابید.

(ج) برای $\epsilon = 1$ دوره تناوب هر مدار تناوبی را پیدا کنید.

(د) بررسی کنید که آیا کوچکترین مجموعه ناوردا حاوی گوی باز با شعاع $1/2$ و مرکز $(0, 1)$ در حالت $\epsilon = 0$ ، یک مجموعه باز است یا نه.

تمرین ۵.۷. معادله

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = x^2 + y^2, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که یک خط مستقیم ناوردا حاوی $(0, 0)$ وجود دارد.

(ب) نشان دهید که هیچ مدار تناوبی وجود ندارد.

(ج) تصویر فاز را ترسیم کنید.

تمرین ۶.۷. برای تابع $B(x, y) = xy(1 - x - y)$ معادله

$$x' = \frac{\partial B(x, y)}{\partial y}, \quad y' = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x},$$

را در نظر بگیرید.

(الف) تمام نقاط بحرانی را بیابید و بررسی کنید که خطوط مستقیم $x = 0$ و $y = 0$ ناوردا هستند.

(ب) نشان دهید که خط مستقیم $x + y = 1$ ناوردا است.

(ج) یک مجموعه فشرده ناوردا با نامتناهی نقطه بیابید.

(د) تصویر فاز را ترسیم کنید.

تمرین ۷.۷. برای تابع داده شده $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^2 ، معادله $x' = \nabla f(x)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که هر مجموعه ω -حدی ناتهی یک نقطه بحرانی است.

تمرین ۸.۷. بررسی کنید که آیا یک معادله خودگردان در \mathbb{R}^3 با یک مدار تناوبی اما بدون نقاط بحرانی وجود دارد.

جوابها .

۳.۷ (ب) خیر. وجود ندارد.

۴.۷ (ب) معادله برای هیچ مقداری از ϵ پایستار نیست.

(ج) تنها مدار تناوبی، دایره‌ای با شعاع ۱ است که مرکز آن مبدأ و دوره تناوب آن

$$\int_0^{2\pi} 1/(\sin^2 \theta + 1) d\theta = \sqrt{2}\pi$$

است.

(د) باز است.

۶.۷ (الف) $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ و $(1/3, 1/3)$.

(ج) مثلث با رئوس $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 0)$.

بخش چهارم
موضوعات بیشتر

فصل ۸

انشعاب و خمینه‌های مرکزی

این فصل به معرفی مختصری از نظریه انشعاب می‌پردازد. ما با شرح چند نمونه از انشعاب‌ها شروع می‌کنیم. به‌طور خاص، انشعاب هاف را در نظر می‌گیریم، که مربوط به ظاهر (یا ناپدید) شدن یک مدار تناوبی است. سپس مقدمه‌ای بر نظریه خمینه‌های مرکزی ارائه می‌کنیم، که اغلب اجازه می‌دهد تا درجه یک معادله را در مطالعه وجود انشعاب‌ها کاهش دهیم. خمینه‌های مرکزی در مطالعه پایداری یک نقطه بحرانی با تبدیل مسئله به مطالعه پایداری روی خمینه مرکزی مفید هستند. در نهایت، مقدمه‌ای بر نظریه صورت‌های نرمال ارائه می‌دهیم، که هدف آن حذف همه جملات ممکن در معادله اصلی از طریق تغییر متغیر مناسب است. برای موضوعات بیشتر، خواننده را به [۸، ۱۲، ۱۴] ارجاع می‌دهیم.

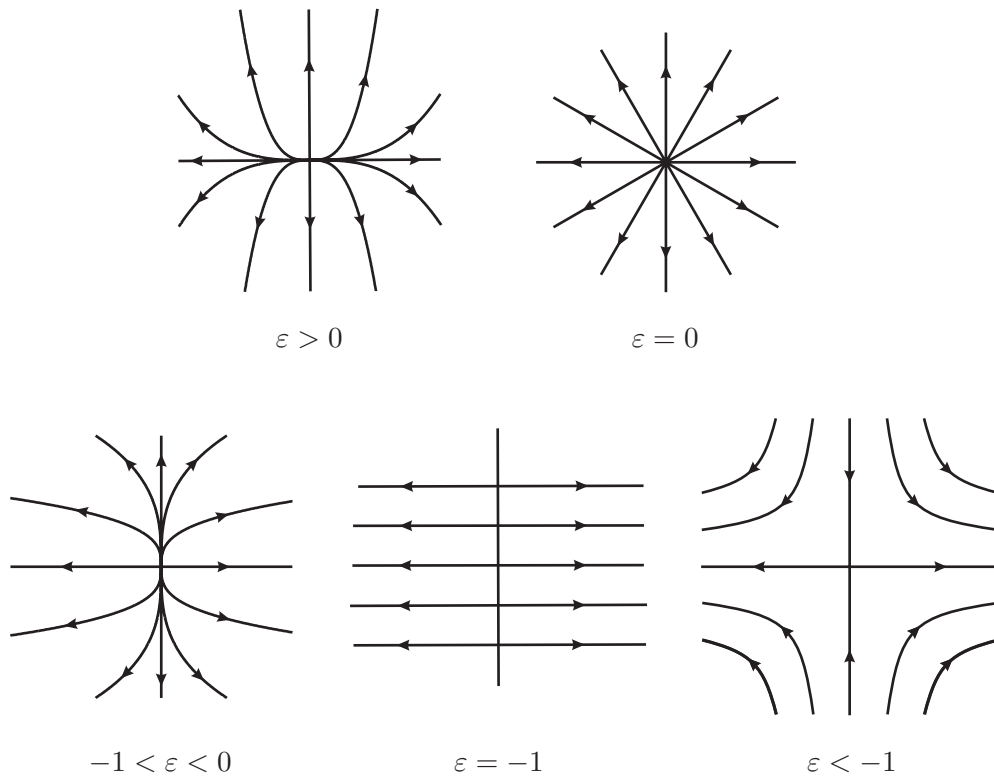
۱.۸ معرفی نظریه انشعاب

با مثالی شروع می‌کنیم که نوع مسائل در نظر گرفته شده در نظریه انشعاب را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = (1 + \epsilon)y, \end{cases} \quad (1.8)$$

را با $\epsilon \in \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. تصویر فاز برای هر مقدار ϵ در شکل ۱.۸ نشان داده شده است.



شکل ۱.۸: تصویر فاز معادله (۱.۸) برای هر $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$.

علاقه‌مندیم که بدانیم برای کدامیک از مقادیر $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ ، یک همسایگی کوچک دلخواه ϵ_0 وجود دارد به طوری که جواب‌های معادله (۱.۸) برای ϵ_0 و ϵ به طور دیفرانسیل پذیر مزدوج نباشند (به تعریف ۴۴.۲ مراجعه کنید). از تصاویر فاز در شکل ۱.۸، واضح است که این برای $\epsilon = 0$ و $\epsilon = -1$ اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، از قضیه‌های ۴۵.۲ و ۴۷.۲ نتیجه می‌شود که برای همه مقادیر باقی‌مانده ϵ همین اتفاق می‌افتد، زیرا ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon \end{pmatrix},$$

از معادله خطی (۱.۸) مقادیر ویژه متفاوتی برای مقادیر مختلف ϵ دارد. از این رو، جواب‌های معادله (۱.۸) برای

هر دو مقدار متفاوت ϵ به‌طور دیرانسیل‌پذیر مزدوج نیستند. این نشان می‌دهد که تزویج‌های دیرانسیل‌پذیر تا حدودی صلب هستند، زیرا تصاویر فازی را که به‌وضوح رفتار کیفی یکسانی دارند (مانند تصاویر سه فاز اول در شکل ۱.۸) متمایز می‌کنند.

اکنون مسئله مشابهی را برای مفهوم تزویج توپولوژیکی در نظر می‌گیریم. به‌عبارت‌دیگر، می‌خواهیم بدانیم برای کدام‌یک از مقادیر $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ ، یک همسایگی کوچک دلخواه ϵ وجود دارد به‌طوری‌که جواب‌های معادله (۱.۸) برای ϵ_0 و ϵ از نظر توپولوژیکی مزدوج نیستند (به تعریف ۴۴.۲ مراجعه کنید). در این مورد، به‌آسانی از قضیه ۵۰.۲ نتیجه می‌گیریم که این فقط برای $\epsilon = -1$ رخ می‌دهد. سپس می‌گوییم که یک انشعاب در معادله (۱.۸) در $\epsilon = -1$ رخ می‌دهد.

اکنون مفهوم انشعاب را فرمول‌بندی می‌کنیم و همچنین اجازه می‌دهیم تزویج توپولوژیکی در حد یک تغییر زمانی در طول هر مدار تغییر کند. یک تابع $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 و معادله

$$x' = f(x, \epsilon), \quad (2.8)$$

را برای هر مقدار پارامتر $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ در نظر بگیرید.

تعریف ۲.۸. می‌گوییم که در رابطه (۲.۸) در $\epsilon = \epsilon_0$ انشعاب رخ نمی‌دهد اگر برای هر $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^k$ به‌طور دلخواه نزدیک، یک همسانریخت $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و یک تابع پیوسته $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ با $\tau(t, x) \mapsto t$ که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ صعودی است وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_{\tau(t, x)}(h(x)), \quad (3.8)$$

که در آن $\varphi_t(z)$ و $\psi_t(z)$ به‌ترتیب، جواب‌های مسائل مقدار اولیه

$$\begin{cases} x' = f(x, \epsilon_0), \\ x(0) = z, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f(x, \epsilon_1), \\ x(0) = z, \end{cases} \quad (4.8)$$

هستند.

به عبارت دیگر، یک انشعاب در $\epsilon = \epsilon_0$ اتفاق می افتد اگر برای هر همسایگی به دلخواه کوچک از ϵ_0 ، مقدار ϵ_1 وجود داشته باشد به طوری که جواب معادلات

$$x' = f(x, \epsilon_0), \quad x' = f(x, \epsilon_1),$$

با یک همسانریخت حافظ جهت قابل تبدیل به یکدیگر نباشند.

مثال ۳.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = (1 + \epsilon^2)y, \\ y' = -(1 + \epsilon^2)x, \end{cases} \quad (5.8)$$

را در نظر بگیرید. مبدأ یک نقطه بحرانی است و مدارهای باقیمانده، مدارهای تناوبی دایره‌ای هستند که به مرکز مبدأ و دوره تناوب $2\pi/(1 + \epsilon^2)$ قرار دارند. در واقع، معادله (۳.۸) را می توان به صورت مختصات قطبی

$$\begin{cases} r' = 0, \\ \theta' = -(1 + \epsilon^2), \end{cases}$$

نوشت. از آنجایی که

$$\varphi_t = \psi_{t(1+\epsilon_0^2)/(1+\epsilon_1^2)},$$

که φ_t و ψ_t در (۴.۸) تعریف شده اند، با قرار دادن

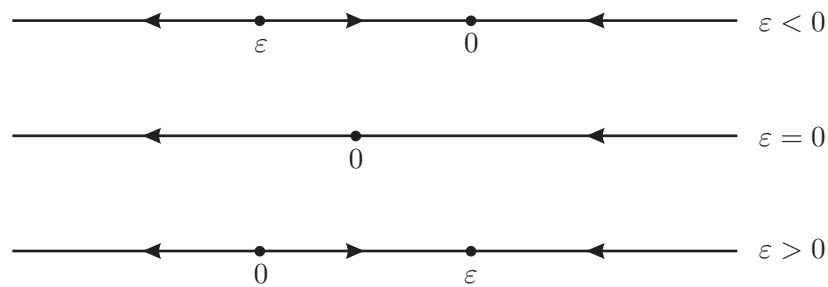
$$h(x) = x, \quad \tau(x) = t(1 + \epsilon_0^2)/(1 + \epsilon_1^2),$$

تساوی (۳.۸) حاصل می شود. این نشان می دهد که هیچ انشعابی در رابطه (۵.۸) رخ نمی دهد.

مثال ۴.۸. معادله

$$x' = \epsilon x - x^2, \quad (6.8)$$

را در نظر بگیرید. به وضوح، $x = 0$ و $x = \epsilon$ نقاط بحرانی هستند. تصویر فاز همان است که در شکل ۲.۸ نشان داده شده است. می توان به راحتی بررسی کرد که تنها انشعاب در $\epsilon = 0$ رخ می دهد. این انشعاب، انشعاب



شکل ۲.۸: تصویر فاز معادله (۶.۸).

فرا بحرانی نامیده می‌شود و مربوط به برخورد دو نقطه بحرانی، که یکی پایدار و دیگری ناپایدار است می‌شود که پایداری خود را پس از برخورد مبادله می‌کنند.

مثال ۵.۸. معادله

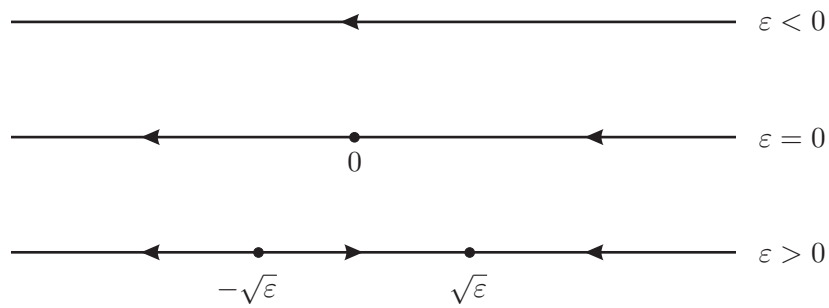
$$x' = \epsilon - x^2, \quad (7.8)$$

را در نظر بگیرید. تعداد نقاط بحرانی به علامت ϵ بستگی دارد. برای $\epsilon < 0$ هیچ نقطه بحرانی وجود ندارد، برای $\epsilon = 0$ تنها نقطه بحرانی، مبدأ است، و در نهایت، برای $\epsilon > 0$ دو نقطه بحرانی $-\sqrt{\epsilon}$ و $\sqrt{\epsilon}$ وجود دارد. تصویر فاز در شکل ۳.۸ نشان داده شده است. واضح است که تنها انشعاب در معادله (۷.۸) در $\epsilon = 0$ رخ می‌دهد. به آن انشعاب گره-زینی می‌گویند (مثال ۶.۸ را نیز ببینید) و مربوط به برخورد دو نقطه بحرانی، یکی پایدار و دیگری ناپایدار است که پس از برخورد از بین می‌روند.

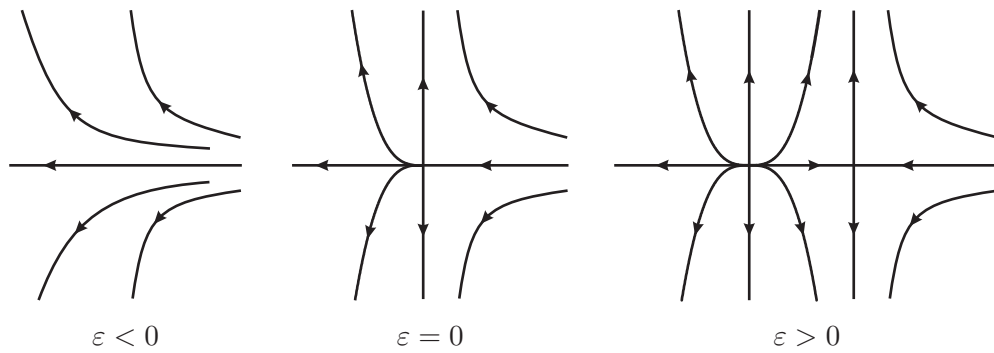
مثال ۶.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = \epsilon - x^2, \\ y' = y, \end{cases} \quad (8.8)$$

را در نظر بگیرید. توجه کنید که مولفه اول با معادله (۷.۸) منطبق است، و بنابراین، تصویر فاز معادله (۸.۸) همان چیزی است که در شکل ۴.۸ نشان داده شده است. دوباره، انشعاب فقط در $\epsilon = 0$ رخ می‌دهد. می‌توان



شکل ۳.۸: تصویر فاز معادله (۷.۸).



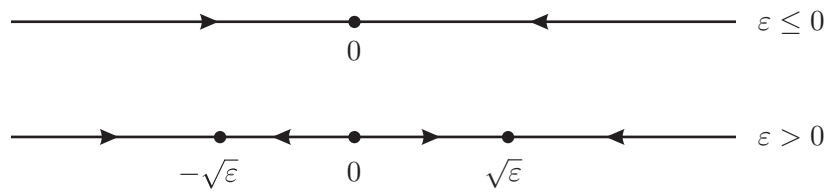
شکل ۴.۸: تصویر فاز معادله (۸.۸).

