



دانشگاه گیلان
۱۳۵۳ - ۱۹۷۴

چاپ اول

جبرهای از نوع فوریه و همریختی‌های آنها

تألیف:

دکتر مرضیه شمسی یوسفی
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

محمدعلی احمدپور جاده‌کناری
دکتری ریاضی محض دانشگاه کارلتون اتاوا

مرکز نشر دانشگاه گیلان

جبرهای از نوع فوریه
و همریختی‌های آنها

تألیف:

مرضیه شمسی یوسفی

محمدعلی احمدپور جاده‌کناری

Fourier-type Algebras & Their Homomorphisms

By:

Marzieh Shamsi Yousefi, Ph.D

Mohammad Ali Ahmadpoor Jaddehkenari, Ph.D

University of Guilan Press

این کتاب در پی آن است تا خواننده را در سفری پرمایه به دنیای جبرهای فوریه همراهی کند. اثر حاضر مروری نظام‌مند بر مفاهیم اساسی مورد نیاز برای مطالعه جبرهای فوریه ارائه می‌دهد که شامل مبانی جبرهای باناخ و جبرهای عملگری، نظریه طیف و آنالیز ماتریسی، مقدمات نظریه گروه‌های توپولوژیک و جبرهای گروهی است. در این کتاب کوشیده‌ایم پیش‌نیازها را به گونه‌ای فراهم آوریم که خواننده با دانشی جامع به مطالعه جبرهای فوریه بپردازد. با توجه به پیچیدگی‌های ذاتی این شاخه از آنالیز، تأکید ویژه‌ای بر مفاهیم بنیادین داشته‌ایم. جبر فوریه از مفاهیم مهم در آنالیز هارمونیک و نظریه عملگرهاست. این شاخه از ریاضیات ارتباط عمیقی با تبدیل فوریه و فضاهای تابعی دارد و در نظریه گروه‌های موضعا فشرده و جبرهای باناخ نیز کاربرد دارد. کتاب حاضر به مطالعه تعمیم‌های این جبر به ساختارهای غیرهیلبرتی و نیم‌گروهی می‌پردازد. بخش مهمی از کتاب حاصل دستاوردهای پژوهشی مولفین است.



ISBN: 978-600-153-364-8



جبرهای از نوع فوریه و همریختی‌های آنها

تألیف:

دکتر مرضیه شمسی یوسفی

استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

محمدعلی احمدپور جاده‌کناری

دکتری ریاضی محض دانشگاه کارلتون اتاوا

مرکز نشر دانشگاه گیلان

۱۴۰۵



دانشگاه گیلان

۱۳۵۳-۱۹۷۴

شابک: ۸-۳۶۴-۱۵۳-۶۰۰-۹۷۸

سرشناسه	: شمسی یوسفی، مرضیه، ۱۳۵۹-
عنوان و نام پدیدآور	: جبرهای از نوع فوریه و همریختی‌های آنها/ تألیف مرضیه شمسی یوسفی، محمدعلی احمدپورجاده‌کناری؛ ویراستار علمی داود احمدی‌دستجردی.
مشخصات نشر	: رشت: دانشگاه گیلان، انتشارات، ۱۴۰۵.
مشخصات ظاهری	: ط، ۲۸۰ ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۱۵۳-۳۶۴-۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یادداشت	: واژه‌نامه.
یادداشت	: کتابنامه: ص. ۲۵۳ - ۲۶۰.
یادداشت	: نمایه.
موضوع	: تبدیل‌های فوریه Fourier transformations آنالیز فوریه Fourier analysis فضاهای باناخ Banach spaces فضای هیلبرت Hilbert space فضاهای برداری توپولوژی Linear topological spaces
شناسه افزوده	: احمدپور جاده‌کناری، محمدعلی، ۱۳۶۸-
شناسه افزوده	: احمدی دستجردی، داود، ۱۳۳۴ - ، ویراستار
شناسه افزوده	: دانشگاه گیلان، انتشارات
رده بندی کنگره	: QA۴۰۳
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۷۲۳
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۰۶۱۵۹۷۸

مرکز نشر دانشگاه گیلان

عنوان کتاب	: جبرهای از نوع فوریه و همریختی‌های آنها
تألیف	: دکتر مرضیه شمسی یوسفی، دکتر محمدعلی احمدپور جاده‌کناری
ویراستار علمی	: دکتر داود احمدی دستجردی
ویراستار ادبی	: دکتر کامله نصیری‌پیربازاری
نوبت چاپ	: اول، ۱۴۰۵
ناشر	: مرکز نشر دانشگاه گیلان
شمارگان	: ۱۰۰۰ جلد

* هرگونه چاپ و تکثیر صرفاً در اختیار مرکز نشر دانشگاه گیلان است.

تقدیم نگارندگان

تقدیم به روح مادرم
بانو پری صفرپور

م. شمسی یوسفی

تقدیم به پدر و مادرم

م. ع. احمدپور جاده کناری

الف

فهرست مطالب

الف	تقدیم نگارندگان
۵	پیش‌گفتار
۱	فصل ۱. دیباچه
۵	۱.۱ سیر تاریخی
۱۱	فصل ۲. مقدماتی از فضاهای باناخ
۱۱	۱.۲ فضاهای و جبرهای باناخ
۱۲	۱.۱.۲ فضاهای باناخ ویژه
۲۲	۲.۱.۲ فضاهای هیلبرت
۲۵	۳.۱.۲ L^p - فضاهای
۳۵	۴.۱.۲ QSL_p - فضاهای
۳۷	۵.۱.۲ ابر فیلترها و فضاهای ابرتوان
۴۱	۶.۱.۲ جبرهای C^* و فون نویمان
۴۶	۷.۱.۲ فضاهای عملگری
۶۶	۸.۱.۲ فضاهای p - عملگری
۷۱	۲.۲ ضربهای تانسوری
۷۲	۱.۲.۲ ضربهای تانسوری تزریقی و تصویری
۷۷	۲.۲.۲ ضرب تانسوری C^* - جبرها و جبرهای فون نویمان
۷۹	۳.۲.۲ ضرب تانسوری QSL_p - فضاهای
۸۵	۴.۲.۲ ضرب تانسوری تصویری فضاهای p - عملگری
۸۶	۳.۲ تمرین‌ها
۸۶	۱.۳.۲ جبرهای باناخ و فضای هیلبرت

۴.۲	L^p - فضاها و اندازه‌پذیری	۸۷
۵.۲	جبرهای C^* و خواص آنها	۸۷
۱.۵.۲	جبرهای فون نویمان	۸۸
۲.۵.۲	ضرب تانسوری و کاربردها	۸۸
۶.۲	تمرین‌های ترکیبی	۸۹