آن را به عنوان برخورد یک نقطه زینی و یک گره برای $\epsilon > 0$ توصیف کرد که برای $\epsilon < 0$ ناپدید می‌شوند. این، نام انشعاب را در مثال ۵.۸ توجیه می‌کند.

مثال ۷.۸. معادله

$$x' = \epsilon x - x^3, \quad (9.8)$$

را در نظر بگیرید. برای $\epsilon \leq 0$ مبدأ، تنها نقطه بحرانی است، در حالی که برای $\epsilon > 0$ دو نقطه بحرانی $-\sqrt{\epsilon}$ و $\sqrt{\epsilon}$ وجود دارد. تصویر فاز همان است که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که



شکل ۵.۸: تصویر فاز معادله (۹.۸).

انشعاب فقط در $\epsilon = 0$ رخ می‌دهد که انشعاب چنگال نام دارد و مربوط به ایجاد (یا نابودی) دو نقطه بحرانی است که یکی پایدار و دیگری ناپایدار است.

مثال ۸.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = \epsilon x - y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x + \epsilon y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (10.8)$$

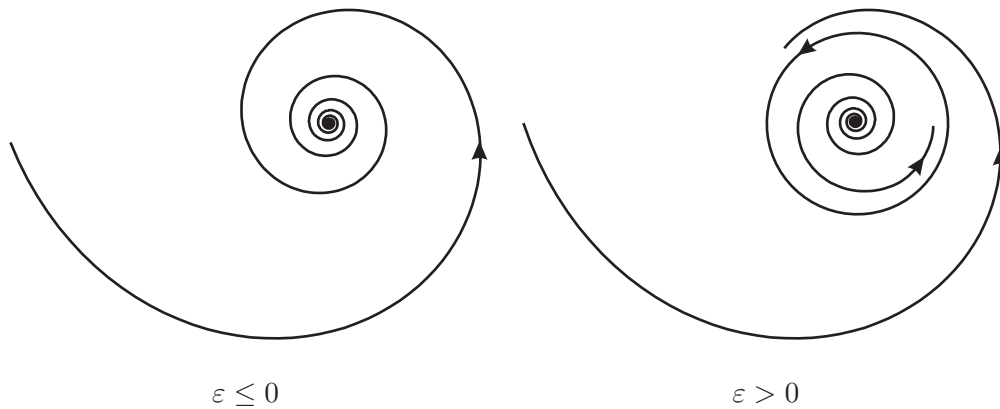
را در نظر بگیرید که در مختصات قطبی به صورت

$$\begin{cases} r' = \epsilon r - r^3, \\ \theta' = 1, \end{cases} \quad (11.8)$$

است. توجه می‌کنیم که اولین مؤلفه در (۱۱.۸) قبلاً در مثال ۷.۸ در نظر گرفته شده است (اگرچه، اکنون به دلیل $r \geq 0$ ، فقط به مقادیر غیرمنفی متغیر علاقه‌مند هستیم). تصویر فاز معادله (۱۰.۸)، یا معادله (۱۱.۸)، همان چیزی است که در شکل ۶.۸ نشان داده شده است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که تنها انشعاب معادله (۱۰.۸) در $\epsilon = 0$ رخ می‌دهد که انشعاب هاف نامیده می‌شود و مربوط به ایجاد (یا نابودی) یک مدار تناوبی است.

بسیاری از انشعاب‌های دیگر وجود دارند، اما مطالعه اصولی نظریه انشعاب خارج از محدوده کتاب قرار

می‌گیرد (برای بررسی‌های دقیق‌تر، خواننده را به [۸، ۱۲] ارجاع می‌دهیم).



شکل ۶.۸: تصویر فاز معادله (۱۰.۸).

۲.۸ خمینه‌های مرکزی و کاربردها

در این بخش، مقدمه‌ای کوتاه بر نظریه خمینه‌های مرکزی ارائه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌تواند در نظریه انشعاب کمک کند.

۱.۲.۸. مفاهیم پایه‌ای. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^1 بوده و x_0 یک نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ باشد. برخلاف بخش ۱.۴، در اینجا فرض نمی‌کنیم که x_0 یک نقطه بحرانی هذلولوی است و می‌نویسیم $A = d_{x_0}f$.

تعریف ۹.۸. فضاها پایدار، ناپایدار و مرکزی نقطه x_0 را به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} E^s &= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{At}x\| < 0\} \cup \{0\}, \\ E^u &= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \limsup_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{|t|} \log \|e^{At}x\| < 0\} \cup \{0\}, \\ E^c &= \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \log \|e^{At}x\| < 0\} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم.

به عبارت دیگر (به غیر از مبدأ)، E^s و E^u دارای شرایط اولیه برای رفتار نمایی جواب‌هایشان هستند، درحالی‌که E^c دارای شرایط اولیه‌ای است که جواب‌های آن رفتار نمایی ندارند. به راحتی می‌توان بررسی کرد که درحالی‌که

نقطه بحرانی هذلولوی باشد مجموعه‌های E^u و E^s در تعریف ۹.۸، با فضاهای پایدار و ناپایدار معرفی شده در تعریف ۲.۴ منطبق هستند.

قضیه ۱۰.۸. اگر x_0 یک نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ باشد، آنگاه

$$(الف) \quad E^s, E^u, E^c \text{ زیرفضاهای } \mathbb{R}^n \text{ هستند و } E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^n;$$

(ب) برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$e^{At}(E^s) \subset E^s, \quad e^{At}(E^u) \subset E^u, \quad e^{At}(E^c) \subset E^c.$$

برهان. می‌توان به روشی مشابه با اثبات گزاره ۳.۴ اقدام کرد. یعنی، شکل متعارف ماتریس جردن $A = d_{x_0}f$

را می‌توان با توجه به تجزیه $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ به شکل بلوکی

$$\begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix}.$$

نوشت. ماتریس‌های A_s, A_u, A_c به ترتیب متناظر با بلوک‌های جردن با مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی، مثبت و صفر هستند. \square

هنگامی که $E^c = \{0\}$ ، یعنی زمانی که نقطه بحرانی x_0 هذلولوی است، قضیه گروبن-هارتمن و قضیه هادامارد-پرون (قضیه‌های ۷.۴ و ۲.۵) با جزئیات کافی تصویر فاز معادله $x' = f(x)$ را در یک همسایگی x_0 توصیف می‌کنند. به ویژه جواب‌های معادلات $x' = f(x)$ و $y' = Ay$ به ترتیب در همسایگی‌های x_0 و 0 از نظر توپولوژیکی مزدوج هستند. علاوه بر این، خمینه‌های ناوردایی وجود دارد (با مفهوم شمول در رابطه (۶.۵)) که شامل x_0 بوده و به ترتیب مماس بر فضاهای پایدار و ناپایدار E^s و E^u هستند.

علاوه بر این، قضیه ۱۲.۴ نشان می‌دهد که هر اختلال به اندازه کافی کوچک C^1 از یک میدان برداری C^1 با یک نقطه بحرانی هذلولوی دارای یک تصویر فاز همسانریخت هستند. بنابراین، هیچ انشعابی در همسایگی یک نقطه بحرانی هذلولوی تحت اختلال‌های به اندازه کافی کوچک C^1 وجود ندارد. در نتیجه، انشعاب ممکن است تنها زمانی رخ دهد که $E^c \neq \{0\}$.

۲.۲.۸. خمینه‌های مرکزی. ما بحث در مورد حالت غیرهذلولوی (وقتی $E^c \neq \{0\}$) را با نتیجه‌ای مشابه با قضیه هادامارد-پرون (قضیه ۲.۵) شروع می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۸. (قضیه خمینه مرکزی). اگر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه بحرانی معادله $x' = f(x)$ برای تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^k با $k \in \mathbb{N}$ باشد، آنگاه خمینه‌های W^c ، W^u ، W^s و W^c از کلاس C^k مشمول x_0 موجودند به طوری که

$$(الف) \quad T_{x_0} W^c = E^c, T_{x_0} W^u = E^u, T_{x_0} W^s = E^s$$

(ب) جواب‌های معادله $x' = f(x)$ با شرط اولیه در W^c ، W^u ، W^s و W^c برای زمان به اندازه کافی کوچک در این خمینه‌ها باقی می‌ماند.

علاوه بر این، خمینه‌های W^u و W^s به طور یکتا توسط این ویژگی‌ها در هر همسایگی به اندازه کافی کوچک x_0 تعیین می‌شوند.

اثبات قضیه ۱۱.۸ خارج از محدوده کتاب است (برای جزئیات به [۶] مراجعه کنید). اگرچه، با جزئیات اثبات قضیه هادامارد-پرون (قضیه ۲.۵) مطابقت دارد. توجه کنید که قضیه ۱۱.۸، قضیه ۲.۵ را به عنوان یک مورد خاص در بر دارد (زمانی که x_0 یک نقطه بحرانی هذلولوی است).

تعریف ۱۲.۸. خمینه‌های W^c ، W^u ، W^s و W^c به ترتیب خمینه‌های پایدار، ناپایدار و مرکزی نامیده می‌شوند.

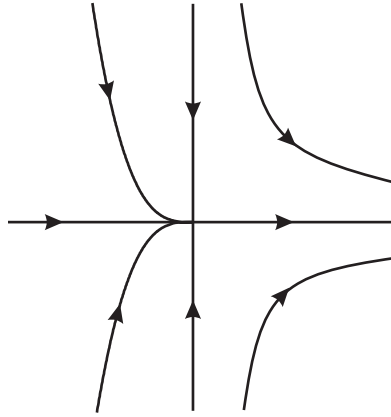
برخلاف آنچه در خمینه‌های پایدار و ناپایدار اتفاق می‌افتد، خمینه مرکزی W^c در قضیه ۱۱.۸ ممکن است یکتا نباشد.

مثال ۱۳.۸. معادله

$$(۱۲.۸) \quad \begin{cases} x' = x^2, \\ y' = -y, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. مبدأ یک نقطه بحرانی است و برای تابع $f(x, y) = (x^2, -y)$ داریم

$$d_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



شکل ۷.۸: تصویر فاز معادله (۱۲.۸).

بنابراین،

$$E^s = \{0\} \times \mathbb{R}, \quad E^u = \{0\}, \quad E^c = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

می‌توان به راحتی بررسی کرد که برای شرط اولیه $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ معادله (۱۲.۸) دارای جواب

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{x_0}{1 - tx_0}, e^{-t} y_0 \right),$$

است. با حذف t ، $y(x) = (y_0 e^{-1/x_0}) e^{1/x}$ به دست می‌آید که منجر به تصویر فاز در شکل ۷.۸ می‌شود.

از آنجایی که هر مدار در نیم صفحه $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ مماس بر محور افقی است، به تعداد بی‌نهایت خمینه‌های مرکزی

وجود دارد که توسط

$$W^c = \{(x, \eta_c(x)) : x \in \mathbb{R}\},$$

داده می‌شوند که برای ثابت دلخواه $c \in \mathbb{R}$ ،

$$\eta_c(x) = \begin{cases} ce^{1/x}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

می‌توان به راحتی بررسی کرد که هر خمینه W^c از کلاس C^∞ است (اما تحلیلی نیست).

۳.۲.۸. کاربردهای خمینه‌های مرکزی. ما در این بخش به‌طور خلاصه توضیح می‌دهیم که چگونه خمینه‌های مرکزی ارائه شده توسط قضیه ۱۱.۸ می‌توانند در مطالعه پایداری یک نقطه بحرانی (غیر هذلولوی) استفاده شوند. متغیرهای \bar{x} ، \bar{y} و \bar{z} که $W^s \times W^u \times W^c$ را در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از x_0 پارامتری می‌کنند در نظر بگیرید. می‌توان با تعمیم مناسب قضیه گروپمن-هارتمن همراه با قضیه ۵۰.۲ نشان داد که جواب‌های معادله $x' = f(x)$ از نظر توپولوژیکی با جواب‌های

$$\begin{cases} \bar{x}' = -\bar{x}, \\ \bar{y}' = \bar{y}, \\ \bar{z}' = F(\bar{z}), \end{cases} \quad (13.8)$$

برای یک تابع F (برای جزئیات [۶] را ببینید) مزدوج هستند. وقتی $E^u \neq \{0\}$ ، از (۱۳.۸) نتیجه می‌گیریم که نقطه بحرانی x_0 ناپایدار است. اکنون، فرض می‌کنیم که $E^u = \{0\}$. در این مورد، اگر $E^c = \{0\}$ ، آنگاه x_0 به‌طور مجانبی پایدار است. از سوی دیگر، اگر $E^u = \{0\}$ اما $E^c \neq \{0\}$ ، آنگاه پایداری x_0 با پایداری مبدأ در معادله

$$\bar{z}' = F(\bar{z}) \quad (14.8)$$

منطبق است (با فرض اینکه x_0 با $\bar{z} = 0$ نمایش داده شود). به‌طور خلاصه سه حالت داریم:

(الف) اگر $E^u \neq \{0\}$ ، آنگاه x_0 ناپایدار است؛

(ب) اگر $E^u = \{0\}$ و $E^c = \{0\}$ ، آنگاه x_0 به‌طور مجانبی پایدار است؛

(ج) اگر $E^u = \{0\}$ و $E^c \neq \{0\}$ ، آنگاه پایداری x_0 با پایداری مبدأ در معادله (۱۴.۸) منطبق است.

در حالت سوم، مطالعه رفتار در خمینه مرکزی کافی است.

مثال ۱۴.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = -x + y^2, \\ y' = y^2 - x^2, \end{cases} \quad (15.8)$$

را در نظر بگیرید. مبدأ یک نقطهٔ بحرانی است و برای تابع

$$f(x, y) = (-x + y^2, y^2 - x^2),$$

داریم

$$d_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین،

$$E^s = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad E^u = \{0\}, \quad E^c = \{0\} \times \mathbb{R},$$

و ما در حالت سوم هستیم. از آنجایی که f از کلاس C^∞ است، از قضیهٔ خمینهٔ مرکزی (قضیهٔ ۱۱.۸) نتیجه می‌شود که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، خمینه‌های W^s و W^c از کلاس C^k وجود دارند. علاوه بر آن، برای تابعی مانند $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^k که $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

$$W^c = \{(\varphi(y), y) : y \in (-\delta, \delta)\},$$

چون $0 \in W^c$ و $T_0W^c = E^c$. بنابراین، می‌توان سری تیلور را (تا درجه k) به صورت

$$\varphi(y) = ay^2 + by^3 + \dots, \quad (۱۶.۸)$$

نوشت. با جایگذاری $x = \varphi(y)$ در (۱۵.۸)،

$$x' = \varphi'(y)y' = \varphi'(y)(y^2 - \varphi(y)^2),$$

را یا به‌طور معادل، رابطهٔ

$$-\varphi(y) + y^2 = \varphi'(y)(y^2 - \varphi(y)^2),$$

را به دست می‌آوریم. با استفاده از (۱۶.۸)، تساوی

$$-ay^2 - by^3 - \dots + y^2 = (2ay + 3by^2 + \dots)(y^2 - a^4y^2 - \dots)$$

حاصل می‌شود. با جایگذاری جملات با درجه یکسان در این معادله، خواهیم داشت

$$-a + 1 = 0, \quad -b = 2a, \dots,$$

که به معنی

$$a = 1, \quad b = -2, \dots,$$

است. در نتیجه،

$$\varphi(y) = y^2 - 2y^3 + \dots, \quad (17.8)$$

و دوباره از (15.8) نتیجه می‌شود که معادله $\bar{z}' = F(\bar{z})$ به شکل

$$y' = y^2 - \varphi(y)^2 = y^2 - y^4 - \dots. \quad (18.8)$$

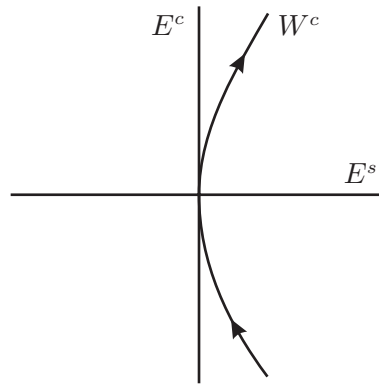
در می‌آید. در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از $y = 0$ علامت y' با علامت y^2 مطابق است و بنابراین مبدأ در (18.8) ناپایدار است. با توجه به بحث قبلی، این نشان می‌دهد که مبدأ در رابطه (15.8) ناپایدار است. علاوه بر این، از (17.8) و (18.8) نتیجه می‌شود که در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از مبدأ، خمینه مرکزی W^c و حرکت در امتداد W^c آنهایی هستند که در شکل 8.8 نشان داده شده است.