فصل ۳. مقدماتی از نظریه گروه‌های توپولوژیکی		
۱.۳	گروه‌های موضعاً فشرده و مثال‌هایی از آن	۹۱
۲.۳	گروه‌های محبوب فیزیک‌دانان	۹۸
۳.۳	اندازه هار و جبر گروهی	۱۰۳
۴.۳	فضاهای همگن	۱۱۲
۵.۳	نمایش‌های یکانی و توابع مثبت معین روی گروه موضعاً فشرده	۱۱۵
۶.۳	گروه‌های آبلی موضعاً فشرده	۱۱۸
۷.۳	مهار ضعیف نمایش‌ها	۱۲۶
۸.۳	نمایش‌های گروه‌ها روی فضاهای باناخ	۱۲۹
۹.۳	جبرهای از نوع فوریه	۱۳۳
۱.۹.۳	جبرهای فوریه و فوریه اشتیلیس	۱۳۳
۲.۹.۳	جبر فوریه، $A(G)$ ، فضای ایده‌آل ماکسیمال و فضای دوگان آن	۱۴۱
۳.۹.۳	معرفی فضای دوگان جبر فوریه؛ $VN(G)$	۱۴۶
۴.۹.۳	خواص افکنشی جبر فوریه اشتیلیس و جبر فوریه روی گروه موضعاً فشرده	۱۵۱
۵.۹.۳	خواص افکنشی جبر فوریه	۱۵۴
۶.۹.۳	$A(G)$ به عنوان جبر باناخ کاملاً انقباضی	۱۵۸
۷.۹.۳	p -صورت جبرهای فوریه و فوریه اشتیلیس	۱۶۱
۱۰.۳	تمرین‌ها	۱۶۹
۱.۱۰.۳	گروه‌های موضعاً فشرده و اندازه هار	۱۶۹
۲.۱۰.۳	نمایش‌های یکانی و توابع مثبت معین	۱۷۱
۳.۱۰.۳	جبرهای فوریه و فوریه اشتیلیس	۱۷۱
۴.۱۰.۳	نمایش‌های گروه‌ها روی فضاهای باناخ	۱۷۱
۵.۱۰.۳	جبرهای فون نویمان گروهی	۱۷۱
۶.۱۰.۳	تمرین‌های ترکیبی	۱۷۲

فصل ۴. ساختار p-عملگری جبر p-شبه توابع و p-صورت جبرهای فوریه اشتیلیس		
۱۷۳		

۱۷۳	۱.۴ خواص بنیادی جبرهای p -شبه توابع
۱۷۵	۲.۴ نرم ماتریسی روی جبر p -شبه توابع
۱۸۸	۳.۴ ساختار فضای p -عملگری جبر $B_p(G)$
۱۹۳	فصل ۵. همریختی‌های وزنی p -کاملاً کراندار روی p -صورت جبرهای فوریه‌اشتیلیس
۱۹۴	۱.۵ قضیه خودتوان
۱۹۶	۲.۵ p -صورت فضاهای π -فوریه
۲۰۵	۳.۵ قضیه گسترش
۲۱۳	۴.۵ عملگرهای خاص p -کاملاً کراندار روی فضای $B_p(G)$
۲۲۳	۵.۵ همریختی‌های وزنی p -کاملاً کراندار روی فضای $B_p(G)$
۲۲۷	فصل ۶. جبرهای فوریه تحدید شده روی نیم‌گروه‌های وارون
۲۳۱	۱.۶ جبر نیم‌گروهی تحدید شده
۲۳۵	۲.۶ C^* -جبرهای نیم‌گروهی تحدید شده
۲۳۸	۳.۶ توابع مثبت معین تحدید شده
۲۴۲	۴.۶ جبر فوریه تحدید شده روی نیم‌گروه وارون
۲۴۵	۵.۶ p -صورت جبر فوریه‌اشتیلیس نیم‌گروهی، $B_{p,r}(S)$
۲۵۳	کتاب‌نامه
۲۶۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۶۸	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۷۵	نمایه

پیش‌گفتار

در آغاز یاد و خاطره استاد بزرگوار و ادیب فرزانه، مرحوم استاد علی‌اکبر عالم‌زاده را گرامی می‌داریم که جامعه ریاضیات ایران مرهون خدمات ارزنده ایشان در گسترش ریاضیات نوین است. به پاسداشت این استاد گرانقدر، سخنی از وی را به خوانندگان محترم تقدیم می‌کنیم:

«جهان اندیشه انتزاعی آنالیزی، سرزمینی اسرارآمیز است که در آن واژه‌ها و پدیده‌های نامتعارف در جنبشند. گاه موجوداتی را می‌بینید که با فاصله ثابت یک از بینهایت به سوی صفر می‌آیند، گویی همواره در صفر آرمیده‌اند. این بوستان دل‌انگیز، سرشار از تازگی است؛ همه گلها را بوی می‌توان کرد و همه میوه‌ها را چشید. اما پس از سیری کوتاه، این پرسش جان می‌گیرد که غایت این همه شگفتی و ناپیدایی چیست؟ آیا مقصود، بنای تفرجگاهی بوده یا غایتی متعالی‌تر در کار است؟ پاسخ را باید در ژرفای بیشتری جست. خواننده به زودی با جهان منسجم، جدی و پایدار آنالیز مدرن روبرو می‌شود، چنانکه گام‌هایش استوارتر می‌شود و با دستیابی پر از گنجینه‌های ارزشمند، شوقی فزون‌تر برای سفرهای بعدی می‌یابد.»

این کتاب در پی آن است تا خواننده را در سفری پرمایه به دنیای جبرهای فوریه همراهی کند. اثر حاضر مروری نظام‌مند بر مفاهیم اساسی مورد نیاز برای مطالعه جبرهای فوریه ارائه می‌دهد که شامل موارد زیر است:

۱. مبانی جبرهای باناخ و جبرهای عملگری،

۲. نظریه طیف و آنالیز ماتریسی،

۳. مقدمات نظریه گروههای توپولوژیک و جبرهای گروهی.

در این کتاب کوشیده‌ایم پیش‌نیازهای لازم را به گونه‌ای فراهم آوریم که خواننده با دانشی جامع و ساختاریافته به مطالعه جبرهای فوریه بپردازد. با توجه به پیچیدگی‌های ذاتی این شاخه از آنالیز، تأکید ویژه‌ای بر درک عمیق مفاهیم بنیادین داشته‌ایم. در هر بخش، راهنمایی‌هایی برای مطالعه بیشتر همراه با مراجع معتبر ارائه شده است.

جبر فوریه^۱ روی گروه موضعا فشرده G ، که با $A(G)$ نمایش داده می‌شود، یکی از مفاهیم مهم در آنالیز هارمونیک و نظریه عملگرهاست که ریشه در کارهای ریاضیدان فرانسوی ژان-پیر فوریه^۲ در قرن نوزدهم دارد. این شاخه از ریاضیات ارتباط عمیقی با تبدیل فوریه^۳ و فضاهای تابعی دارد و در نظریه گروههای موضعا فشرده و جبرهای باناخ نیز کاربردهای گسترده‌ای پیدا کرده است.

توسعه‌ی جبر فوریه عمدتاً در قرن بیستم و با مشارکت ریاضیدانانی مانند نوربرت وینر^۴، ایزرائیل گلفاند^۵، و ویلیام فولر^۶ صورت گرفت. این جبر به‌عنوان یک جبر باناخ تعریف می‌شود که از طریق توابعی با خاصیت‌های مشخص روی گروههای آبلی یا غیرآبلی ساخته می‌شود و در نظریه نمایش و آنالیز تابعی نقش کلیدی ایفا می‌کند.

جبر فوریه اشتیل‌یس^۷، $B(G)$ ، تعمیمی از جبر فوریه کلاسیک است که در نظریه‌ی نمایش گروههای موضعا فشرده و آنالیز هارمونیک نقش اساسی دارد. این مفهوم توسط پیر اشتیل‌یس^۸ و دیگران توسعه داده شد. مفاهیم اولیه این جبر به اوایل قرن بیستم باز می‌گردد؛ اما شکل‌گیری نظام‌مند آن عمدتاً در میانه‌ی قرن بیستم و با کارهای ریاضیدانانی مانند مارک رایکوف^۹ صورت

-
1. Fourier algebra
 2. Jean-Pierre Fourier
 3. Fourier transform
 4. Norbert Wiener
 5. Israel Gelfand
 6. William Feller
 7. Fourier-Stieltjes algebra
 8. Pierre Stieltjes
 9. Mark Raikov

گرفت. این جبر فضای توابع ضربگر روی گروه‌های توپولوژیک را مطالعه می‌کند. تعمیم طبیعی جبر فوریه کلاسیک، ارتباط عمیق با اندازه‌های اشتیل‌یس^۱ و همچنین کاربرد در نظریه نمایش گروه‌های غیرآبلی از دلایل معرفی این جبر است. امروزه این جبر در زمینه‌های نظریه عملگرهای فشرده، مکانیک کوانتومی پیشرفته و پردازش سیگنال‌های غیرخطی کاربرد دارد.

تعمیم‌های متنوعی از این جبرها در منابع مختلف ارائه شده است که در این کتاب به برخی از آنها خواهیم پرداخت. به عنوان مثال مطالعه p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس، برای $1 \leq p < \infty$ ، $B_p(G)$ ، که توسط روندا^۲ معرفی شد، گامی بلند در آنالیز هارمونیک به شمار می‌رود که دامنه آن را به فضاهای عملگری و ریاضیات ناجابجایی گسترش می‌دهد. این جبرها با جایگزینی ساختار فضای هیلبرت ($p = 2$) با رده‌های p -شاتن، فضاهایی از عملگرهای فشرده مجهز به p -نرم ارائه می‌دهند، که تعمیمی بر جبر کلاسیک فوریه اشتیل‌یس $B_2(G) = B(G)$ است. این تعمیم، چارچوبی انعطاف‌پذیر برای بررسی نظریه نمایش و تحلیل تابعی بر گروه‌های موضوعاً فشرده فراهم می‌کند که در ساختارهای ریاضی و فیزیکی گوناگونی ظاهر می‌شوند.

در این کتاب، با تکیه بر مطالعات پیشین، به بررسی هم‌ریختی‌های p -کاملاً انقباضی بین $B_p(G)$ و $B_p(H)$ پرداخته‌ایم که بیش ارزشمندی درباره ارتباط این جبرها و کاربردهایشان ارائه می‌دهد.

آنالیز فوریه همواره نقش کلیدی در فیزیک کوانتوم ایفا کرده است. در این زمینه، فضای $B_2(\mathbb{R}^m)$ به عنوان چارچوبی استاندارد برای مدل‌سازی توابع موج و حالت‌های کوانتومی شناخته می‌شود. با این حال، تعمیم این ساختار به فضای $B_p(G)$ ، که در آن G یک گروه موضوعاً فشرده است، ابزارهای تحلیلی قدرتمندتری را در اختیار پژوهشگران قرار می‌دهد. این تعمیم، به‌ویژه در مواردی که روش‌های مرسوم مبتنی بر $p = 2$ پاسخگو نیستند، کاربرد دارد. یکی از مهم‌ترین کاربردهای این چارچوب، در نظریه اطلاعات کوانتومی و مطالعه نرم‌های p -شاتن است. این نرم‌ها برای سنجش ویژگی‌های اساسی سیستم‌های کوانتومی، مانند درهم‌تنیدگی^۳، انسجام کوانتومی^۴ و وفاداری حالات^۵ به کار می‌روند. برای مثال، در تحلیل کانال‌های کوانتومی، نرم‌های شاتن امکان مقایسه و تمایز دقیق‌تر بین کانال‌ها را فراهم می‌کنند که می‌تواند به پیشرفت‌هایی در ارتباطات و محاسبات کوانتومی منجر شود.

-
1. Stieltjes measures
 2. Volker Runde
 3. entanglement
 4. quantum coherence
 5. fidelity

همچنین، ساختار $B_p(G)$ امکان بررسی سیستم‌های کوانتومی پیچیده‌تر، مانند سیستم‌هایی که تحت تأثیر نویز کوانتومی یا کاهش انسجام قرار دارند، را فراهم می‌کند. به علاوه این چارچوب، برای تحلیل همبستگی‌های کوانتومی در سیستم‌های چندذره‌ای مفید است و می‌تواند به توسعه روش‌های جدید برای کنترل و بهینه‌سازی این سیستم‌ها بینجامد. به طور خلاصه، تلفیق مفاهیم پیشرفته ریاضی، مانند فضاهای $B_p(G)$ و نرم‌های شاتن، با فیزیک کوانتوم، نه تنها درک بهتری از پدیده‌های کوانتومی ارائه می‌دهد، بلکه راه را برای نوآوری در فناوری‌های کوانتومی هموار می‌سازد.

در پردازش سیگنال و علم داده، آنالیز فوریه اساس تکنیک‌هایی مانند بازسازی تصویر، سنجش فشرده و بهینه‌سازی شبکه‌های عصبی است. تعمیم این روش‌ها به $B_p(G)$ ، پایه‌ای جبری برای پرداختن به محیط‌های غیر جابجایی، مانند گراف‌ها یا شبکه‌هایی با تقارن‌های ذاتی، فراهم می‌کند. منظم‌سازی نرم p -شاتن در یادگیری ماشین، به ویژه در کاربردهایی که تقریب‌های کم‌مرتبه اهمیت دارند، نویدبخش بوده است [۳۱]. این تکنیک، زمانی که در ساختار $B_p(G)$ به کار رود، می‌تواند به الگوریتم‌های نوینی برای پردازش داده‌های ابعاد بالا منجر شود که تقارن‌ها یا ساختارهای مبتنی بر گروه را حفظ می‌کنند. به عنوان نمونه، استفاده از p -صورت تبدیل‌های فوریه، بهبود تکنیک‌های سنجش فشرده را امکان پذیر می‌نماید و به بازنمایی داده‌ها به شکلی کارآمدتر و دقیق‌تر کمک می‌کند.