اگرچه برای مطالعه پایداری مبدأ ضروری نیست، اما می‌توان از روش قبلی برای تقریب خمینه پایدار نیز استفاده کرد. یعنی، برای تابعی مانند $\psi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^k که $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ داریم

$$W^s = \{(x, \psi(x)) : x \in (-\delta, \delta)\},$$

چون $0 \in W^s$ و $T_0 W^s = E^s$. در این صورت، می‌توان نوشت

$$\psi(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots. \quad (19.8)$$



شکل ۸.۸: خمینه مرکزی معادله (۱۵.۸).

با جایگذاری $y = \psi(x)$ در (۱۵.۸)، به دست می‌آوریم

$$y' = \psi'(x)x' = \psi'(x)(-x + \psi(x)^2),$$

و بنابراین،

$$\psi(x)^2 - x^2 = \psi'(x)(-x + \psi(x)^2).$$

با استفاده از (۱۹.۸)، تساوی

$$\alpha^2 x^4 + \dots - x^2 = (2\alpha x + 3\beta x^2 + \dots)(-x + \alpha^2 x^4 + \dots),$$

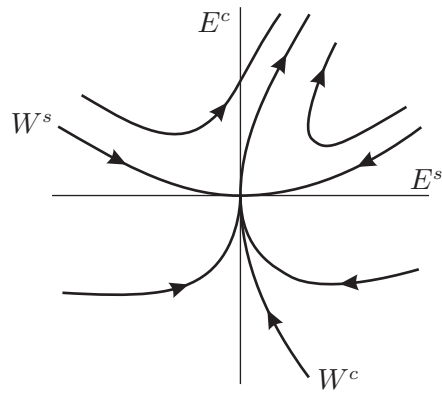
حاصل می‌شود. با برابر قرار دادن جملات در این تساوی، خواهیم داشت

$$-1 = -2\alpha, \quad 0 = -3\beta, \dots,$$

و بنابراین

$$\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + \dots.$$

این نشان می‌دهد که در یک همسایگی از مبدأ، تصویر فاز به صورتی است که در شکل ۹.۸ نشان داده شده است.



شکل ۹.۸: تصویر فاز معادله (۶.۸) در یک همسایگی از مبدأ.

مثال ۱۵.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = x^2 - xy, \\ y' = -y + x^2, \end{cases} \quad (۲۰.۸)$$

را در نظر بگیرید. مبدأ یک نقطه بحرانی است و برای تابع

$$f(x, y) = (x^2 - xy, -y + x^2),$$

داریم

$$d_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین،

$$E^s = \{0\} \times \mathbb{R}, \quad E^u = \{0\}, \quad E^c = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

از آنجایی که $f(0, y) = (0, -y)$ ، تابع f روی محور عمودی، عمودی است. بنابراین، محور عمودی ناوردا

است. به دلیل یکتایی خمینه پایدار در قضیه ۱۱.۸، نتیجه می‌شود $W^c = E^s$.

اکنون خمینه مرکزی

$$W^c = \{(x, \psi(x)) : x \in (-\delta, \delta)\},$$

را که

$$\psi(x) = ax^2 + bx^3 + \dots, \quad (۲۱.۸)$$

در نظر می‌گیریم. با جایگذاری $y = \psi(x)$ در معادله (۲۰.۸)،

$$y' = \psi'(x)x' = \psi'(x)(x^2 - x\psi(x)),$$

حاصل می‌شود و در نتیجه

$$-\psi(x) + x^2 = \psi'(x)(x^2 - x\psi(x)).$$

با استفاده از (۲۱.۸)، تساوی

$$-ax^2 - bx^3 - \dots + x^2 = (2ax + 3bx^2 + \dots)(x^2 - ax^3 - bx^4 - \dots),$$

به دست می‌آید و نتیجه می‌شود

$$a = 1, 2a = -b, \dots$$

از این رو

$$\psi(x) = x^2 - 2x^3 + \dots,$$

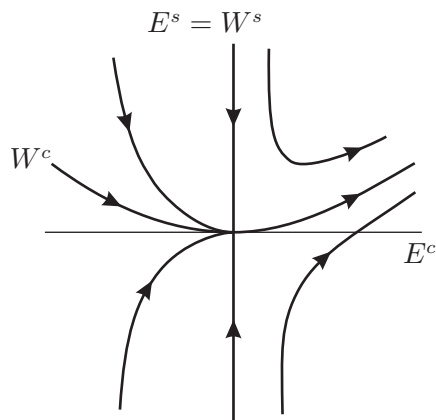
و

$$x' = x^2 - x\psi(x) = x^2 - x^3 + 2x^4 + \dots.$$

بنابراین، مبدأ در معادله (۲۰.۸) ناپایدار است. در یک همسایگی از مبدأ، تصویر فاز در شکل (۱۰.۸) نشان داده شده است.

اکنون، با یک مثال نشان می‌دهیم که چگونه خمینه‌های مرکزی می‌توانند برای ساده کردن مطالعه نظریه انشعاب

به کار بروند.



شکل ۱۰.۸: تصویر فاز معادله (۲۰.۸) در یک همسایگی مبدأ.

مثال ۱۶.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = \epsilon x - x^3 + y^2, \\ y' = -y + x^2, \end{cases} \quad (22.8)$$

را در نظر بگیرید. با افزودن یک مؤلفه سوم $\epsilon' = 0$ داریم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \epsilon \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon x - x^3 + y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23.8)$$

از آنجایی که ماتریس 3×3 در (۲۳.۸) دارای مقادیر ویژه $0, 0, -1$ است، از قضیهٔ خمینهٔ مرکزی (قضیهٔ ۱۱.۸)نتیجه می‌شود که خمینه‌های W^u و W^c وجود دارند که به ترتیب بر فضاهای پایدار و مرکزی

$$E^s = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}, \quad E^c = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R},$$

مماس هستند. از بحث ابتدای این بخش برمی‌آید که برای تعیین پایداری مبدأ در (۲۳.۸) (و بنابراین در (۲۲.۸))

کافی است که رفتار در خمینهٔ مرکزی (یا به‌طور دقیق‌تر، هر خمینهٔ مرکزی) مورد مطالعه قرار گیرد. می‌توان آن را

برای تابعی مانند $\varphi : (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ که $\varphi(0, 0) = 0$ و $d_{(0,0)}\varphi = 0$ به صورت

$$W^c = \{(x, \varphi(x, \epsilon), \epsilon) : x, \epsilon \in (-\delta, \delta)\},$$

نوشت. برای $y = \varphi(x, \epsilon)$ داریم

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} \epsilon' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\epsilon x - x^3 + y^2),$$

و از رابطه (۲۲.۸)،

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} (\epsilon x - x^3 + y^2) = -\varphi(x, \epsilon) + x^2, \quad (24.8)$$

به دست می‌آید. با نوشتن

$$\varphi(x, \epsilon) = ax^2 + bx\epsilon + c\epsilon^2 + \dots,$$

از (۲۴.۸) نتیجه می‌شود

$$(2ax + b\epsilon + \dots)(\epsilon x - x^3 + \varphi(x, \epsilon)^2) = -ax^2 - bx\epsilon - c\epsilon^2 - \dots + x^2,$$

که $a = b = c = 0$ را به دست می‌دهد. بنابراین با توجه به اولین تساوی در (۲۲.۸)،

$$x' = \epsilon x - x^3 + \varphi(x, \epsilon)^2 = \epsilon x - x^3 + \dots,$$

حاصل می‌شود. رفتار جواب‌های معادله (۲۲.۸) در همسایگی مبدأ را می‌توان از معادله $x' = \epsilon x - x^3$ که قبلاً در مثال ۷.۸ مورد مطالعه قرار دادیم، استنباط کرد.

۳.۸ نظریه صورت‌های نرمال

همانگونه که قبلاً ذکر شد، انواع مختلفی از انشعاب‌ها وجود دارد و مطلوب است که نوعی طبقه‌بندی ارائه شود. درحالی‌که یک مطالعه سیستماتیک خارج از محدوده کتاب است، بهتر است رویه‌ای داشته باشیم که تا حد امکان به صورت خودکار بتواند کلاس بزرگی از معادلات را قبل از مطالعه وجود انشعاب‌ها ساده کند. نظریه صورت‌های نرمال که در این بخش به معرفی آن می‌پردازیم، چنین رویه‌ای را ارائه می‌دهد. با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال ۱۷.۸. برای هر $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، معادله قطبی

$$x' = \epsilon x + f(x),$$

را که $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^∞ با $f(0) = f'(0) = 0$ است در نظر بگیرید. با نوشتن بسط تیلور f ، رابطه

$$x' = \epsilon x + ax^2 + bx^3 + \dots, \quad (25.8)$$

به دست می‌آید. اکنون تغییر متغیر

$$x = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \dots, \quad (26.8)$$

را در نظر بگیرید. اگر سری (۲۶.۸) دارای یک شعاع همگرایی مثبت باشد (به ویژه، اگر چندجمله‌ای باشد)، در واقع تغییر متغیرها را در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از مبدأ تعریف می‌کند. با جایگزینی (۲۶.۸) در (۲۵.۸)، رابطه

$$y'(1 + 2\alpha y + 3\beta y^2 + \dots) = \epsilon(y + \alpha y^2 + \beta y^3) + a(y^2 + 2\alpha y^3) + by^3 + \dots,$$

را به دست می‌آوریم و بنابراین، داریم

$$y' = \frac{\epsilon y + (\epsilon\alpha + a)y^2 + \epsilon\beta + (2a\alpha + b)y^3 + \dots}{1 + 2\alpha y + 3\beta y^2 + \dots}.$$

با استفاده از رابطه

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-r)^k = \frac{1}{1+r},$$

که برای $|r| < 1$ برقرار است، پس از کمی محاسبه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} y' &= (\epsilon y + (\epsilon\alpha + a)y^2 + \dots) \\ &\quad \times [1 - 2\alpha y - 3\beta y^2 - \dots + (2\alpha y + 3\beta y^2 + \dots)^2 - \dots] \quad (27.8) \\ &= \epsilon y + (a - \epsilon\alpha)y^2 + (b + 2\epsilon\alpha^2 - 2\epsilon\beta)y^3 + \dots. \end{aligned}$$

به‌ویژه، با انتخاب ضرایب α و β به‌گونه‌ای که ضرایب y^2 و y^3 در (۲۷.۸) صفر شود، یعنی با قرار دادن

$$\alpha = \frac{a}{\epsilon}, \quad \beta = \frac{a^2}{\epsilon^2} + \frac{b}{2\epsilon},$$

برای $\epsilon \neq 0$ ، معادله

$$y' = \epsilon y + o(y^3),$$

حاصل می‌شود.

اکنون حالت کلی را در نظر بگیرید. برای ماتریس داده‌شده $A \in M_n$ و یک تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس

C^∞ با $f(0) = 0$ و $d_0 f = 0$ ، معادله

$$x' = Ax + f(x),$$

را در نظر بگیرید. مشابه آنچه در مثال ۱۷.۸ انجام شد، تغییر متغیر $x = y + h(x)$ را که $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک

تابع دیفرانسیل پذیر با $h(0) = 0$ و $d_0 h = 0$ است، در نظر بگیرید. در این صورت

$$x' = y' + d_y h_{y'} = (\text{Id} + d_y h)y'.$$

اکنون، یادآوری می‌کنیم که برای هر ماتریس مربعی B با $\|B\| < 1$ داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-B)^k = (\text{Id} + d_y h)^{-1}. \quad (28.8)$$

از آنجایی که $d_0 h = 0$ ، از (۲۸.۸) نتیجه می‌شود که برای هر y به اندازه کافی کوچک، ماتریس $\text{Id} + d_y h$

وارون پذیر است و می‌توان نوشت

$$y' = (\text{Id} + d_y h)^{-1} x' \\ (\text{Id} + d_y h)^{-1} [A(y + h(y)) + f(y + h(y))].$$

همچنین از (۲۸.۸) نتیجه می‌گیریم

$$y' = (\text{Id} - d_y h + \dots) [Ay + Ah(y) + f(y + h(y))]. \quad (29.8)$$

اکنون فرض کنید $H_{m,n}$ مجموعه همه توابع $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ باشد به طوری که هر مولفه یک چندجمله‌ای همگن از درجه m ، یعنی، ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌ها به صورت $x_{i_1}^{m_1} \cdots x_{i_k}^{m_k}$ با

$$k \in \mathbb{N}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}, \quad m_1 + \dots + m_k = m$$

است. توجه کنید که $H_{m,n}$ یک فضای خطی است. قرار دهید

$$f = f_2 + f_3 + \dots \quad (۳۰.۸)$$

و

$$h = \text{Id} + h_2 + h_3 + \dots,$$

که برای هر $m \geq 2$ ، داریم $f_m, g_m \in H_{m,n}$. از (۲۹.۸) نتیجه می‌شود

$$y' = Ay + [Ah_2(y) + f_2(y) - D_y h_2 A y] + \sum_{k=3}^{+\infty} [Ah_k(y) + g_k(y) - D_y h_k A y], \quad (۳۱.۸)$$

که هر یک از توابع $g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ فقط به h_2, \dots, h_{k-1} وابسته هستند. برای حذف همه جملات ممکن در سمت راست (۳۱.۸)، سعی می‌کنیم برای $k \geq 3$ ، معادلات

$$D_y h_2 A y - Ah_2(y) = f_2(y), \quad (۳۲.۸)$$

و

$$D_y h_k A y - Ah_k(y) = g_k(y), \quad (۳۳.۸)$$

را به صورت بازگشتی حل کنیم تا به ترتیب توابع h_2, h_3, \dots را بیابیم. معادلات (۳۲.۸) و (۳۳.۸) معادلات همسانی نامیده می‌شوند. برای هر $m \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$ ، نگاشت

$$L_A^{m,n}: H_{m,n} \rightarrow H_{m,n},$$

با ضابطه

$$(L_A^{m,n}h)(y) = D_y h A_y - Ah(y),$$

را تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $L_A^{m,n}$ یک تبدیل خطی است. معادلات همگن را می‌توان به صورت

$$L_A^{2,n}h_2 = f_2, \quad L_A^{k,n}h_k = g_k, \quad k \geq 3, \quad (34.8)$$

نوشت.

مثال ۱۸.۸. فرض کنید $m = n = 2$ و $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. هر تابع $h \in H_{2,2}$ را می‌توان به صورت

$$h(x, y) = (ax^2 + bxy + cy^2, dx^2 + exy + fy^2),$$

برای ثابت‌های a, b, c, d, e, f نوشت. به ویژه، $\dim H_{2,2} = 6$. به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (L_A^{2,2})(x, y) &= \begin{pmatrix} 2ax + by & bx + 2cy \\ 2dx + ey & ex + 2fy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dx^2 + exy + fy^2 \\ -ax^2 - bxy - cy^2 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ xy \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + d \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} -y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

و بنابراین، تبدیل خطی $L_A^{2,2}$ با ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ با توجه به پایه $H_{2,2}$ به صورت

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\},$$

داده می‌شود.

توجه کنید که برای حل معادلات همگن در (۳۴.۸) کافی است معکوس هر تبدیل $L_A^{m,n}$ را زمانی که وجود دارد پیدا کنیم. اما از آنجایی که $L_A^{m,n}$ خطی است، برای تصمیم‌گیری در مورد وارون‌پذیر بودن تبدیل، کافی است مقادیر ویژه آن را محاسبه کنیم.

قضیه ۱۹.۸. اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A (با در نظر گرفتن چندگانگی آنها) باشد، آنگاه مقادیر ویژه $L_A^{m,n}$ اعداد

$$-\lambda_k + \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i, \quad (35.8)$$

برای

$$k \in \{1, \dots, n\}, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_1 + \dots + m_n = m,$$

هستند. علاوه بر آن، بردارهای ویژه $L_A^{m,n}$ متناظر با مقادیر ویژه در (۳۵.۸)، چندجمله‌ای‌های

$$x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} v_k, \quad (36.8)$$

هستند که v_k یک بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ_k است.

یک حالت خاص در مثال زیر داده می‌شود.