مطالعه همریختی‌های p -کاملاً انقباضی، ارتباط عمیقی بین نظریه نمایش و سیستم‌های دینامیکی برقرار می‌کند. این همریختی‌ها به بررسی تعاملات گروه‌های موضعاً فشرده می‌پردازند و دیدگاه جدیدی درباره عملگرهای گروهی و ناوردهای مرتبط ارائه می‌دهند. مطالعه جبرهای فوریه، ارتباط تنگاتنگی با جبرهای عملگری دارد؛ زیرا نگاشت‌های با خاصیت p -کاملاً انقباضی به طور طبیعی در مطالعه C^* -جبرهای هسته‌ای و دوگان آنها ظاهر می‌شوند [۱۱]. این یافته‌ها در طبقه‌بندی پیشرفته‌تر C^* -جبرها، حل مسائل ساختاری قدیمی درباره این جبرها و ارائه ناوردهای جدید برای تحلیل جبرها کاربرد دارند. این رویکرد ابزارهای تحلیلی قدرتمندی برای بررسی روابط دوگانه بین فضاهای نمایش و سیستم‌های دینامیکی فراهم می‌کند که منجر به درک عمیق‌تری از ویژگی‌های جبری و توپولوژیکی آنها می‌شود.

مطالعات اخیر نشان داده‌اند که جبر $B_p(G)$ دارای کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های آنالیز هارمونیک پیشرفته، فیزیک کوانتومی مدرن و پردازش داده‌های پیچیده دارد.

در این کتاب که به مطالعه $B_p(G)$ می‌پردازد، فصل‌های ۲ و ۳ مبانی نظری مورد نیاز را پوشش می‌دهند. فصل‌های ۴، ۵ و بخشی از فصل ۶ حاوی دستاوردهای پژوهشی نگارندگان در گسترش و تعمیم جبرهای فوریه هستند و به گسترش و تعمیم مقوله جبرهای از نوع فوریه می‌پردازند و می‌توانند برای کلیه پژوهشگران علاقمند به این حوزه مفید باشند [۱-۴، ۵۹، ۶۳]. با توجه به گستردگی مطالب، نویسندگان کتاب را با احترام به دانشجویان کارشناسی ارشد

و دکتری گرایش آنالیز در رشته ریاضی محض و کلیه علاقمندان به آنالیز فوریه مجرد تقدیم می کنند.

شایسته است از زحمات آقای دکتر داود احمدی دستجردی و خانم دکتر کامله نصیری پیربازاری که زحمت ویراستاری علمی و ادبی کتاب را پذیرفتند، سپاسگزاری کنیم. همچنین از خانم شهلا فلاحتی دانش آموخته رشته ریاضی که در تایپ و حروفچینی نسخه دست نویس کتاب کمک شایانی کردند، قدردانی می کنیم.

مرضیه شمسی یوسفی و محمد علی احمدپور جاده کناری
زمستان ۱۴۰۴، رشت و اتاوا

فصل ۱

دیباچه

فرض کنید f تابعی «خوشرفتار» روی خط حقیقی باشد. در این صورت، تبدیل فوریه f عبارت است از

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} dt.$$

در این صورت، از رابطه زیر می‌توان f را از روی $\hat{f}$ بازیابی کرد:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{2\pi i x t} dx.$$

این مسیر یکی از ابزارهای شناخته شده در ریاضیات کاربردی است که معمولاً آن را در دروس کارشناسی به دانشجویان آموزش می‌دهیم.

سری فوریه نیز برای یک تابع متناوب $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ تعریف می‌شود. ضرایب فوریه f عبارت است از $\{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ، که در آن

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta) e^{-2\pi i n \theta} d\theta.$$

و تابع f توسط رابطه

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{i n \theta} \quad (1.1)$$

از روی $\hat{f}$ بازیابی می‌شود. یکی از چالش‌های متداول در آنالیز کلاسیک، همگرایی سری فوق است و اینکه آیا این همگرایی تساوی (۱.۱) را برقرار می‌کند یا خیر؟ ویژگی‌هایی مانند دوبار مشتق‌پذیر بودن تابع یا استفاده از میانگین چزارو برای تابع پیوسته تضمینی بر برقراری رابطه (۱.۱) است. مشکلاتی که در اثر عدم همگرایی رخ می‌دهد در برق، الکترونیک و مخابرات نمونه‌های عینی زیادی دارد، از جمله پدیده گیس که پرداختن به آن خارج از حوصله این مقال است.

بنابراین، یافتن تابعی که تبدیل فوریه آن در دست ماست، ارزشمند است. مطالعه این توابع نه به صورت انفرادی، بلکه به صورت جمعی، منجر به مطالعه جبرهای فوریه می‌شود که موضوع این کتاب است. آنچه در بالا ذکر شد مثال‌هایی از کاربرد مطالعه نظریه فوریه روی خط حقیقی یا دایره واحد (به عنوان دامنه تناوب یک تابع متناوب) است. گسترش مساله به حالت‌های مجرد آن، مطالعه جبر فوریه روی یک گروه توپولوژیکی نه لزوماً آبدی G ، از اوایل قرن بیستم آغاز شد.

جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس توسط پیر ایمارد^۱، در رساله دکتری‌اش به راهنمایی جاکوش دیکسمیر^۲، در دانشگاه پاریس در سال ۱۹۶۴ متولد شدند. هدف اصلی در رساله ایمارد، شناسایی گروه موضعا فشرده G توسط جبر گروهی $L^1(G)$ در حالت غیر آبدی بود. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده، $C_b(G)$ معرف جبر باناخ شامل توابع پیوسته و کراندار و $C_0(G)$ معرف جبر باناخ شامل توابع پیوسته که در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند، باشد. هر دو جبر را به ضرب نقطه‌ای و نرم یکنواخت مجهز کنید.

فرض کنید $\hat{G}$ گروه دوگان پونتریاگین^۳ باشد. تابع $\hat{f}$ تبدیل فوریه وابسته به f ، متعلق به جبر گروهی $L^1(\hat{G})$ و $\hat{\mu}$ تبدیل فوریه اشتیل یس وابسته به اندازه مختلط منظم μ ، متعلق به جبر اندازه $M(\hat{G})$.

قرار دهید:

$$A(G) = \{\hat{f} \mid f \in L^1(\hat{G})\}$$

-
1. Piere Eymard
 2. Jacques Dixmier
 3. Lev Semenovich Pontryagin

و

$$B(G) = \{\hat{\mu} \mid \mu \in M(\hat{G})\}.$$

در این صورت، $A(G)$ و $B(G)$ جبرهای باناخ جابجایی هستند و فضای ایده‌ال ماکسیمال $A(G)$ با G یکرخت است. $A(G)$ جبر فوریه و $B(G)$ جبر فوریه اشتیل‌یس روی گروه آبلی G تعریف می‌شود. ساختار این جبرها در حالت غیر آبلی پیچیده‌تر است و نیازمند مقدماتی از مفاهیم توابع مثبت معین است که در این کتاب در فصل ۳ به آن پرداخته می‌شود.

ساختارهای ماتریسی روی این جبرهای باناخ مترتب است که ابزار بسیار مهمی برای مطالعه رفتار آنها در اختیار ریاضیدانان قرار می‌دهد، که در ادامه مختصر اشاره‌ای به آن خواهیم داشت.

فضاهای عملگری در اواسط دهه ۱۹۷۰ بعد از پیشگامی آثار استاین اسپرینگ^۱ و آروسن^۲ در این زمینه، توسط افراس^۳ در سال ۱۹۸۶ به جامعه ریاضی معرفی شد. ساختار فضای عملگری روی جبرهای فوریه اشتیل‌یس معرفی شده توسط ایمارد، که آن را برای یک گروه موضعاً فشرده مانند G با نماد $B(G)$ نشان می‌دهند، در ابتدا در [۲۳] و سپس به طور کامل در [۲۴] مورد بررسی قرار گرفت. در [۲۴]، ساختار فضای عملگری مجرد^۴ آن به طور کامل معین شد. ساختار فضای عملگری طبیعی روی جبر فوریه اشتیل‌یس از پیش دوگان آن که $C^*(G)$ - جبر $C^*(G)$ است، به دست می‌آید. همچنین ساختار فضای عملگری جبر فوریه $A(G)$ ، از دوگان آن یعنی جبر فون نویمان $VN(G)$ ، تولید شده توسط نمایش منظم چپ $(L_2(G), \lambda_{2,G})$ برای گروه موضعاً فشرده G گرفته می‌شود. محققین بسیاری از این نحوه به دست آمدن ساختار فضای عملگری برای جبرهای $A(G)$ و $B(G)$ استفاده کرده و به بررسی مسائل مختلفی روی جبرهای فوریه و فوریه اشتیل‌یس پرداخته‌اند. برای مثال در [۴۰]، همریختی‌های کاملاً کراندار از جبر فوریه به توی جبر فوریه اشتیل‌یس با استفاده از ساختار فضای عملگری مذکور توسط ایلی^۵ و اسپرانک^۶ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در گام بعدی، بعد از پیدایش جبرهای فیگا-تالامانکا-هرتس^۷ $A_p(G)$ ، $(1 < p < \infty)$ ، که در ابتدا برای گروه‌های آبلی توسط فیگا-تالامانکا

1. William Forrest Stinespring
2. William Arveson
3. Edward G. Effros
4. abstract operator space
5. Monica Illie
6. Nico Spronk
7. Figà-Talamanca-Herz algebras

[۲۷] و سپس در حالت کلی برای همه گروه‌های موضعاً فشرده توسط هرتس^۱ [۲۵] معرفی شدند، مفهوم فضای p -عملگری در [۱۸] بر مبنای مطالعات انجام گرفته توسط پیزیه^۲ [۵۲] و لمردی^۳ [۴۴] تعمیم یافت. این رویکرد معرفی شده از فضای p -عملگری به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفت و نتایجی برای $A_p(G)$ به عنوان یک فضای p -عملگری به دست آمد. به عنوان نتیجه‌ای از این دیدگاه، از ساختار p -عملگری روی $A_p(G)$ که یک ساختار p -عملگری دوگانی است، ایلی همریختی‌های p -کاملاً انقباضی روی چنین جبرهایی را مورد مطالعه قرار داد [۳۷].

برای تعریف کردن p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس تلاش‌های بسیاری صورت گرفت و مناسب ترین تعریف توسط رونداد در [۵۶] ارائه شد و در آن چنین جبری را با $B_p(G)$ نشان داد که در انتهای فصل دوم ارائه می‌شود. برای گسترش مطالعات به روی جبرهای از نوع فوریه، نیاز به تعریف ساختار فضای p -عملگری روی $B_p(G)$ است. در فصل سوم این کتاب به معرفی ساختار p -عملگری به روی جبر $B_p(G)$ با در نظر گرفتن آن به عنوان دوگان فضای p -عملگری $UPF_p(G)$ ، جبر جامع p -شبه توابع، می‌پردازیم. به این منظور در بخش ۱.۴، مفاهیمی در مورد l_p -جمع مستقیم QSL_p -فضاها و مفاهیم مربوط به محاسبات ماتریسی بر روی فضاها عملگری می‌پردازیم. در ادامه در بخش ۲.۴، ویژگی‌های مهمی در مورد نمایش‌ها به اثبات می‌رسد و به عنوان نتیجه، ساختار فضای p -عملگری جبر $UPF_p(G)$ با جزئیات مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پایانی این فصل، بخش ۳.۴، نتایج به دست آمده در دو بخش اول به کار گرفته خواهند شد تا به توصیف دقیق ساختار p -عملگری پیش دوگانی جبر $B_p(G)$ پرداخته شود.

در فصل چهارم، برای گروه موضعاً فشرده G ، برخی از ویژگی‌های بنیادی جبرهای فوریه اشتیل‌یس، به عنوان مثال فرم عناصر خودتوان، را برای p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس تعمیم می‌دهیم. برخی خواص افکنشی روی p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس در این فصل مطالعه می‌شوند، به عنوان مثال قضایای توسیع تابع از زیر گروه به گروه، یکی از مهمترین اهداف این فصل است که نقش مهمی در دستاوردهای آتی ایفا می‌کند. مطالعه p -کاملاً کراننداری همریختی‌های وزنی، یعنی همریختی‌هایی که به صورت ترکیب با یک همریختی (نگاشت آفین یا قطعه ای آفین) روی گروه‌های زمینه ساخته می‌شوند، یکی از اهداف مهم این فصل است. تعریف و مطالعه این دسته از نگاشت‌ها در [۴۰]، از جبر فوریه به جبر فوریه اشتیل‌یس با استفاده

1. Carl Samuel Herz
2. Gilles Pisier
3. Christian Le Merdy

از ساختار فضای عملگری طبیعی آنها، توسط ایلی و اسپرانک صورت گرفته است و در انتهای فصل چهارم این کتاب به p -صورت خود تعمیم می‌یابد.

در فصل پنجم به مطالعه تحقیقات صورت گرفته در مورد جبرهای فوریه روی نیم گروه‌های وارون می‌پردازیم و جبر فوریه و فوریه اشتیل‌یس نیم گروهی و p -صورت آنها را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ سیر تاریخی

با توجه به تخصصی بودن این بخش، مطالعه آن را پس از خواندن فصول اصلی کتاب برای دانشجویان توصیه می‌کنیم.

یکی از مسائل مهمی که این کتاب به آن می‌پردازد، همریختی‌های جبر فوریه و فوریه اشتیل‌یس است. در این بخش، سیر تاریخی پیشرفت مسائل مورد بررسی در این کتاب را توضیح می‌دهیم. در سال ۱۹۵۲، برلینگ^۱ و هلسن^۲ در [۸] به اثبات دو قضیه زیر پرداختند.

قضیه ۱.۱. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده، آیلی و همبند باشد. همچنین، فرض کنید f تبدیلی روی G باشد، به طوری که توان‌های مثبت و منفی آن در نرم طیفی^۳ کراندار است. در این صورت، f یک مشخصه پیوسته روی G است.

قضیه ۲.۱. فرض کنید G و H گروه‌های آیلی و موضعاً فشرده باشند. اگر حداقل یکی از H و G دارای دوگان همبند باشند، آنگاه H و G از لحاظ توپولوژیکی یکریخت هستند. در این صورت، $L^1(G)$ و $L^1(H)$ از لحاظ جبری یکریخت هستند.