مثال ۲۰.۸. برای ماتریس قطری

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

اگر e_1, \dots, e_n پایه استاندارد \mathbb{R} باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} & L_A^{m,n}(x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} e_k)(x_1, \dots, x_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (m_1 x_1^{m_1-1} x_2 \dots x_n) & \dots & (m_n x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_1^{m_1} x_2 \dots x_n^{m_n} \lambda_k e_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \\ &= (m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n) x_1^{m_1} x_2 \dots x_n^{m_n} e_k - x_1^{m_1} x_2 \dots x_n^{m_n} \lambda_k e_k \\ &= (\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i - \lambda_k) x_1^{m_1} x_2 \dots x_n^{m_n} e_k. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $x_1^{m_1} x_2 \dots x_n^{m_n} e_{k,m,n}$ یک بردار ویژه $L_A^{m,n}$ متناظر با مقدار ویژه در (۳۵.۸) است.

طبق قضیه ۱۹.۸، اگر بعضی از اعداد در (۳۵.۸) صفر باشند، ممکن است نتوان معادله همگن (۳۴.۸) را

حل کرد. این، انگیزه مفهوم زیر است.

تعریف ۲۱.۸. بردار $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ یک تشدید نامیده می‌شود هرگاه اعداد صحیح $k \in \{1, \dots, n\}$ و

$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ با $m_1 + \dots + m_n \geq 2$ موجود باشند به طوری که

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i.$$

هنگامی که هیچ بردار تشدید وجود نداشته باشد، می‌توان همه معادلات همگن را حل کرد و در نتیجه تمام

جملات f_m را در (۳۰.۸) حذف کرد. یادآوری می‌کنیم که برای یک تابع $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ اگر برای $x \rightarrow 0$ ،

داشته باشیم $g(x)/\|x\|^k \rightarrow 0$ ، آنگاه می‌نویسیم $g(x) = o(\|x\|^k)$.

قضیه ۲۲.۸. (پوانکاره). فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی از کلاس C^∞

با $f(0) = 0$ و $d_0 f = 0$ باشد. اگر بردار تشکیل شده توسط مقادیر ویژه A تشدیدکننده نباشد، آنگاه برای هر

$k \in \mathbb{N}$ معادله $x' = Ax + f(x)$ را می‌توان با تغییر متغیر $x = y + h(y)$ به

$$y' = Ay + o(\|y\|^k),$$

تبدیل کرد.

برهان. از آنجایی که بردار $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ که توسط مقادیر ویژه A تشکیل می‌شود تشدید کننده نیست، همه مقادیر ویژه $L_A^{m,n}$ در (۳۵.۸) ناصفر هستند. بنابراین، هر تبدیل خطی $L_A^{m,n}$ معکوس پذیر است و می‌توان جواب‌های متوالی همه معادلات همگن را در (۳۴.۸) تا مرتبه k به دست آورد. \square

اکنون به طور خلاصه توضیح می‌دهیم که وقتی بردارهای تشدید وجود دارد چه اتفاقی می‌افتد. در این مورد فقط می‌توان تحدید $L_A^{m,n}$ را به زیر فضای E از $H_{m,n}$ که توسط فضاهای ریشه متناظر با مقادیر ویژه ناصفر در (۳۵.۸) تولید می‌شود، معکوس کرد. به طور دقیق‌تر، تجزیه $H_{m,n} = E \oplus F$ را در نظر بگیرید که در آن F زیر فضای $H_{m,n}$ تولید شده توسط فضاهای ریشه مربوط به مقادیر ویژه صفر در (۳۵.۸) است. از آنجایی که

$$L_A^{m,n} E = E, \quad L_A^{m,n} F = F,$$

می‌توان با توجه به تجزیه $H_{m,n} = E \oplus F$ تبدیل خطی $L_A^{m,n}$ را به صورت $\begin{pmatrix} L_E & 0 \\ 0 & L_F \end{pmatrix}$ نوشت. همچنین قرار می‌دهیم

$$f_2 = \begin{pmatrix} f_2^E \\ f_2^F \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} h_2^E \\ h_2^F \end{pmatrix}.$$

نخستین معادله همگن در (۳۴.۸) به صورت

$$\begin{cases} L_E h_2^E = f_2^E, \\ L_F h_2^F = f_2^F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_2^E = L_E^{-1} f_2^E, \\ L_F h_2^F = f_2^F, \end{cases}$$

است. با جایگذاری h_2^E در (۳۱.۸)، سرانجام

$$\begin{aligned} y' &= Ay + f_2(y) - (L_A^{m,n} h_2)(y) + \dots \\ &= Ay + f_2^E(y) - (L_E h_2^E)(y) + f_2^F(y) - (L_F h_2^F)(y) + \dots \\ &= Ay + f_2^F(y) - (L_F h_2^F)(y) + \dots \end{aligned}$$

به دست می‌آید. شرایط درجه ۲ با مقادیر F را نمی‌توان حذف کرد، مگر اینکه از ابتدا داشته باشیم $f_2^F = 0$. با

ادامه این روش برای معادلات همگن باقیمانده در (۳۴.۸)، به طور کلی فقط جملات به شکل (۳۶.۸) را نمی‌توان

حذف کرد.

مثال ۲۳.۸. معادله

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots, \quad (۳۷.۸)$$

را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه ماتریس 2×2 در (۳۷.۸)، اعداد $\pm 2i$ هستند و بنابراین، برای تعیین اینکه آیا بردارهای تشدید وجود دارند، باید معادله

$$m_1 2i + m_2(-2i) = \pm 2i,$$

یا به عبارت دیگر

$$m_1 - m_2 = \pm 1,$$

را حل کنیم که $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $m_1 + m_2 \geq 2$. جواب‌ها عبارتند از

$$(m_1, m_2) = (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), \dots$$

بحث قبلی نشان می‌دهد که با تغییر متغیرها، فقط جملات به شکل

$$xy^2, x^2y, x^2y^3, x^3y^2, \dots,$$

را نمی‌توان حذف کرد. به عبارت دیگر، با نشان دادن مؤلفه‌ها به شکل u و v در مختصات جدید، معادله (۳۷.۸)

شکل

$$\begin{cases} u' = 2v + a_1uv^2 + a_2u^2v + a_3u^2v^3 + a_4u^3v^2 + \dots, \\ v' = -2u + b_1uv^2 + b_2u^2v + b_3u^2v^3 + b_4u^3v^2 + \dots, \end{cases}$$

را برای ثابت‌های $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ که $i \in \mathbb{N}$ به خود می‌گیرد.

مثال ۲۴.۸. معادله

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots \quad (۳۸.۸)$$

را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه ماتریس 2×2 در (۳۸.۸)، اعداد 2 و 1 هستند و بنابراین، برای تعیین اینکه آیا بردارهای تشدید وجود دارند، باید معادلات

$$2m_1 + m_2 = 2, \quad 2m_1 + m_2 = 1,$$

را با $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $m_1 + m_2 \geq 2$ حل کنیم. می‌توان به راحتی بررسی کرد که $(m_1, m_2) = (0, 2)$ تنها جواب است. این نتیجه می‌دهد که با نمایش مؤلفه‌ها با u و v پس از تغییر مناسب متغیرها، معادله (۳۸.۸) برای ثابت‌هایی مانند $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، شکل

$$\begin{cases} u' = 2u + \alpha v^2, \\ v' = v + \beta v^2, \end{cases}$$

را به خود می‌گیرد. علاوه بر این، می‌توان β را صفر در نظر گرفت زیرا با توجه به قضیه ۱۹.۸، جواب $(m_1, m_2) = (0, 2)$ با بردار ویژه $(y^2, 0)$ مطابقت دارد ((۳۶.۸) را ببینید)، که مؤلفه دوم برابر با صفر است.

ما این بخش را با یک نتیجه کلی در مورد اختلالات معادلات خطی که ماتریس‌های آن فقط دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت هستند، به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۲۵.۸. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ است که فقط دارای مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت است و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع از کلاس C^∞ با $f(0) = 0$ و $d_0 f = 0$ باشد. در این صورت، برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، معادله $x' = Ax + f(x)$ را می‌توان با تغییر متغیر $x = y + h(y)$ به

$$y' = Ay + p(y) + o(\|y\|^k),$$

تبدیل کرد که p در آن یک چندجمله‌ای است.

برهان. برای بررسی وجود بردارهای تشدید، معادله

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i, \quad (۳۹.۸)$$

را در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$\operatorname{Re} \lambda_j = \sum_{i=1}^n m_i \operatorname{Re} \lambda_i. \quad (40.8)$$

با در نظر گرفتن بردار (m_1, \dots, m_n) به طوری که

$$\sum_{i=1}^n m_i > \frac{\max_i \operatorname{Re} \lambda_i}{\min_i \operatorname{Re} \lambda_i}$$

(به یاد می‌آوریم که طبق فرض، مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت هستند)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \operatorname{Re} \lambda_i &\geq \sum_{i=1}^n m_i \min_i \operatorname{Re} \lambda_i \\ &> \max_i \operatorname{Re} \lambda_i \geq \operatorname{Re} \lambda_j. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که تساوی (40.8) و در نتیجه تساوی (39.8) برای بردار (m_1, \dots, m_n) برقرار نیست. بنابراین

از بین آنهایی که

$$\sum_{i=1}^n m_i \leq \frac{\max_i \operatorname{Re} \lambda_i}{\min_i \operatorname{Re} \lambda_i},$$

حداکثر تعداد متناهی از بردارهای تشدید کننده (m_1, \dots, m_n) وجود دارد. این نتیجه مطلوب را به همراه

□

دارد.

تمرین‌ها

تمرین ۱.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = xy + ax^3 + bxy^2, \\ y' = -y + cx^2 + dx^2y, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) یک خمینه مرکزی از مبدأ تا مرتبه سوم پیدا کنید.

(ب) پایداری مبدأ را برای $a + c < 0$ تعیین کنید.

تمرین ۲.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = 2x + p(x, y), \\ y' = y + q(x, y), \end{cases}$$

را در نظر بگیرید که در آن p و q چند جمله‌ای‌هایی بدون جملات از درجه 0 یا 1 هستند.

(الف) خمینه‌های پایدار، ناپایدار و مرکزی را برای مبدأ پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که با تغییر متغیر مناسب، معادله را می‌توان به

$$z' = 2z + cw^2, \quad w' = w,$$

تبدیل کرد.

تمرین ۳.۸. برای هر $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، معادله

$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = \epsilon y - x^3, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) از یک تابع لیاپانوف برای نشان دادن پایداری مبدأ برای $\epsilon = 0$ استفاده کنید.

(ب) یک خمینه مرکزی از مبدأ تا مرتبه پنجم پیدا کنید.

(ج) پایداری مبدأ را برای هر $\epsilon \neq 0$ تعیین کنید.

(د) یک خمینه مرکزی از مبدأ برای $\epsilon = 1$ پیدا کنید.

(ه) بررسی کنید که آیا مدارهای هتروکلینیک برای $\epsilon = 1$ وجود دارد.

تمرین ۴.۸. معادله

$$\begin{cases} x' = y + x^3, \\ y' = \epsilon x - y^2, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) بررسی کنید که آیا مدارهای تناوبی در ربع اول برای حالت $\epsilon = 1$ وجود دارد.

(ب) پایداری همه نقاط بحرانی را برای $\epsilon = 1$ تعیین کنید.

(ج) پایداری مبدأ را برای $\epsilon = 0$ تعیین کنید.

(د) بررسی کنید که آیا انشعابی برای $\epsilon > 0$ ای اتفاق می‌افتد.

تمرین ۵.۸. برای هر $(\epsilon, \delta) \in \mathbb{R}^2$ ، معادله

$$\begin{cases} x' = \epsilon x - y + \delta x(x^2 + y^2), \\ y' = x - \epsilon y + \delta y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(الف) پایداری مبدأ را برای هر جفت (ϵ, δ) که $|\epsilon| < 1$ تعیین کنید. راهنمایی: برای تابع

$$V(x, y) = x^2 + y^2 - 2\epsilon xy,$$

داریم

$$\dot{V}(x, y) = 2\delta(x^2 + y^2)V(x, y).$$

(ب) برای هر جفت (ϵ, δ) که $|\epsilon| > 1$ ، نشان دهید هیچ انشعابی در یک همسایگی از مبدأ رخ نمی‌دهد.

(ج) برای هر جفت (ϵ, δ) که $\delta < 0$ ، نشان دهید که هر زیرمدار مثبت، کراندار است.

جواب‌ها .

$$1.8 \text{ (الف)} \quad W^c = \{(x, cx^2 + o(x^3)) : x \in (-\delta, \delta)\}$$

(ب) مبدأ ناپایدار است.

$$2.8 \text{ (الف)} \quad W^s = \{(0, 0)\}, \quad W^u = (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta), \quad W^c = \{(0, 0)\}.$$

$$3.8 \text{ (الف)} \quad (x^4 + 2y^2)' = 4(x^3x' + yy') = -4x^6 \leq 0$$

(ب)

$$W^c = \begin{cases} (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) & \epsilon = 0, \\ \{(x, x^3/\epsilon + 3x^5/\epsilon^3 + \dots) : x \in (-\delta, \delta)\} & \epsilon \neq 0. \end{cases}$$

(ج) ناپایدار است.

$$4.8 \text{ (د)} \quad W^c = \{(x, x^3) : x \in (-\delta, \delta)\}$$

(ه) موجود است.

۴.۸ (الف) وجود ندارد.

(ب) $(0, 0)$ و $(1, -1)$ ناپایدارند.

(ج) ناپایدار است.

(د) انشعابی وجود ندارد.

۵.۸ (الف) برای $\delta > 0$ پایدار است. برای $\delta = 0$ به طور مجانبی پایدار نیست و برای $\delta < 0$ به طور مجانبی پایدار است.

فصل ۹

دستگاه‌های همیلتونی

در این فصل به معرفی مختصری از نظریهٔ دستگاه‌های همیلتونی می‌پردازیم که به‌ویژه با توجه به وجود آنها در دستگاه‌های فیزیکی، بسیار مهم هستند. پس از معرفی مفاهیم اساسی نظریه، نتایجی را در مورد پایداری دستگاه‌های همیلتونی خطی و غیرخطی بیان می‌کنیم. همچنین مفهوم انتگرال‌پذیری و به‌ویژه قضیهٔ لیوویل-آرنولد را در مورد ساختار مجموعه‌های تراز انتگرال‌های مستقل در برگشت در نظر می‌گیریم. علاوه بر این، به‌طور خلاصه ایده‌های اساسی نظریهٔ کولموگروف-آرنولد-موزر را شرح می‌دهیم. برای موضوعات بیشتر، خواننده را به [۱، ۳، ۲۲، ۲۵] ارجاع می‌دهیم.

۱.۹ مفاهیم پایه‌ای

فرض کنید $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی از کلاس C^2 باشد که یک همیلتونی نامیده می‌شود. به‌طور کلی، می‌توان همیلتونی را در زیرمجموعه‌ای باز از \mathbb{R}^{2n} در نظر گرفت. مختصات را در \mathbb{R}^{2n} به شکل (q, p) می‌نویسیم که

$$p = (p_1, \dots, p_n) \text{ و } q = (q_1, \dots, q_n)$$

تعریف ۱.۹. دستگاه معادلات

$$q'_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p), \quad p'_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

دستگاه همیلتونی^۱ با n درجه آزادی نامیده می‌شود.

مثال‌های زیر دستگاه همیلتونی هستند.

مثال ۲.۹. فرض کنید $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از کلاس C^2 باشد. با قرار دادن $q' = p$ ، معادله $q'' = -U'(q)$

هم‌ارز با دستگاه همیلتونی با یک درجه آزادی است که با معادله همیلتونی

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + U(q), \quad (۲.۹)$$

داده می‌شود. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که H در طول جواب‌های معادله

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = -U'(q), \end{cases} \quad (۳.۹)$$

ثابت می‌ماند. درضمن، عبارات $\frac{p^2}{2}$ و $U(q)$ در (۲.۹) به‌ترتیب با انرژی جنبشی و پتانسیل مطابقت دارند.

مثال ۳.۹. مسئله کپلر یک مورد خاص از مسئله دو جسم است و می‌تواند توسط یک دستگاه همیلتونی با دو

درجه آزادی توصیف شود، یعنی همیلتونی

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - U(q), \quad (۴.۹)$$

در \mathbb{R}^4 برای پتانسیل $U(q) = -\frac{\mu}{\|q\|}$ و $\mu \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. دستگاه همیلتونی نظیر،

$$q' = p, \quad p' = -\frac{\mu q}{\|q\|^3}, \quad (۵.۹)$$

است.