تذکر ۳.۱. برلینگ در [۸]، مجموعه‌ای از توابع به صورت

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\sigma(x) \quad (2.1)$$

را در نظر گرفت که در آن $\sigma(x)$ تابعی از تغییر کراندار^۴ روی خط حقیقی است. وی نرمی به صورت

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma(x)|$$

-
1. Arne Beurling
 2. Henry Helson
 3. Spectral Norm
 4. function of bounded variation

تعریف کرد. در این صورت، توابع مربوط در شرط $M(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|f^n\| < \infty$ صادق هستند.

در ادامه کوهن^۱ در سال ۱۹۶۰ در [۱۲] و [۱۳] به مشخص کردن شکل عمومی همریختی‌های کراندار بین $L^1(G)$ و $M(H)$ برای گروه‌های آبلی و موضعاً فشرده و دلخواه G و H پرداخت. یکی از مهم‌ترین نتایجی که کوهن در این مقاله به اثبات آن پرداخت به صورت زیر است.

قضیه ۴.۱. فرض کنید G و H گروه‌های آبلی و موضعاً فشرده و $\{\hat{G}, \circ\}$ فشرده سازی تک نقطه ای $\hat{G}$ باشد. همچنین فرض کنید Φ همریختی از $L^1(G)$ به $M(H)$ باشد به طوری که Φ_* نگاشتی از $\hat{H}$ به $\{\hat{G}, \circ\}$ است. در این صورت، تعداد متناهی از همدسته‌های زیرگروه‌های باز $\hat{H}$ مانند K_i و نگاشت‌های $\alpha_i : K_i \rightarrow \hat{G}$ که $i = 1, \dots, n$ وجود دارند به طوری که برای هر x, y, z از K_i دارای این خاصیت هستند که

$$\alpha_i(x + y - z) = \alpha_i(x) + \alpha_i(y) - \alpha_i(z).$$

در این صورت، تجزیه‌ای از $\hat{H}$ به صورت $\hat{H} = \bigcup_{i=1}^n S_i$ وجود دارد، به طوری که هر $S_i \subset K_i$ به حلقه تولید شده توسط همدسته‌های زیرگروه‌های باز $\hat{H}$ تعلق دارد. همچنین، Φ_* یا صفر است یا با یکی از α_i ها برابر است.

برعکس، برای چنین نگاشت‌هایی از $\hat{H}$ به $\{\hat{G}, \circ\}$ ، همریختی‌ای از $L^1(G)$ به $M(H)$ وجود دارد که به تعبیر قسمت قبل آن را تولید می‌کند. همچنین، نگاشت Φ جبر باناخ $L^1(G)$ را به $L^1(H)$ می‌نگارد، اگر و تنها اگر Φ_*^{-1} برای هر زیرمجموعه فشرده $\hat{G}$ ، فشرده باشد.

تذکر ۵.۱. توجه می‌کنیم که با مفروضات بالا نگاشت $\alpha : \hat{H} \rightarrow \hat{G}$

$$\alpha|_{S_i} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

یک نگاشت قطعه‌ای آفین است.

کوهن قضیه زیر را نیز اثبات کرد.

قضیه ۶.۱. اگر μ اندازه‌ای روی گروه آبلی و موضعاً فشرده G باشد به طوری که $\mu * \mu = \mu$. آنگاه، $\hat{\mu}$ یک تابع مشخصه روی مجموعه E است که در آن E عضوی از حلقه تولید شده توسط همدسته‌های زیرگروه‌های باز $\hat{G}$ است.

در ۱۹۶۴، ایمارد در [۲۵] توصیف کاملی از جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس $A(G)$ و $B(H)$ ، که تعمیمی از جبرهای گروهی $L^1(G)$ و جبر اندازه $M(H)$ هستند، ارائه داد. پیرو آن محققین در صدد پاسخگویی به این سوال برآمدند که نتایج کوهن برای گروههای موضعاً فشرده در حالت کلی (و نه لزوماً آبلی) چگونه تعمیم می‌یابد. هاست^۱ در [۳۶] در ۱۹۸۶، به توصیف همریختی‌های کراندار از $A(G)$ به $B(G)$ پرداخت. او قضیه زیر را به اثبات رساند.

قضیه ۷.۱. فرض کنید G و H گروههای موضعاً فشرده، G آبلی و Φ همریختی از $A(G)$ به $B(H)$ باشد. آنگاه، زیر مجموعه Y از H ، و نگاشت قطعه‌ای آفین α از Y به G وجود دارد به طوری که برای هر u از $A(G)$ داریم

$$\Phi(h) = \begin{cases} u \circ \alpha(h) & h \in Y \\ 0 & h \notin Y \end{cases} \quad (۳.۱)$$

برعکس، اگر Y زیرمجموعه‌ای از H و α نگاشت آفین باشد، آنگاه رابطه (۳.۱) همریختی‌ای از $A(G)$ به $B(H)$ است.

برای اثبات این قضیه لازم بود که هاست نشان دهد Γ_α ، گراف نگاشت α ، به حلقه تولید شده توسط همدسته‌های زیرگروه‌های باز $G \times H$ تعلق دارد. با کمک نتایجی که لوزرت^۲ [۴۵] به دست آورده بود، این امر فقط برای گروه موضعاً فشرده G که دارای زیرگروه آبلی از اندیس متناهی باشد، تضمین شده است.

در سال‌های بعدی نظریه فضاهای عملگری و نگاشت‌های کاملاً کراندار توسط پاولسن^۳، بلچر^۴، پیزیه، افراس و روان^۵ توسعه یافت. در ابتدای امر پیزیه به مطالعه عملگرهای کاملاً کراندار روی فضاهای باناخ پرداخت [۵۲]. سپس افراس و روان در [۲۳] و بلچر در [۹] $A(G)$ و $B(G)$ را به عنوان فضاهای عملگری در نظر گرفتند. اولین کاربرد مهم این موضوع در سال ۱۹۹۵ توسط روان در [۵۴] ارائه شد. او در آن اثر نشان داد که ساختار فضای عملگری روی $A(G)$ ، نظریه‌ی کوهمولوژی منعطف‌تر و بهتری را نسبت به کوهمولوژی قدیمی جبر باناخ

-
1. Barry D. Host
 2. Victor Losert
 3. Vern Paulson
 4. David Blecher
 5. Zhi-Jun Ruan

نتیجه می‌دهد. در ۲۰۰۱ فارست^۱ و وود^۲ علاوه بر معرفی مفهوم میانگین پذیری ضعیف عملگری^۳ در [۳۰]، به اثبات قضیه زیر پرداختند:

قضیه ۸.۱. گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. هر نگاشت کراندار از $A(G)$ به هر فضای عملگری کاملاً کراندار است.

۲. هر نگاشت کراندار از $A(G)$ به $VN(G)$ کاملاً کراندار است.