اکنون دستگاه (۱.۹) را به‌صورت

$$x' = X_H(x) = J\nabla H(x), \quad (۶.۹)$$

^۱Hamiltonian system

بنویسید که $x = (q, p) \in R^{2n}$

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right),$$

و

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

در اینجا $\text{Id} \in M_n$ ماتریس همانی است. به‌طور خاص، مایلم بدانیم که کدام تبدیل، ساختار همیلتونی را به معنای زیر حفظ می‌کند. با تغییر متغیر $x = \varphi(y)$ ، دستگاه همیلتونی (۶.۹) به

$$y' = (\varphi^* X_H)(y),$$

تبدیل می‌شود که

$$(\varphi^* X_H)(y) = (d_y \varphi)^{-1} X_H(\varphi(y)).$$

خواهیم داشت $\varphi^* X_H = X_{H \circ \varphi}$ و بنابراین

$$y' = X_{H \circ \varphi}(y),$$

نیز متناظر با حفظ دستگاه همیلتونی خواهد بود اگر و تنها اگر برای هر $y \in R^{2n}$

$$(d_y \varphi)^{-1} J \nabla H(\varphi(y)) = J \nabla (H \circ \varphi)(y).$$

از آنجایی که

$$\nabla (H \circ \varphi)(y) = (d_y \varphi)^* \nabla H(\varphi(y)),$$

تساوی $\varphi^* X_H = X_{H \circ \varphi}$ وقتی برقرار است که

$$(d_y \varphi)^{-1} J = J (d_y \varphi)^*. \quad (7.9)$$

از آنجایی که $J^{-1} = -J$ ، تساوی (۷.۹) را می توان به صورت

$$(d_y\varphi)^* J d_y\varphi = J, \quad (۸.۹)$$

نوشت.

تعریف ۴.۹. تبدیل دیفرانسیل پذیر $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ روی مجموعه $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ متعارف نامیده می شود هرگاه تساوی (۸.۹) برای هر $y \in V$ برقرار باشد.

مثال ۵.۹. نشان می دهیم که برای $n = 1$ یک تبدیل دیفرانسیل پذیر $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ متعارف است اگر و فقط اگر برای هر $y \in V$ ، $\det d_y\varphi = 1$ ، با نوشتن

$$d_y\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

معادله (۸.۹) معادل با

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ -ad + bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

است. تساوی آخر برقرار است اگر و تنها اگر

$$\det d_y\varphi = ad - bc = 1.$$

این نشان می دهد که برای $n = 1$ تبدیل های متعارف، تبدیل های دیفرانسیل پذیری هستند که مساحت و جهت را حفظ می کنند.

اکنون نشان می دهیم که جواب های یک دستگاه همیلتونی، تبدیل های متعارف حافظ حجم و جهت القا می کنند. فرض کنید $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ یک همیلتونی از کلاس C^2 باشد. برای $x \in \mathbb{R}^{2n}$ داده شده، فرض کنید $\varphi_t(x)$ جواب دستگاه همیلتونی (۶.۹) با شرط اولیه $\varphi_0(x) = x$ باشد.

قضیه ۶.۹. برای یک همیلتونی H از کلاس C^2 و برای هر t به اندازه کافی کوچک، نگاشت φ_t یک تبدیل متعارف است که حجم و جهت را حفظ می‌کند.

برهان. رابطه

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = X_H(\varphi_t(x)), \quad (9.9)$$

را داریم. از آنجایی که H از کلاس C^2 است، از (۹.۹) و تعمیم مناسبی از قضیه ۴۲.۱ نتیجه می‌شود که برای میدان‌های برداری C^2 داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} d_x \varphi_t = d_{\varphi_t(x)} X_H(\varphi_t).$$

این نشان می‌دهد که $d_x \varphi_t$ یک جواب معادله تغییرات خطی دستگاه همیلتونی در امتداد جواب $\varphi_t(x)$ است. علاوه بر این، از آنجایی که $\varphi_0(x) = x$ داریم $d_x \varphi_0 = \text{Id}$. اکنون قرار دهید

$$\alpha(t) = (d_x \varphi_t)^* J d_x \varphi_t.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $\alpha(t) = J$. با گرفتن مشتقات نسبت به t ,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (d_{\varphi_t(x)} X_H d_x \varphi_t)^* J d_x \varphi_t + (d_x \varphi_t)^* J d_{\varphi_t(x)} X_H d_x \varphi_t \\ &= (d_x \varphi_t)^* [(d_{\varphi_t(x)} X_H)^* J + J d_{\varphi_t(x)} X_H] d_x \varphi_t, \end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم و از معادله $d_y X_H = J d_y^2 H$ نتیجه می‌شود

$$\alpha'(t) = (d_x \varphi_t)^* (d_{\varphi_t(x)}^2 H J^* J + J^2 d_{\varphi_t(x)}^2 H) d_x \varphi_t.$$

از آنجایی که $J^* J = \text{Id}$ و $J^2 = -\text{Id}$ ، رابطه

$$\alpha'(t) = (d_x \varphi_t)^* (d_{\varphi_t(x)}^2 H - d_{\varphi_t(x)}^2 H) d_x \varphi_t = 0,$$

به دست می آید.

از طرف دیگر، از آنجایی که $d_x \varphi_0 = \text{Id}$ ، بنابراین $\alpha(0) = J$ و در نتیجه $\alpha(t) = \alpha(0) = J$. این نشان می دهد که φ_t یک تبدیل متعارف است. از آنجایی که

$$\det(d_x \varphi_t)^* = \det d_x \varphi_t,$$

از تساوی (۸.۹) نتیجه می شود که $|\det d_x \varphi_t|^2 = 1$ اما از آنجایی که $\det d_x \varphi_0 = \det \text{Id} = 1$ ، از پیوستگی $\varphi_t(x) \mapsto t$ نتیجه می گیریم که برای هر t به اندازه کافی کوچک، $\det d_x \varphi_t = 1$. این، نتیجه مطلوب را ایجاد می کند. \square

مثال ۷.۹. دستگاه همیلتونی

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = -q, \end{cases}$$

با یک درجه آزادی را که از همیلتونی

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2},$$

تعیین می شود در نظر بگیرید. مطابق مثال ۸.۱، داریم

$$\begin{aligned} \varphi_t(q_0, p_0) &= (p_0 \sin t + q_0 \cos t, p_0 \cos t - q_0 \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

و به وضوح،

$$\det d_{(q_0, p_0)} \varphi_t = \det \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1.$$

همچنین توجه می کنیم که برای هر تابع دیفرانسیل پذیر $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ برای جواب $x(t)$ از معادله (۶.۹)

داریم

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \nabla F(x(t)) \cdot X_H(x(t)) = (\nabla F(x(t)))^* J \nabla H(x(t)).$$

تعریف ۸.۹. براکت پواسون $\{F, G\}$ دو تابع دیفرانسیل پذیر $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت

$$\{F, G\}(x) = (\nabla F(x))^* J \nabla G(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}(x) \frac{\partial G}{\partial p_j}(x) - \frac{\partial F}{\partial p_j}(x) \frac{\partial G}{\partial q_j}(x) \right),$$

تعریف می‌شود.

اگر $x(t)$ جوابی از دستگاه همیلتونی (۶.۹) و F یک تابع دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \{F, H\}(x(t)).$$

بنابراین، برای اینکه F انتگرالی از معادله (۶.۹) باشد (به تعریف ۶.۱ مراجعه کنید) لازم است که $\{F, H\} = 0$. در ضمن، $\{H, H\} = 0$ و بنابراین، هر همیلتونی در امتداد جواب‌های دستگاه همیلتونی خود ثابت است.

۲.۹ دستگاه همیلتونی خطی

در این بخش، دسته خاص از همیلتونی‌ها را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، برای یک ماتریس $2n \times 2n$ متقارن داده شده S ، همیلتونی

$$H(x) = \frac{1}{2} x^* S x,$$

را در نظر بگیرید. واضح است که H یک چندجمله‌ای درجه ۲ بدون جملاتی با درجه ۰ یا ۱ است. دستگاه همیلتونی متناظر، دستگاه همیلتونی خطی نامیده می‌شود، یعنی،

$$x' = X_H(x) = J S x.$$

تعریف ۹.۹. ماتریس $B = S J$ با S متقارن، همیلتونی نامیده می‌شود. ماتریس A متعارف نامیده می‌شود هرگاه

$$A^* J A = J. \quad (10.9)$$

چند مثال ارائه می‌دهیم.

مثال ۱۰.۹. از (۸.۹) نتیجه می‌شود که اگر $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ یک تبدیل متعارف باشد، آنگاه برای هر $y \in V$ ، $d_y\varphi$ یک ماتریس متعارف است.

مثال ۱۱.۹. نشان می‌دهیم که یک ماتریس B همیلتونی است اگر و فقط اگر

$$B^*J + JB = 0, \quad (11.9)$$

درواقع، اگر B همیلتونی باشد، آنگاه

$$B^*J + JB = S^*J^*G + J^2S = S^* - S = 0.$$

از طرف دیگر، اگر معادله (۱۱.۹) برقرار باشد، آنگاه

$$(-JB)^* = B^*(-J)^* = B^*J = -JB,$$

و ماتریس $S = -JB$ متقارن است. علاوه بر آن، $JS = -J^2B = B$ و ماتریس B همیلتونی است.

مثال ۱۲.۹. نشان می‌دهیم که هر تابع نمایی e^{Bt} از یک ماتریس همیلتونی B یک ماتریس متعارف است. فرض کنید $B = JS$ ، با S متقارن، یک ماتریس همیلتونی باشد و تابع

$$\beta(t) = (e^{Bt})^* J e^{Bt}$$

را در نظر بگیرید. داریم $\beta(0) = J$ و

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= (JSe^{JSt})^* J e^{JSt} + (e^{JSt})^* J J S e^{JSt} \\ &= (e^{Bt})^* S^* J^* J e^{Bt} + (e^{Bt})^* J^2 S e^{Bt} \\ &= (e^{Bt})^* S e^{Bt} - (e^{Bt})^* S e^{Bt} = 0, \end{aligned}$$

زیرا ماتریس S متقارن است. این نشان می‌دهد که $\beta(t) = J$ برای $t \in \mathbb{R}$ ، و هر ماتریس e^{Bt} متعارف است.

اکنون برخی از ویژگی‌های مقادیر ویژه ماتریس‌های همیلتونی و ماتریس‌های متعارف را شرح می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۹. فرض کنید B یک ماتریس همیلتونی باشد. اگر λ یک مقدار ویژه از B باشد، آنگاه $-\lambda$ و $-\bar{\lambda}$ نیز مقادیر ویژه B ، با همان چندگانگی λ هستند. علاوه بر این، اگر 0 یک مقدار ویژه B باشد، آنگاه دارای چندگانگی زوج است.

برهان. از (۱۱.۹) نتیجه می‌شود که $B = J^{-1}(-B^*)J$. از این رو، ماتریس‌های B و $-B^*$ متشابه هستند و مقادیر ویژه یکسانی (با چندگانگی یکسان) دارند. بنابراین، اگر λ یک مقدار ویژه از B باشد، آنگاه $-\bar{\lambda}$ یک مقدار ویژه از $-B^*$ و همچنین از B (با همان چندگانگی) است. از آنجایی که B حقیقی است، نتیجه می‌گیریم که $\bar{\lambda}$ و $-\lambda$ نیز مقادیر ویژه (با همان چندگانگی) هستند. به طور خاص، مقادیر ویژه ناصفر B ، گروه‌های با دو یا چهار عضو تشکیل می‌دهند، و بنابراین، اگر 0 یک مقدار ویژه باشد، دارای چندگانگی زوج است. \square

قضیه ۱۴.۹. فرض کنید A یک ماتریس متعارف باشد. اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه $1/\lambda$ ، $\bar{\lambda}$ و $-1/\bar{\lambda}$ نیز مقادیر ویژه A با همان چندگانگی هستند. به علاوه، اگر 1 و -1 مقادیر ویژه A باشند، آنگاه هر یک از آنها دارای چندگانگی زوج هستند.

برهان. از (۱۰.۹) نتیجه می‌شود که A معکوس پذیر است و $A^* = JA^{-1}J^{-1}$. به ویژه، ماتریس‌های A^{-1} و A^* متشابه هستند و مقادیر ویژه یکسانی (با چندگانگی یکسان) دارند. بنابراین، اگر λ یک مقدار ویژه از A باشد، آنگاه $1/\lambda$ یک مقدار ویژه از A^{-1} و همچنین از A^* است. این نشان می‌دهد که $1/\bar{\lambda}$ یک مقدار ویژه A (با همان چندگانگی λ) است. از آنجایی که A حقیقی است، نتیجه می‌گیریم که $\bar{\lambda}$ و $1/\lambda$ نیز مقادیر ویژه (با همان چندگانگی) هستند. آخرین ویژگی بلافاصله از ویژگی‌های قبلی حاصل می‌شود. \square

با توجه قضیه ۱۰.۳، معادله خطی $x' = Bx$ به طور مجانبی پایدار است اگر و فقط اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه B منفی باشند، و پایدار است اگر و فقط اگر B هیچ مقدار ویژه‌ای با قسمت حقیقی مثبت نداشته باشد و هر مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر دارای یک بلوک جردن قطری باشد. از قضیه ۱۳.۹ به راحتی می‌توان

نتیجه گرفت که برای ماتریس همیلتونی B معادله خطی $x' = Bx$ به طور مجانبی پایدار نیست. علاوه بر این، اگر معادله پایدار باشد، تمام مقادیر ویژه B موهومی محض هستند و یک بلوک جردن قطری دارند.

۳.۹ پایداری تعادلها

در این بخش به بررسی پایداری نقاط بحرانی یک دستگاه غیرخطی همیلتونی می‌پردازیم. فرض کنید $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ یک همیلتونی از کلاس C^2 باشد و دستگاه همیلتونی متناظر $x' = X_H(x)$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۱۵.۹. نقطه $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ یک تعادل همیلتونی H نامیده می‌شود اگر $\nabla H(x_0) = 0$. یک تعادل x_0 از H ناتباهیده می‌شود اگر ماتریس هسین $d_{x_0}^2 H$ غیرتکین باشد.

توجه می‌کنیم که تعادل‌های H نقاط بحرانی $x' = X_H(x)$ هستند.

به یاد می‌آوریم که شاخص یک تبدیل دوخطی $H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ برای مثال، $(u, v) \mapsto u^* d_{x_0}^2 H v$ ، حداکثر بعد از زیرفضاهای $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ به گونه‌ای است که F در $E \times E$ منفی معین است. گزاره زیر نشان می‌دهد که صورت یک همیلتونی H در یک همسایگی تعادل ناتباهیده x_0 به طور کامل توسط شاخص ماتریس هسین $d_{x_0}^2 H$ تعیین می‌شود (برای اثبات، برای مثال، [۲۱] را ببینید).

قضیه ۱۶.۹. (لم مورس). اگر $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی از کلاس C^2 باشد و $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ یک تعادل ناتباهیده H باشد، آنگاه تغییر متغیرهای $V \rightarrow B(0, r)$ وجود دارد که در آن V یک همسایگی از x_0 است، به طوری که $g(0) = x_0$ و برای هر $(y_1, \dots, y_{2n}) \in B(0, r)$ که λ شاخص $d_{x_0}^2 H$ است،

$$(H \circ g)(y_1, \dots, y_{2n}) = H(x_0) - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^{2n} y_i^2.$$

اکنون نخستین نتیجه را در مورد پایداری تعادل یک دستگاه همیلتونی غیرخطی ارائه می‌کنیم. اثبات از لم

مورس استفاده می‌کند.

قضیه ۱۷.۹. فرض کنید H یک همیلتونی از کلاس C^2 باشد. اگر x_0 یک تعادل H با ماتریس هسین معین (مثبت یا منفی) $d_{x_0}^2 H$ باشد، آنگاه x_0 یک نقطه پایدار معادله $x' = X_H(x)$ است اما یک نقطه بحرانی مجانبی پایدار نیست.