۳. G زیرگروه آبلی از اندیس متناهی دارد.

پیش از آن لوزرت اثبات کرده بود که حکم (۳) با یکریختی $A(G \times G)$ و $A(G) \tilde{\otimes}_\varepsilon A(G)$ معادل است، که در آن $A(G) \tilde{\otimes}_\varepsilon A(G)$ ضرب تانسوری انژکتیو جبر فوریه با خودش است. مزیت مفاهیم فضاهای عملگری در ابزار قوی ضرب تانسوری تصویری عملگری $(\tilde{\otimes})$ است، [۱۰] و [۲۲]. با این ابزار، $A(G) \hat{\otimes} A(G)$ به طور طبیعی با $A(G \times G)$ برای گروه موضعاً فشرده و دلخواه G ، یکریخت است [۲۳]. با استفاده از این نتایج در سال ۲۰۰۳، ایلی در پایان‌نامه دکترای خود [۳۸]، به تعیین همریختی‌های کاملاً کراندار از $A(G)$ به $B(H)$ با فرض میانگین‌پذیری و گسسته بودن G پرداخت. او در مقاله اول خود [۳۹]، قضایای زیر را اثبات کرد.

قضیه ۹.۱. فرض کنید H و G گروه‌های موضعاً فشرده، G گسسته و میانگین‌پذیر و نگاشت $\Phi : A(G) \rightarrow B(G)$ یک همریختی جبری کاملاً کراندار باشد. آنگاه، $Y \in \Omega(H)$ و نگاشت قطعه‌ای آفین $\alpha : Y \rightarrow G$ وجود دارند به طوری که برای هر u از $A(G)$ داریم

$$\Phi u = \begin{cases} u \circ \alpha(h) & h \in Y \\ 0 & h \notin Y \end{cases} \quad (۴.۱)$$

همچنین، ایلی با ارائه قضیه زیر به توصیف برد نگاشت Φ معرفی شده در (۴.۱) در حالتی خاص پرداخت.

-
1. Brian Forrest
 2. Petet J. Wood
 3. Operator Weak Amenability

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده، G گسسته و میانگین پذیر باشد. اگر $\Phi : A(G) \rightarrow A(H)$ همریختی جبری کاملاً کراندار باشد، آنگاه تصویر Φ عبارت است از

$$\left\{ u \in A(H) : \begin{array}{l} \Phi^*(h_1) = \circ \Rightarrow u(h_1) = \circ \\ \Phi^*(h_1) = \Phi^*(h_2) \Rightarrow u(h_1) = u(h_2), \quad h_1, h_2 \in H \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

این قضیه در حالتی که به جای فرض‌های «گسسته بودن» و «میانگین‌پذیری» فرض «آبلی» را داشته باشیم، برقرار است.

بعد از آن ایلی در ۲۰۰۵، بهترین نتیجه ممکن برای همه همریختی‌های کاملاً کراندار از $A(G)$ به $B(H)$ را ارائه کرد [۴۰]. او ابتدا قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۱۱.۱. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند. اگر برای نگاشت $\alpha : Y \subset H \rightarrow G$ ، نگاشت $\Phi_\alpha : A(G) \rightarrow B(H)$ برای هر u از $A(G)$ به صورت

$$\Phi_\alpha u(h) = \begin{cases} u \circ \alpha(h) & h \in Y \\ \circ & h \notin Y. \end{cases} \quad (6.1)$$

تعریف شده باشد، در این صورت

۱. اگر α یک نگاشت قطعه‌ای آفین و پیوسته باشد، آنگاه Φ_α کاملاً کراندار است.

۲. اگر α یک نگاشت آفین و پیوسته باشد، آنگاه Φ_α کاملاً انقباضی است.

۳. اگر α یک نگاشت همریختی روی یک زیرگروه باز باشد، آنگاه Φ_α کاملاً مثبت است.

همچنین، تلاش‌هایی در جهت عکس این قضیه انجام شد. ایلی نشان داد که برای برقراری عکس قضیه بالا، شرط میانگین‌پذیری اساسی است.

قضیه ۱۲.۱. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده، G میانگین‌پذیر و Φ یک همریختی کراندار از $A(G)$ به $B(H)$ باشد. در این صورت، نگاشت $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ وجود دارد به طوری‌که

۱. اگر Φ همریختی کاملاً کراندار باشد، آنگاه α پیوسته و قطعه‌ای آفین است و $\Phi = \Phi_\alpha$.

۲. اگر Φ همریختی کاملاً انقباضی باشد، آنگاه α پیوسته و آفین است و $\Phi = \Phi_\alpha$.

۳. اگر Φ همریختی کاملاً مثبت باشد، آنگاه α پیوسته و همریختی روی زیرگروه باز است و $\Phi = \Phi_\alpha$.

او با ارائه مثالی نشان داد که اگر G گروه غیرمیانگین‌پذیر و شامل یک نسخه از گروه آزاد^۱ $\mathbb{F}_2$ باشد، آنگاه یک همریختی کاملاً کراندار $A(\mathbb{F}_2) \rightarrow A(G)$ وجود دارد، به طوری که برای هیچ نگاشت قطعه‌ای آفین α به فرم Φ_α معرفی شده در (۶.۱) نیست. یادآوری می‌کنیم برای $n \in \mathbb{N}$ گروه G را یک گروه آبدلی آزاد از رتبه n گویند، هرگاه توسط n عضو (که در نتیجه شامل همه ترکیبات ضربی و وارون آنها است) تولید شده باشد.

او در ۲۰۱۵ به تعمیم نتایج خود برای جبر فیگا-تالامانکا-هرتس، $A_p(G)$ پرداخت [۳۷]. او در این مقاله از ساختار فضای p -عملگری‌ای که توسط داوس^۲ در [۱۸] در ۲۰۱۰ برای این جبرها معرفی شده است، استفاده کرد. در این مقاله همه همریختی‌ها به صورت (۶.۱) از $A_p(G)$ به $A_p(H)$ مورد بررسی قرار گرفت و در راستای عکس مساله مورد نظر نتیجه‌ای در حالت خاص بیان شد. در واقع نشان داده شد که اگر نگاشت $\Phi : A_p(G) \rightarrow A_p(H)$ یک یکرختی p -کاملاً انقباضی باشد، آنگاه برای یک یکرختی گروهی $\alpha : H \rightarrow G$ ، نگاشت Φ به شکل (۶.۱) است.

-
1. Free group
 2. Matthew Daws

مقدماتی از فضاهای باناخ

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند. این مفاهیم در دو بخش و در مجموع دوازده زیربخش ارائه می‌شوند. در بخش ۱.۲، به ارائه تعاریف و ویژگی‌های ابتدایی فضاها و جبرهای باناخ، فضاهای هیلبرت، L^p - فضاها، جبرهای C^* و فون نویمان، فضاهای عملگری و... مورد استفاده در این کتاب می‌پردازیم. در بخش ۲.۲ به معرفی انواع ضربهای تانسوری می‌پردازیم. این نوع ضربها نقش ظریفی در این کتاب دارند.