برهان. طبق فرض، شاخص ماتریس هسین $d_{x_0}^2 H$ برابر با \bullet یا $2n$ است. از این رو، از لم مورس نتیجه می‌شود که تغییر متغیری مانند $g : B(0, r) \rightarrow V$ وجود دارد که در آن V یک همسایگی x_0 است، به طوری که $g(0) = x_0$ و برای هر $(y_1, \dots, y_{2n}) \in B(0, r)$

$$(H \circ g)(y_1, \dots, y_{2n}) = H(x_0) \pm \sum_{i=1}^{2n} y_i^2.$$

این نشان می‌دهد که برای یک c به اندازه کافی نزدیک به $H(x_0)$ ، با $c > H(x_0)$ برای $d_{x_0}^2 H$ مثبت معین، و $c < H(x_0)$ برای $d_{x_0}^2 H$ منفی معین، مجموعه‌های تراز

$$V_c = \{x \in V : H(x) = c\},$$

با کره‌های $2n$ -بعدی که وقتی $H(x_0) \rightarrow c$ به نقطه x_0 نزدیک می‌شوند دینامورفیک هستند. از سوی دیگر، از آنجایی که H در امتداد جواب‌های دستگاه همیلتونی خود ثابت است، هر جواب $\varphi_t(x)$ با شرط اولیه $x \in V_c$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ در V_c باقی می‌ماند (توجه می‌کنیم که از آنجایی که V_c فشرده است، حداکثر بازه هر یک از این جواب‌ها \mathbb{R} است). این، نتیجه مطلوب را به همراه دارد. \square

مثال ۱۸.۹. (ادامه مثال ۲.۹). همیلتونی H در (۲.۹) را در نظر بگیرید. از قضیه ۱۷.۹ چنین برمی‌آید که اگر q_0 یک مینیمم موضعی اکید از U با $U''(q_0) > 0$ باشد، آنگاه $(q_0, 0)$ یک نقطه بحرانی پایدار اما نه به طور مجانبی پایدار معادله (۳.۹) است. در واقع، از آنجایی که q_0 یک مینیمم موضعی U است، داریم $U'(q_0) = 0$ و از این رو، $(q_0, 0)$ یک نقطه بحرانی معادله (۳.۹) است. علاوه بر آن، چون $U''(q_0) > 0$ ، ماتریس هسین

$$d_{(q_0, 0)}^2 H = d_{(q_0, 0)}(U', p) = \begin{pmatrix} U''(q_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

معین مثبت است.

حال موردی را که $d_{x_0}^2 H$ معین نیست در نظر می‌گیریم. برای مطالعه پایداری تعادل x_0 ، بهتر است که معادله وردشی خطی

$$y' = d_{x_0} X_H y,$$

را در نظر بگیریم.

تعریف ۱۹.۹. مقادیر ویژه ماتریس همیلتونی $Jd_{x_0}^2 H$ را $d_{x_0} X_H$ می‌نامند.

از قضیه ۹.۴ برمی‌آید که اگر برخی از نماهای مشخصه X_H در x_0 دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، آنگاه x_0 نقطه بحرانی ناپایدار معادله $x' = X_H(x)$ است. از آنجایی که ماتریس $d_{x_0} X_H$ همیلتونی است، از قضیه ۱۳.۹ چنین برمی‌آید که شرط لازم برای پایداری یک تعادل x_0 این است که همه نماهای مشخصه X_H در x_0 کاملاً موهومی باشند، مثلاً برابر با $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$ باشند. اکنون یک شرط کافی برای پایداری ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲۰.۹. فرض کنید x_0 تعادل H با نماهای مشخصه

$$\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n,$$

باشد. اگر $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$ ناصفر و دو به دو متمایز باشند، آنگاه x_0 یک نقطه بحرانی پایدار اما نه مجانبی پایدار معادله $x' = X_H(x)$ است.

برهان. بدون کاستن کلیت فرض می‌کنیم که

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0. \quad (12.9)$$

حال فرض کنید

$$w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n \in \mathbb{C}^{2n} \setminus \{0\},$$

بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه $i\lambda_1, \dots, i\lambda_n, -i\lambda_1, \dots, -i\lambda_n$ از ماتریس $B = Jd_{x_0}^2 H$ باشند.

می‌نویسیم

$$u_j = \operatorname{Re} w_j, \quad v_j = \operatorname{Im} w_j.$$

می‌توان به راحتی بررسی کرد که $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ یک پایه برای \mathbb{R}^{2n} است و از رابطه $Bw_j = i\lambda_j w_j$ نتیجه می‌شود که برای $j = 1, \dots, n$ داریم

$$Bu_j = -\lambda_j v_j, Bv_j = \lambda_j u_j \quad (13.9)$$

(زیرا B حقیقی است). بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که

$$u_j^* J v_j = 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (14.9)$$

اکنون تبدیل دوخطی $\langle u, v \rangle = u^* J v$ را در $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n}$ در نظر بگیرید. برای $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ داریم

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle^* = v^* J^* u = -v^* J u = -\langle v, u \rangle. \quad (15.9)$$

به طور خاص، با گرفتن $u = v$ ، به دست می‌آوریم

$$\langle u_j, u_j \rangle = \langle v_j, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (16.9)$$

علاوه بر این، از (14.9) و (15.9) نتیجه می‌شود

$$\langle u_j, v_j \rangle = -\langle v_j, u_j \rangle = 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (17.9)$$

همچنین، داریم

$$\langle Bw_j, w_k \rangle = i\lambda_j \langle w_j, w_k \rangle, \quad (18.9)$$

و با استفاده از (11.9)، رابطه

$$\langle Bw_j, w_k \rangle = w_j^* B^* J w_k = -w_j^* J B w_k = -i\lambda_k \langle w_j, w_k \rangle, \quad (19.9)$$

را به دست می‌آوریم.

بدین ترتیب،

$$i(\lambda_j + \lambda_k) \langle w_j, w_k \rangle = 0,$$

و از $0 < \lambda_j + \lambda_k$ نتیجه می‌گیریم

$$\langle w_j, w_k \rangle = 0, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

با جایگزینی $w_j = u_j + iv_j$ و $w_k = u_k + iv_k$ رابطه

$$\langle u_j, u_k \rangle + i \langle u_j, v_k \rangle + i \langle v_j, u_k \rangle - \langle v_j, v_k \rangle = 0, \quad (20.9)$$

به دست می‌آید.

مانند (۱۸.۹) و (۱۹.۹) با جایگزینی w_j به جای \bar{w}_j ،

$$i(-\lambda_j + \lambda_k) \langle \bar{w}_j, w_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

به دست می‌آید. بنابراین، از (۱۲.۹) نتیجه می‌شود که برای $j \neq k$ ، $\langle \bar{w}_j, w_k \rangle = 0$ و از این رو، برای $j \neq k$ ،

$$\langle u_j, u_k \rangle + i \langle u_j, v_k \rangle - i \langle v_j, u_k \rangle + \langle v_j, v_k \rangle = 0. \quad (21.9)$$

با اضافه و کم کردن (۲۰.۹) و (۲۱.۹)، تساوی‌های

$$\langle u_j, u_k \rangle + i \langle u_j, v_k \rangle = 0,$$

و

$$i \langle v_j, u_k \rangle - \langle v_j, v_k \rangle = 0,$$

برای $j \neq k$ به دست می‌آید. با برداشتن قسمت‌های حقیقی و موهومی، در نهایت برای $j \neq k$ ، رابطه

$$\langle u_j, u_k \rangle = \langle u_j, v_k \rangle = \langle v_j, u_k \rangle = \langle v_j, v_k \rangle = 0, \quad (22.9)$$

به دست می‌آید.

از تساوی‌های (۱۶.۹)، (۱۷.۹) و (۲۲.۹) نتیجه می‌شود که ماتریس C با ستون‌های u_1, \dots, u_n

در v_1, \dots, v_n

$$C^*JC = J,$$

صدق می‌کند. به عبارت دیگر، C یک ماتریس متعارف است. علاوه بر این، از رابطه (۱۳.۹)، داریم

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} & \lambda_1 & \\ -\lambda_1 & & \lambda_n \\ & -\lambda_n & \end{pmatrix},$$

و بنابراین،

$$C^*JBC = JC^{-1}BC = - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_n & \\ & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

در نتیجه، تغییر متغیر $x - x_0 = Cy$ همیلتونی H را به توی تابع

$$\begin{aligned} y &\mapsto H(x_0) + \frac{1}{2}(Cy)^* d_{x_0}^2 H C y + o(\|y\|^2) \\ &= H(x_0) - \frac{1}{2}y^* C^* J B C y + o(\|y\|^2) \\ &= H(x_0) - \frac{1}{2}y^* J C^{-1} B C y + o(\|y\|^2) \\ &= H(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j (\bar{q}_j^2 + \bar{p}_j^2) + o(\|y\|^2), \end{aligned}$$

که $y = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ تبدیل می‌کند. اکنون می‌توان نتیجه مطلوب را مانند اثبات قضیه ۱۷.۹

□

به دست آورد.

۴.۹ انتگرال‌پذیری و مختصات زاویه-کنش

جواب‌های یک دستگاه همیلتونی به‌ندرت می‌تواند به‌طور صریح به‌دست آید. در این بخش، کلاسی از همیلتونی‌ها را در نظر می‌گیریم که این امکان برای آنها وجود دارد. فرض کنید $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ یک همیلتونی از کلاس C^2 باشد.

تعریف ۲۱.۹. اگر یک تبدیل متعارف به‌توی متغیرهای $(\theta, I) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که همیلتونی H را بتوان به شکل $H(q, p) = h(I)$ نوشت، آنگاه متغیرهای (θ, I) ، مختصات زاویه-کنش نامیده می‌شوند.

در مختصات زاویه-کنش، دستگاه همیلتونی را می‌توان به شکل

$$\theta' = w(I), \quad I' = 0,$$

نوشت که $w(I) = \nabla h(I)$. از این‌رو، جواب‌ها به‌طور صریح توسط

$$\theta(t) = \theta_0 + tw(I_0), \quad I(t) = I_0,$$

داده می‌شود که $\theta_0 = \theta(0)$ و $I_0 = I(0)$.

مثال ۲۲.۹. همیلتونی

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j (q_j^2 + p_j^2), \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (23.9)$$

را در نظر بگیرید. می‌توان با اعمال تبدیل

$$q_j = \sqrt{2I_j} \cos \theta_j, \quad p_j = -\sqrt{2I_j} \sin \theta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

به مختصات زاویه-کنش انتقال یافت. در مثال ۵.۹، این تبدیل متعارف است، زیرا مشتق $(\theta_j, I_j) \mapsto (q_j, p_j)$ دارای دترمینان ۱ برای $j = 1, \dots, n$ است. در مختصات جدید (θ, I) همیلتونی $\tilde{H}(\theta, I) = H(q, p)$

توسط

$$\tilde{H}(\theta, I) = \sum_{j=1}^n \lambda_j I_j,$$

داده می‌شود. دستگاه همیلتونی متناظر، به صورت

$$I'_j = 0, \quad \theta'_j = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

است.

به طور کلی، یک همیلتونی را نمی‌توان در مختصات زاویه-کنش نوشت. با این حال، دسته‌ای از همیلتونی‌ها وجود دارند که به آنها کاملاً انتگرال‌پذیر (یا انتگرال‌پذیر به معنای لیوویل) می‌گویند، که به صورت موضعی برای آنها مختصات زاویه-کنش وجود دارد. به طور دقیق‌تر، برای یک همیلتونی $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ توضیح می‌دهیم که چگونه وجود n انتگرال F_1, \dots, F_n که ویژگی‌های خاصی را در یک مجموعه $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ برآورده می‌کنند، نتایج مهمی در مورد وجود مختصات زاویه-کنش موضعی دارند و ساختار جواب‌ها در هر مجموعه تراز به صورت

$$M_c = \{x \in U : F_j(x) = c_j, j = 1, \dots, n\}, \quad (24.9)$$

است که $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. ابتدا چند مفهوم را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۹. برای n تابع دیفرانسیل‌پذیر داده شده $F_1, \dots, F_n : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ می‌گوییم آنها

(الف) در $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ مستقل هستند هرگاه $\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_n(x)$ برای هر $x \in U$ به صورت خطی مستقل باشند.

(ب) در $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ بازگشتی هستند هرگاه در U برای هر $i, j = 1, \dots, n$ داشته باشیم $\{F_i, F_j\} = 0$.

همچنین، مفهوم یکپارچگی کامل را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۴.۹. همیلتونی H کاملاً انتگرال‌پذیر (یا انتگرال‌پذیر به معنای لیوویل) در یک مجموعه $U \subset \mathbb{R}^{2n}$

است هرگاه n انتگرال F_1, \dots, F_n از معادله (۶.۹) وجود داشته باشد که مستقل بوده و در یک مجموعه U

بازگشتی باشد.

مثال ۲۵.۹. (ادامه مثال ۲۲.۹). همیلتونی H در (۲۳.۹) را در نظر بگیرید. به راحتی می توان بررسی کرد که توابع

$$H_j(q, p) = \lambda_j(q_j^2 + p_j^2)/2$$

برای $j = 1, \dots, n$ انتگرال، مستقل، و در \mathbb{R}^{2n} بازگشتی هستند. از این رو، همیلتونی H کاملاً انتگرال پذیر است.

مثال ۲۶.۹. (ادامه مثال ۳.۹). همیلتونی H در (۴.۹) و تکانه زاویه ای

$$L(q, p) = q_1 p_2 - q_2 p_1, \quad (25.9)$$

را در نظر بگیرید. به راحتی می توان بررسی کرد که L یک انتگرال است. در واقع، از (۵.۹) چنین استنباط می شود که اگر $x(t) = (q(t), p(t))$ یک جواب باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(x(t)) &= q_1' p_2 + q_1 p_2' - q_2' p_1 - q_2 p_1' \\ &= p_1 p_2 - q_1 \frac{\mu q_2}{\|q\|^3} - p_2 p_1 + q_2 \frac{\mu q_1}{\|q\|^3} = 0. \end{aligned}$$

علاوه بر این، انتگرال های H و L خارج از مبدأ مستقل هستند و $\{H, L\} = 0$. برای ویژگی اول، مشاهده می کنیم که

$$\nabla H = \left(p, \frac{\mu q_1}{\|q\|^3} \right), \quad \nabla L = (p_2, -p_1, -q_2, q_1).$$

از این رو، $\nabla H \cdot \nabla L = 0$ و ∇L خارج از مبدأ به صورت خطی مستقل هستند. برای خاصیت دوم، توجه می کنیم که

$$\begin{aligned} \{H, L\} &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial L}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial L}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial L}{\partial q_2} \\ &= \frac{\mu q_1}{\|q\|^3} (-q_2) + \frac{\mu q_2}{\|q\|^3} q_1 - p_1 p_2 - p_2 (-p_1) = 0. \end{aligned}$$

از این رو، همیلتونی در (۴.۹) خارج از مبدأ کاملاً انتگرال پذیر است.

اکنون نتیجه مهم زیر را بدون اثبات فرمول‌بندی می‌کنیم (برای جزئیات، برای مثال، [۱۹] را ببینید). چنبره n -بعدی را با $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۷.۹. (لیوویل-آرنولد). برای یک همیلتونی H که در یک مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ کاملاً انتگرال‌پذیر است، فرض کنید $F_1, \dots, F_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال‌های معادله (۶.۹) باشند که مستقل و در U بازگشتی هستند. در این صورت

(الف) هر مجموعه M_c در (۲۴.۹) یک خمینه n -بعدی است که تحت جواب‌های معادلات $x' = X_{F_i}(x)$ برای $i = 1, \dots, n$ ناورد است.

(ب) اگر همه جواب‌های این معادلات در M_c دارای بازه حداکثر \mathbb{R} باشند، آنگاه هر مؤلفه همبند از M_c برای بعضی از $0 \leq k \leq n$ دیفیومورفیک با $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ است و مختصات زاویه-کنش در یک همسایگی از M_c وجود دارد؛ علاوه بر این، جواب‌های معادله $x' = X_H(x)$ در M_c مسیرهای

$$t \mapsto (\varphi_0 + tw \bmod 1, y_0 + t\nu),$$

را در $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ القا می‌کنند که $w = w(c) \in \mathbb{R}^k$ و $\nu = \nu(c) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

ابتدا مثالی در \mathbb{R}^2 در نظر می‌گیریم.

مثال ۲۸.۹. همیلتونی H در (۲.۹) در یک همسایگی از هر نقطه $(q_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ کاملاً انتگرال‌پذیر است که q_0 یک مینیمم موضعی اکید از U است. علاوه بر این، با لم مورس (قضیه ۱۶.۹)، در حد تغییر متغیر در یک همسایگی $(q_0, 0)$ مجموعه‌های تراز M_c در (۲۴.۹) دایره هستند. این به دلیل گرفتن $n = k = 1$ در قضیه ۲۷.۹ است، که در این صورت مجموعه‌های M_c با چنبره $\mathbb{T}^1 = S^1$ دیفیومورفیک می‌شوند.

اکنون مثالی ارائه می‌کنیم که پیچیدگی‌هایی را که می‌تواند در تجزیه به مجموعه‌های تراز در قضیه ۲۷.۹ رخ دهد، نشان می‌دهد. جزئیات خارج از محدوده کتاب است، و بنابراین ما تا حدی آنها را حذف می‌کنیم.

مثال ۲۹.۹. (ادامه مثال ۲۶.۹). همیلتونی H را در (۴.۹) و تکانه زاویه‌ای L در (۲۵.۹) را در نظر بگیرید. با تبدیل متعارف

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{q_2}{q_1}, \quad p_r = \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad p_\theta = q_1 p_2 - q_2 p_1,$$

می‌توان نوشت

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}, \quad L = p_\theta.$$

اکنون دستگاه همیلتونی را می‌توان به صورت

$$r' = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \theta' = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad p_r' = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad p_\theta' = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

نوشت. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} r' = p_r, \\ \theta' = p_\theta / r^2 \\ p_r' = -p_\theta^2 / r^3 + \mu / r^2, \\ p_\theta' = 0. \end{cases}$$

برای انتگرال‌های $F_1 = H$ و $F_2 = L$ مجموعه‌های تراز

$$\begin{aligned} M_c &= \{(r, \theta, p_r, p_\theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2 : H(r, p_r, p_\theta) = a, p_\theta = b\} \\ &= \left\{ (r, \theta, p_r, b) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} = a \right\}, \end{aligned}$$

به دست می‌آید که $c = (a, b)$. از آنجایی که $p_r^2 + b^2/r^2 \geq 0$ ، ناحیه با متغیرهای (r, θ) که در آن جواب موجود است به صورت

$$R_a = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : \frac{\mu}{r} \geq -a\},$$

داده می‌شود. با استفاده از نماد $A \approx B$ برای نشان دادن وجود دیفیومورفیسم بین A و B ، می‌توان نشان داد که

$$R_a \approx (-\mu/a, +\infty) \times S^1, \quad a > 0 \quad \text{و} \quad R_a = \emptyset, \quad a \leq 0 \quad \text{برای} \quad \mu < 0 \quad \text{اگر} \quad \mu < 0 \quad \text{اگر} \quad \mu < 0 \quad \text{اگر} \quad \mu < 0$$

$$R_a \approx \mathbb{R}^+ \times S^1, \quad a \geq 0 \quad \text{و} \quad R_a = \emptyset, \quad a < 0 \quad \text{برای} \quad \mu = 0 \quad \text{اگر} \quad \mu = 0$$

(ج) اگر $\mu > 0$ ، آنگاه برای $a \geq 0$ ، $R_a \approx \mathbb{R}^+ \times S^1$ و برای $a < 0$ ، $R_a \approx (0, -\mu/a) \times S^1$. اکنون

$$S_a = \bigcup_{(r, \theta) \in \mathbb{R}_a} I_a(r, \theta),$$

را تعریف می‌کنیم که

$$I_a(r, \theta) = \left\{ (r, \theta, p_r, p_\theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2 : p_r^2 + p_\theta^2 / r^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + a \right) \right\}.$$

مجموعه $I_a(r, \theta)$ یک بیضی، یک نقطه یا مجموعه تهی است، اگر (r, θ) در درون، در مرز یا در بیرون R_a باشد. می‌توان نشان داد که:

(الف) اگر $\mu > 0$ ، آنگاه برای $a < 0$ ، $S_a \approx S^3 \setminus S^1$ و برای $a \geq 0$ ، $S_a \approx S^3 \setminus (S^1 \cup S^1)$ ؛

(ب) اگر $\mu = 0$ ، آنگاه برای $a < 0$ ، $S_a = \emptyset$ و برای $a \geq 0$ ، $S_a \approx S^3 \setminus (S^1 \cup S^1)$ ؛

(ج) اگر $\mu < 0$ ، آنگاه برای $a \leq 0$ ، $S_a = \emptyset$ و برای $a > 0$ ، $S_a \approx S^3 \setminus S^1$.

با در نظر گرفتن

$$M_c = S_a \cap (\mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R} \times \{b\}),$$

می‌توان مجموعه‌های تراز را تا حد یک دیفیومورفیسم توصیف کرد.

یک مورد خاص جالب از قضیه لیوویل-آرنولد (قضیه ۲۷.۹) زمانی رخ می‌دهد که مجموعه‌های تراز M_c فشرده باشند. در این مورد، هر مؤلفه همبند M_c دیفیومورفیک با چنبره \mathbb{T}^n است (زیرا \mathbb{R}^m فشرده نیست). علاوه بر این، لازم نیست همانند قضیه ۲۷.۹ فرض کنیم که جواب معادلات $x' = X_{F_i}(x)$ دارای بازه ماکسیمم \mathbb{R} است، زیرا این ویژگی به‌طور خودکار برآورده می‌شود. در این زمینه مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳۰.۹. مسیرها در یک چنبره \mathbb{T}^n دیفیومورفیک با یک سطح تراز M_c که با

$$t \mapsto (\alpha_1 + tw_1, \dots, \alpha_n + tw_n) \bmod 1, \quad (26.9)$$

داده می‌شود، مسیرهای شبه تناوبی با بردار فرکانس $w = (w_1, \dots, w_n)$ نامیده می‌شوند. بردار w غیررزونانسی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ، $\langle k, w \rangle \neq 0$.

نتیجه زیر به راحتی حاصل می‌شود.

قضیه ۳۱.۹. فرض کنید H یک همیلتونی کاملاً انتگرال‌پذیر باشد. برای هر سطح تراز M_C دیفیومورفیک با یک چنبره \mathbb{T}^n ، اگر w غیر رزونانس باشد، آنگاه هر مسیر در (۲۶.۹) در چنبره چگال است.

۵.۹ قضیه KAM

اگرچه دستگاه‌های همیلتونی کاملاً انتگرال‌پذیر نسبتاً نادر هستند، هنوز هم نمونه‌های بسیاری از دستگاه‌های همیلتونی وجود دارد که با اختلالات کوچک همیلتونی‌ها به شکل $h(I)$ و با استفاده از مختصات زاویه-کنش به دست می‌آیند. یک مثال عینی با حرکت سیارات در منظومه شمسی ارائه می‌شود که بدون در نظر گرفتن تعامل بین سیارات (و فقط بین خورشید و هر سیاره) به مسئله حرکت نزدیک است. این دستگاه آخر، کاملاً انتگرال‌پذیر است، زیرا از چندین مسئله دو-جسم تشکیل شده است (به مثال‌های ۳.۹ و ۲۶.۹ مراجعه کنید).

در این کتاب طبیعی است که مفهوم زیر را معرفی کنیم. به یاد می‌آوریم که برای تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اگر یک ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، آنگاه می‌نویسیم $g(\epsilon) = O(\epsilon)$.

تعریف ۳۲.۹. یک خانواده پارامتری از همیلتونی‌های $H_\epsilon = H_\epsilon(\theta, I)$ با $(\theta, I) \in \mathbb{T}^n \times G$ برای بعضی $G \subset \mathbb{R}^n$ ، تقریباً انتگرال‌پذیر گفته می‌شود که اگر برای هر $\epsilon \in \mathbb{R}$ در یک همسایگی از صفر به شکل

$$H_\epsilon(\theta, I) = h(I) + f_\epsilon(\theta, I), \quad f_\epsilon(\theta, I) = O(\epsilon), \quad (27.9)$$

باشد.

فرض کنید H_ϵ یک خانواده تقریباً انتگرال‌پذیر از همیلتونی‌ها باشد. دستگاه همیلتونی تعریف شده توسط H_ϵ

به صورت

$$\theta' = w(I) + \frac{\partial f_\epsilon}{\partial I}(\theta, I), \quad I' = -\frac{\partial f_\epsilon}{\partial \theta}(\theta, I),$$

است که $w(I) = \nabla h(I)$ برای $\epsilon = 0$ همه چنبره‌های n -بعدی $\mathbb{T}_I = \mathbb{T}^n \times \{I\}$ با $I \in G$ ناوردا هستند. حال ما فرض می‌کنیم که برای $I \in G$

$$\det d_I^2 h \neq 0. \quad (28.9)$$

این شرط تضمین می‌کند که تبدیل $I \mapsto w(I)$ یک دیفیومورفیسم موضعی است و از این رو، همه چنبره‌های \mathbb{T}_I را می‌توان با مؤلفه‌های بردار $w(I)$ (به صورت موضعی) پارامتری کرد. نتیجه اساسی زیر را داریم (برای جزئیات، برای مثال، [۲۲] را ببینید).

قضیه ۳۳.۹. (قضیه KAM). فرض کنید H_ϵ یک همیلتونی تحلیلی در $\mathbb{T}_I \times G$ صادق در (۲۷.۹) و (۲۸.۹) باشد. برای $\tau > n - 1$ و $\gamma > 0$ ، $\epsilon_0 = O(\gamma^2)$ وجود دارد به طوری که اگر $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ ، آنگاه برای هر چنبره $\mathbb{T}_I = \mathbb{T}^n \times \{I\}$ با

$$|\langle k, w(I) \rangle| \geq \frac{\gamma}{\|k\|^\tau}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

یک چنبره ناوردا \mathbb{T}_I^ϵ از همیلتونی H_ϵ ، با همان بردار فرکانس $w(I)$ وجود داشته باشد، به طوری که حداکثر فاصله \mathbb{T}_I^ϵ از \mathbb{T}_I برابر $O(\epsilon/\gamma)$ باشد. علاوه بر این، حجم مکمل در $\mathbb{T}^n \times G$ از مجموعه‌های تحت پوشش چنبره‌ها \mathbb{T}_I^ϵ برابر $O(\gamma)$ است.

قضیه ۳۳.۹ می‌گوید که تحت شرایط ناتبه‌گونی در (۲۸.۹)، اگر ϵ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه بسیاری از چنبره‌های ناوردا n -بعدی در حد یک تغییر شکل کوچک در دستگاه اختلال یافته حفظ می‌شوند. برای $n = 2$ می‌توان از قضیه ۳۳.۹ نتیجه گرفت که دستگاه اختلال یافته دارای مسیرهای کران‌دار است، زیرا چنبره‌ها (که در این مورد خم‌های بسته هستند) فضای فاز را جدا می‌کنند (توسط قضیه خم جردن). برای $n \geq 3$ ، در حالت کلی این ویژگی ممکن است برقرار نباشد.

تمرین‌ها

تمرین ۱.۹. نشان دهید که یک تبدیل دیفرانسیل پذیر φ متعارف است اگر و فقط اگر برای توابع دیفرانسیل پذیر F و G ،

$$\{F \circ \varphi, G \circ \varphi\} = \{F, G\} \circ \varphi.$$

تمرین ۲.۹. برای شار φ_t تعریف شده توسط یک دستگاه همیلتونی، از فرمول لیوویل (قضیه ۱۰.۲) استفاده کنید تا نشان دهید که $\det d_x \varphi_t = 1$

تمرین ۳.۹. نشان دهید

(الف) اگر B یک ماتریس همیلتونی باشد، آنگاه $\operatorname{tr} B = 0$ ؛

(ب) اگر A یک ماتریس متعارف باشد، آنگاه $\det A = 1$ ؛

(ج) برای $n = 1$ ، B یک ماتریس همیلتونی است اگر و تنها اگر $\operatorname{tr} B = 0$ ؛

(د) برای $n = 1$ ، A یک ماتریس متعارف است اگر و تنها اگر $\det A = 1$.

تمرین ۴.۹. بررسی کنید که معادله $x'' + \sin x = 0$ یک دستگاه همیلتونی با یک درجه آزادی است.

تمرین ۵.۹. فرض کنید $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ یک همیلتونی از کلاس C^2 باشد به طوری که دستگاه همیلتونی متناظر یک شار φ_t در \mathbb{R}^{2n} تعریف کند. نشان دهید که

(الف) H در طول جواب‌ها ثابت می‌ماند.

(ب) φ_t حجم را در \mathbb{R}^{2n} حفظ می‌کند، یعنی $\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A)$ که در آن $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ مجموعه باز،

$t \in \mathbb{R}$ و μ حجم را در \mathbb{R}^{2n} نشان می‌دهد.

(ج) نقاط بحرانی پایدار مجانبی یا جواب‌های تناوبی پایدار مجانبی وجود ندارند.

تمرین ۶.۹. برای یک تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 ، فرض کنید که معادله $x' = f(x)$ یک شار φ_t

حافظ حجم در \mathbb{R}^n تعریف می‌کند و یک مجموعه کراندار $A \subset \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ،

$$\varphi_t(A) = A$$

(الف) برای مجموعه باز ناتهی داده شده $U \subset A$ ، نشان دهید که همه مجموعه‌های

$$\varphi_1(U), \varphi_2(U), \varphi_3(U), \dots,$$

جفت جفت مجزا نیستند.

(ب) نشان دهید که برای هر مجموعه باز ناتهی $U \subset A$ ، یک $x \in U$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi_{2n}(x) \in U$$

کتاب نامه

- [1] Abraham R., Marsden J. (1978). *Foundations of Mechanics*. Benjamin/Cummings.
- [2] Amann H. (1990). *Ordinary Differential Equations*. Walter de Gruyter.
- [3] Arnold V. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer.
- [4] Arnold V. (1992). *Ordinary Differential Equations*. Springer.
- [5] Bhatia R. (1997). *Matrix Analysis*. Springer.
- [6] Carr J. (1981). *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer.
- [7] Chicone C. (1999). *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer.
- [8] Chow S. N., Hale J. (1982). *Methods of Bifurcation Theory*. Springer.
- [9] Coddington E., Levinson N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw- Hill.
- [10] Dieck T. (2008). *Algebraic Topology*. European Mathematical Society.
- [11] Dubrovin B., Fomenko A., Novikov S. (1985). *Modern Geometry – Methods and Applications: The Geometry and Topology of Manifolds*. Springer.
- [12] Guckenheimer J., Holmes P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer.
- [13] Hale J. (1980). *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger.
- [14] Hale J., Kogak H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer.
- [15] Hartman P. (2002). *Ordinary Differential Equations*. SIAM.
- [16] Higham N. (2008). *Functions of Matrices: Theory and Computation*. SIAM.

-
- [17] Hirsch M., Smale S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press.
- [18] Irwin M. (1980). *Smooth Dynamical Systems*, Academic Press.
- [19] Katok A., Hasselblatt B. (1995). *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press.
- [20] La Salle J., Lefschetz S. (1961). *Stability by Liapunov's Direct Method, With Applications*, Academic Press.
- [21] Milnor J. (1963). *Morse Theory*, Princeton University Press.
- [22] Moser J. (1973). *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press.
- [23] Palis J., de Melo W. (1982). *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer.
- [24] Sanchez D. (1968). *Ordinary Differential Equations and Stability Theory*, Dover.
- [25] Verhulst F. (1996). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

action-angle coordinate	مختصات زاویه - کنش
almost-integrable	تقریباً انتگرال‌پذیر
Arzela-Ascoli theorem	قضیه آرزلا-آسکولی
asymptotically stable	پایدار مجانبی
attracting point	نقطه جاذب
autonomous	خودگردان

B

bifurcation theory	نظریه انشعاب
flow box theorem	قضیه جعبه شار
Brouwer fixed-point theorem	قضیه نقطه ثابت برآور

C

canonical matrix	ماتریس متعارف
canonical transformation	تبدیل متعارف
center manifold theorem	قضیهٔ خمینهٔ مرکزی
characteristic exponent	نمای مشخصه
characteristic multipliers	مضارب مشخصه
complete metric space	فضای متریک کامل
completely integrable	کاملاً انتگرال‌پذیر
conservative equations	معادلهٔ پایستار

D

degrees of freedom	درجهٔ آزادی
differentially conjugate	مزدوج دیفرانسیلی

E

equilibrium	تعادل
exponential of a matrix	نمای یک ماتریس

F

fiber contraction	انقباض تار
fiber contraction theorem	قضیهٔ انقباض تار

Floquet theorem. قضیه فلوکه
 frequency vector بردار فرکانس
 fundamental solutions جواب‌های اساسی

G

global solution. جواب سراسری
 Grobman-Hartman theorem. قضیه گروپمن-هارتمن
 Gronwall's lemma لم گرونوال
 fundamental theorem of algebra قضیه اساسی جبر

H

Hadamard-Perron theorem. قضیه هادامارد-پرون
 Hamiltonian systems دستگاه‌های همیلتونی
 heteroclinic هتروکلینیک
 homoclinic هموکلینیک
 homological equations معادلات همسانی
 homotopic paths مسیرهای هموتوپیک
 Hopf bifurcation انشعاب هاف

I

index	شاخص
index theory	نظریه شاخص
invariance of domain theorem	قضیه دامنه ناوردایی
invariant manifolds	خمینه‌های ناوردا
involution	بازگشتی
isolated critical point	نقطه بحرانی تنها

J

Jordan's curve theorem	قضیه خم جردن
------------------------	--------------

K

KAM theorem	قضیه KAM
-------------	----------

L

line integral	انتگرال خطی
linear variational equation	معادله وردشی خطی
linearly conjugate	مزدوج خطی
Liouville–Arnold theorem	قضیه لیوویل–آرنولد
Liouville's formula	فرمول لیوویل
locally Lipschitz	به‌طور موضعی لپشیتز

M

monodromy matrix ماتریس مداری

Morse's lemma لم مورس

N

nondegenerate ناتباهیده

nonresonant vector بردار غیررزونانسی

normal form صورت نرمال

P

Peano theorem قضیه پئانو

periodic تناوبی

perturbations اختلالات

phase portrait تصویر فاز

Picard-Lindelof theorem قضیه پیکارد-لیندلف

pitchfork bifurcation انشعاب چنگال

Poincare-Bendixon theorem قضیه پوانکاره-بندیکسون

Poisson bracket براکت پواسون

Q

quasi-periodic trajectories مسیره‌های شبه تناوبی

R

regular path مسیر هموار

resonant vector بردار تشدید

S

saddle-node bifurcation انشعاب گره-زینی

saddle point نقطه زینی

semiorbit نیم مدار

singular تکین

stable focus کانون پایدار

stable node گره پایدار

stable space فضای پایدار

T

topologically conjugate مزدوج توپولوژیکی

transcritical bifurcation انشعاب فرابحرانی

transverse قاطع

U

unstable focus کانون ناپایدار

unstable node گره ناپایدار

unstable space فضای ناپایدار

V

variation of parameters formula فرمول تغییر پارامترها

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

line integral	انتگرال خطی
perturbations	اختلالات
pitchfork bifurcation	انشعاب چنگال
saddle-node bifurcation	انشعاب گره-زینی
transcritical bifurcation	انشعاب فرابحرانی
Hopf bifurcation	انشعاب هاف
fiber contraction	انقباض تار

ب

involution	بازگشتی
Poisson bracket	براکت پواسون
resonant vector	بردار تشدید
frequency vector	بردار فرکانس
nonresonant vector	بردار غیررزونانسی
locally Lipschitz	به‌طور موضعی لیشیتز

ت

canonical transformation تبدیل متعارف

phase portrait تصویر فاز

equilibrium تعادل

almost-integrable تقریباً انتگرال پذیر

singular تکین

periodic تناوبی

پ

asymptotically stable پایدار مجانبی

ج

global solution جواب سراسری

fundamental solutions جواب‌های اساسی

خ

invariant manifolds خمینه‌های ناوردا

autonomous خودگردان

د

degrees of freedom درجه آزادی

Hamiltonian systems دستگاه‌های همیلتونی

ش

index شاخص

ص

normal form صورت نرمال

ف

variation of parameters formula	فرمول تغییر پارامترها
Liouville's formula	فرمول لیوویل
stable space	فضای پایدار
complete metric space	فضای متریک کامل
unstable space	فضای ناپایدار

ق

transverse	قاطع
Arzela-Ascoli theorem	قضیه آرزلا-آسکولی
fundamental theorem of algebra	قضیه اساسی جبر
fiber contraction theorem	قضیه انقباض تار
Peano theorem	قضیه پیانو
Poincare-Bendixon theorem	قضیه پوانکاره-بندیکسون
Picard-Lindelof theorem	قضیه پیکارد-لیندلف
flow box theorem	قضیه جعبه شار
Jordan's curve theorem	قضیه خم جردن
center manifold theorem	قضیه خمینه مرکزی
invariance of domain theorem	قضیه دامنه ناوردایی
Floquet theorem	قضیه فلوکه
Grobman-Hartman theorem	قضیه گروپمن-هارتمن
Liouville-Arnold theorem	قضیه لیوویل-آرنولد
Brouwer fixed-point theorem	قضیه نقطه ثابت برآور

Hadamard-Perron theorem	قضیه هادامارد-پرون
KAM theorem	قضیه KAM
	ک
stable focus	کانون پایدار
unstable focus	کانون ناپایدار
completely integrable	کاملاً انتگرال پذیر
	گ
stable node	گره پایدار
unstable node	گره ناپایدار
	ل
Gronwall's lemma	لم گرونوال
Morse's lemma	لم مورس
	م
canonical matrix	ماتریس متعارف
monodromy matrix	ماتریس مداری
action-angle coordinate	مختصات زاویه - کنش
topologically conjugate	مزدوج توپولوژیکی
differentially conjugate	مزدوج دیفرانسیلی
linearly conjugate	مزدوج خطی
regular path	مزدوج خطی مسیر هموار
quasi-periodic trajectories	مسیرهای شبه تناوبی
homotopic paths	مسیرهای هموتوپیک

characteristic multipliers..... مضارب مشخصه
 homological equations..... معادلات همسانی
 conservative equations..... معادله پایستار
 linear variational equation..... معادله وردشی خطی

ن

nondegenerate..... ناتباهیده
 bifurcation theory..... نظریه انشعاب
 index theory..... نظریه شاخص
 isolated critical point..... نقطه بحرانی تنها
 attracting point..... نقطه جاذب
 saddle point..... نقطه زینی
 characteristic exponent..... نمای مشخصه
 exponential of a matrix..... نمای یک ماتریس
 semiorbit..... نیم‌مدار

ه

heteroclinic..... هتروکلینیک
 homoclinic..... هموکلینیک

نمایه

انتگرال خطی، ۲۳۲	α -مجموعه حدی، ۲۵۱
انتگرال پذیری، ۳۱۶	ω -مجموعه حدی، ۲۵۱
انشعاب فرابحرانی، ۲۷۳	- قضیه
انشعاب هاف، ۲۷۵	فلوکه، ۱۰۸
انشعاب چنگال، ۲۷۵	انشعاب
انشعاب گره-زینی، ۲۷۳	نظریه، ۲۶۹
انقباض، ۱۶، ۲۱	هاف-، ۲۷۵
تار-، ۲۴	چنگال-، ۲۷۵
اولیه	گره-زینی-، ۲۷۳
شرط، ۶	فرابحرانی-، ۲۷۳
مسئله با مقدار اولیه، ۲، ۷	اساسی
بازه ماکسیمال، ۴۰، ۴۱	جواب، ۸۳
براکت پواسون، ۳۰۷	قضیه جبر، ۲۴۲
بردار	انتگرال، ۵۸
تشدید-، ۲۹۳	انتگرال اول، ۵۸
غیررزونانسی-، ۳۲۱	

تبادل ناتباهیده، ۳۱۰	فرکانس-، ۳۲۱
تقریباً- انتگرال پذیر همیلتونی، ۳۲۲	میدان، ۷۰
تناوبی	بردار تشدید، ۲۹۳
تابع، ۱۰۷	بردار فرکانس، ۳۲۱
مدار، ۵۱	بسته
توابع	مسیر، ۲۳۱
بازگشتی، ۳۱۷	گوی، ۱۷
مستقل-، ۳۱۷	به طور مجانبی پایدار
توابع مستقل، ۳۱۷	جواب، ۱۴۵
جواب، ۳، ۴، ۷۱	تابع
سراسری، ۵۱	به طور موضعی لیپشیتز-، ۱۳، ۱۵۷
اساسی، ۸۳	تناوبی-، ۱۰۷
نایاپیدار-، ۱۴۳	لیاپانوف اکید-، ۱۵۸
پایدار-، ۱۴۳	لیاپانوف-، ۱۴۲، ۱۵۷، ۱۵۸
جواب سراسری، ۵۱	لیپشیتز-، ۱۲
جواب‌های	تابع به طور موضعی لیپشیتز، ۱۳، ۱۵۷
مزدوج توپولوژیکی-، ۱۲۰	تابع لیاپانوف، ۱۴۲، ۱۵۷، ۱۵۸
مزدوج خطی-، ۱۲۱	تابع لیاپانوف اکید، ۱۵۹
مزدوج دیفرانسیلی-، ۱۲۱	تابع لیپشیتز، ۱۲
خطی	تار، ۲۴
دستگاه همیلتونی، ۳۰۷	تبادل، ۳۱۰
مزدوج، ۱۲۱	ناتباهیده-، ۳۱۰

قضیه جعبه، ۴۹	معادله، ۸۰
صورت متعارف جردن، ۹۰	معادله وردشی، ۸۴
صورت نرمال، ۲۸۷	خم، ۶۹، ۲۳۲
فاز	خمینه، ۶۶
تصویر، ۴۸، ۵۲، ۹۳	خمینه
فضا، ۴۸	مرکزی-، ۲۷۸
فاصله، ۱۶	ناورد-، ۲۰۵، ۲۰۱
فرمول	ناپایدار-، ۲۷۸، ۲۰۵
تغییر پارامترها-، ۱۰۳، ۱۰۴	پایدار-، ۲۷۸، ۲۰۵
لیوویل-، ۸۷	درجه آزادی، ۳۰۲
فرمول تغییر پارامتر، ۱۰۳	دستگاه مختصات، ۶۶
فرمول لیوویل، ۸۷	دنباله
فضا، ۲۷۶	کوشی-، ۱۸
جوابها، ۸۱	همگرا-، ۱۸
متریک کامل-، ۱۹	دنباله کوشی، ۱۸، ۱۹
متریک-، ۱۶	دیفرانسیل پذیر
مرکزی-، ۲۷۶	ساختار، ۶۶
ناپایدار-، ۱۷۴، ۲۷۶	مزدوج، ۱۲۱
پایدار-، ۱۷۴، ۲۷۶	نگاشت، ۶۸
فضای متریک، ۱۶	شاخص، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۴۳
فضای متریک کامل، ۱۹	نظریه، ۲۳۱
	شار، ۹

قضية لیوویل-آرنولد، ۳۱۹	قاطع، ۲۵۷
قضية نقطه ثابت براوثر، ۲۴۱	قضية
قضية پٹانو، ۴۶	KAM، ۳۲۳، ۳۲۲
قضية پیکارد-لیندف، ۱۲	آرزلا-آسکولی، ۴۴
قضية گروېمن-هارتمن، ۱۷۶، ۱۸۷	انقباض تار، ۲۴
قضية هادامارد-پرون، ۲۰۴	جعبه شار، ۴۹
لم	خم جردن، ۲۳۷
مورس، ۳۱۰	خمینه مرکزی، ۲۷۸
گرونوال، ۲۹	دامنه ناوردابی، ۱۸۷
لم مورس، ۳۱۰	لیوویل-آرنولد، ۳۱۹
لم گرونوال، ۲۹	نقطه ثابت براوثر، ۲۴۱
مؤلفه	هادامارد-پرون، ۲۰۴
همبند، ۲۳۸	پٹانو، ۴۶
ماتریس	پوانکاره-بندیکسون، ۲۵۹، ۲۵۶
متعارف، ۳۰۷	پیکارد-لیندف، ۱۲
مداری، ۱۱۰	گروېمن-هارتمن، ۱۷۶، ۱۸۷
هذلولوی، ۱۲۴	قضية KAM، ۳۲۳، ۳۲۲
همیلتونی، ۳۰۷	قضية آرزلا-آسکولی، ۴۴
ماتریس مداری، ۱۱۰	قضية خم جردن، ۲۳۸
متعارف	قضية خمینه، ۲۷۸
تبدیل، ۳۰۴	قضية دامنه ناوردابی، ۱۸۷
ماتریس، ۳۰۸	قضية فلوکه، ۱۰۸

توپولوژیکی، ۱۲۰، ۱۲۴، ۱۷۳	مجموعه
خطی، ۱۲۱	α-حدی، ۲۵۱
دیفرانسیلی، ۱۲۱	ω-حدی، ۲۵۱
مزدوج توپولوژیکی، ۱۲۰، ۱۲۴، ۱۷۳	فشرده، ۲۷
مسیر	ناهمبند، ۲۳۸
بسته، ۲۳۲	همبند، ۲۳۸
هموار، ۲۳۲	ناوردا، ۲۵۰
مسیر هموار، ۲۳۲	مجموعه فشرده، ۲۷
مسیرهای شبه تناوبی، ۳۲۱	مجموعه ناهمبند، ۲۳۸
مسیرهای هوموتوپیک، ۲۳۵	مختصات زاویه-کش، ۳۱۶
مشخصه	مدار، ۴۹، ۲۵۰
مضارب، ۱۱۰	تناوبی، ۵۱
نما، ۱۱۰	هتروکلینیک، ۵۱
معادله	هموکلینیک، ۵۱
به طور مجانبی پایدار، ۱۴۹	مدار هتروکلینیک، ۵۱
خطی، ۸۰	مدار هموکلینیک، ۵۱
خودگردان، ۲	مرکز، ۱۰۲
غیر خودگردان، ۸۰	فضا، ۲۷۶
غیر همگن، ۱۰۴	مرکزی
ناپایدار، ۱۴۹	خمینه، ۲۷۸
همسانی، ۲۹۰	قضیه خمینه، ۲۷۸
همگن، ۱۰۴	مزدوج

فضا، ۱۷۴، ۲۷۶	وردشی خطی-، ۸۴
معادله، ۱۴۹	پایدار-، ۱۴۹
کانون، ۱۰۲	پایستار-، ۵۸
گره، ۹۴، ۹۸	معادله خودگردان، ۲
نظریه	معادله دیفرانسیل، ۲
صورت‌های نرمال، ۲۸۷	روی خمینه، ۶۶
پوانکاره- بندیکسون-، ۲۴۹	معادله غیرخودگردان، ۸۰
نقطه	معادله همسانی، ۲۹۰
بحرانی-، ۴۹	معادله همگن، ۱۰۴
ثابت-، ۲۲	معادله پایستار، ۵۸
جاذب-، ۲۳	معیار ناپایداری، ۱۶۴
نقطه بحرانی، ۴۹	مقدار بحرانی، ۶۸
تنها-، ۲۴۳	مماس
هذلولوی-، ۱۷۳، ۱۸۷	بردار، ۶۹
نقطه بحرانی تنها، ۲۴۳	فضا، ۶۹
نقطه ثابت، ۲۲	کلاف، ۶۹
نقطه جاذب، ۲۳	ناوردا
نقطه زینی، ۹۵	خمینه، ۲۰۱، ۲۰۵
نما، ۸۸	مجموعه، ۲۵۰
نمودار، ۶۶	ناپایدار
نرم، ۱۷	جواب، ۱۴۳
نیم‌مدار	خمینه، ۲۷۸

گره، ۹۴، ۹۵، ۹۹	مثبت-، ۲۵۰
پایداری، ۱۴۳، ۱۵۲	منفی-، ۲۵۰
مجانبی-، ۱۴۴	نیم‌مدار مثبت، ۲۵۰
معیار، ۱۵۹	نیم‌مدار منفی، ۲۵۰
نظریه، ۱۴۲	هذلولوی
پایداری مجانبی، ۱۴۴	ماتریس، ۱۲۴
پوانکاره- بندیکسون	نقطه بحرانی، ۱۷۳، ۱۸۷
قضیه، ۲۵۶، ۲۵۹	هذلولوی بودن، ۱۷۳
نظریه، ۲۴۹	همیلتونی، ۳۰۱
کانون	تقریباً انتگرال‌پذیر، ۳۲۲
ناپایدار-، ۱۰۲	دستگاه، ۳۰۲
پایدار-، ۱۰۲	ماتریس، ۳۲۴
گره	کاملاً انتگرال‌پذیر، ۳۱۷
ناپایدار، ۹۴، ۹۸، ۹۹	همیلتونی کاملاً انتگرال‌پذیر، ۳۱۷
پایدار، ۹۴، ۹۵، ۹۹	هوموتوپی، ۲۳۵
گوی	وجود جواب‌ها، ۲، ۴۶
بسته-، ۱۷	پایدار
باز-، ۱۷	جواب، ۱۴۳
یکتایی جواب‌ها، ۱۲	خمینه، ۲۷۸
	فضا، ۱۷۴، ۲۷۶
	معادله، ۱۴۹
	کانون، ۱۰۲

University of Guilan Press

Ordinary Differential Equations

Qualitative Theory

By:
Luis Barreira, Claudia Valls

Translated by:
Mozhgan Akbari Khoshkebijari, Ph.D
Sanaz Lamei, Ph.D