۱.۲ فضاها و جبرهای باناخ

در زیربخش ۱.۱.۲ به معرفی تعاریف و ویژگی‌های کاربردی فضاهای باناخ می‌پردازیم و چند فضای باناخ خاص را معرفی می‌کنیم. سپس در زیربخش ۲.۱.۲ به توصیف اجمالی فضاهای هیلبرت می‌پردازیم. در ادامه در زیربخش‌های ۳.۱.۲ و ۴.۱.۲ به بیان مفاهیم و قضایای مربوط به L^p - فضاها و QSL_p - فضاها پرداخته و در نهایت مفاهیم مربوط به فضاهای باناخ را در زیربخش ۵.۱.۲ با ارائه مفاهیم مربوط به فیلترها روی این فضاها به پایان می‌رسانیم. در ادامه، در زیربخش ۶.۱.۲ به توصیف جبرهای C^* و فون نویمان می‌پردازیم و نکات ارزنده‌ای را به‌طور مختصر ارائه می‌کنیم. فضاهای عملگری و p - عملگری پایان بخش این قسمت از فصل اول

هستند.

شایان ذکر است عمده مطالب فصل اول از مفاهیم مقدماتی دروس دروه کارشناسی ارشد هستند. به دلیل پرهیز از طولانی شدن فصل و کتاب از آوردن برخی برهان‌ها که در کلیه کتب کلاسیک موجود است، پرهیز شده و مراجع مناسب اعلام شده است.

۱.۱.۲ فضاهای باناخ ویژه

در این بخش به صورت خیلی مختصر مفاهیم پایه ای آنالیز تابعی را بیان کرده و در انتها چند ویژگی از فضاهای باناخ را مطرح می‌کنیم. مهم‌ترین مراجع برای مطالب این زیربخش، [۵۵] و [۱۴] هستند.

برای مجموعه V عمل‌های «+» (جمع برداری) و « $\cdot$ » (ضرب اسکالر) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2,$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

آنگاه $(V, +, \cdot)$ را فضای برداری^۱ روی $\mathbb{C}$ گوئیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد.

$$1. \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1, \quad v_1, v_2 \in V$$

$$2. \quad (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3), \quad v_1, v_2, v_3 \in V$$

$$3. \quad \exists \circ \in V, \quad \forall v \in V, \quad v + \circ = v$$

$$4. \quad \forall v \in V, \quad \exists v' \in V \quad (v' = -v), \quad v + v' = \circ$$

همچنین،

$$5. \quad (\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad v \in V$$

$$6. \quad \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad v_1, v_2 \in V$$

$$7. \quad (\lambda_1 \lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad v \in V$$

1. vector space

$$. \lambda v = v, \quad v \in V$$

خانواده τ_V از زیرمجموعه‌های V را یک توپولوژی می‌نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد

$$. ۱. \emptyset, V \in \tau_V$$

$$. ۲. \text{ اگر } \{A_i \mid i \in \mathbb{I}\} \subseteq \tau_V, \text{ آنگاه } \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \in \tau_V$$

$$. ۳. \text{ اگر برای } n \in \mathbb{N}, \{A_k; k = 1 \dots n\} \subseteq \tau_V, \text{ آنگاه } \bigcap_{k=1}^n A_k \in \tau_V$$

تعریف ۱.۲. فرض کنید τ_V نشان دهنده یک توپولوژی روی فضای برداری V باشد. در این صورت اگر اعمال «+» و « $\cdot$ » نسبت به این توپولوژی پیوسته باشند، دوتایی (V, τ_V) را یک فضای برداری توپولوژیکی^۱ می‌نامند.

تعریف ۲.۲. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ (که معمولاً $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است) باشد. یک $\|\cdot\|$ روی V تابع $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ است، که برای هر $u, v \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$. ۱. (\text{مثبت معین بودن}) \quad \|v\| \geq 0 \text{ و } \|v\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } v = 0.$$

$$. ۲. (\text{همگنی}) \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$$

$$. ۳. (\text{نامساوی مثلثی}) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

اگر برای $v \in V$ از تساوی $\|v\| = 0$ نتوان (لزوماً) نتیجه گرفت که $v = 0$ ، آنگاه نگاشت $\|\cdot\|$ به همراه بقیه ویژگی‌ها را یک نیم‌نرم^۳ روی فضای V می‌نامند. قرار دهید

$$N = N_{\|\cdot\|} = \{v \in V : \|v\| = 0\}.$$

می‌توان ثابت کرد که N یک زیرفضای بسته از V است. به فضای N فضای پوچ نیم-نرم $\|\cdot\|$ می‌گویند. می‌توان فضای V را به کلاس‌های هم‌ارزی حاصل از رابطه هم‌ارزی زیر افراز کرد

$$v \sim v' \iff v - v' \in N$$

1. topological vector space (T.V.S)

2. norm

3. semi-norm

$$\|v + N\|_V = \inf \{ \|v - v'\| : v' \in N \} \quad v + N \in \frac{V}{N}.$$

تعریف ۴.۲. فضای نرم دار تام، به این معنی که هر دنباله کوشی در آن به عضوی از فضا همگراست،^۲ را یک فضای باناخ^۳ می‌نامند.

فرض کنید (V, τ_V) و (W, τ_W) دو فضای برداری توپولوژیکی بوده و $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت باشد. می‌گوییم نگاشت T نسبت به توپولوژی τ_V (در دامنه) و توپولوژی τ_W (در برد) در نقطه $v_0 \in V$ پیوسته است، هرگاه برای هر همسایگی $A \in \tau_W$ از $T(v_0)$ ، همسایگی $B \in \tau_V$ از v_0 وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $T(v) \in A$ ، $v \in B$ پس از این برای راحتی در بیان، برای نگاشت پیوسته $T : V \rightarrow W$ می‌گوییم «نگاشت T به‌صورت $\tau_V - \tau_W$ پیوسته است». همچنین اگر توپولوژی‌های روی دامنه و برد یکسان باشند (مثلاً هر دو τ_V باشند)، آنگاه فقط می‌گوییم نگاشت T نسبت به توپولوژی τ_V پیوسته است. در نهایت اگر توپولوژی‌های دامنه و برد حاصل از نرم باشند، آنگاه برای سادگی می‌گوییم نگاشت T پیوسته است. به عنوان مثال برای نگاشتی مانند $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_V) \rightarrow (\mathbb{C}, \|\cdot\|_V)$ به این دلیل که توپولوژی‌های دامنه و برد حاصل از نرم هستند فقط می‌گوییم نگاشت T پیوسته است (توجه کنید که غالباً از ذکر توپولوژی و نرم در کنار فضاهای دامنه و برد پرهیز می‌کنیم). علاوه بر این هنگام کار کردن با فضاهای نرم دار، اندیس مربوط به فضا را به دلیل سادگی در نوشتار حذف می‌کنیم و به جای نماد $\|\cdot\|_V$ از نماد $\|\cdot\|$ استفاده می‌کنیم؛ مگر اینکه تأکید بر روی فضا مهم باشد. یادآور می‌شویم که منظور از نماد $\|\cdot\|$ همان قدرمطلق اعداد مختلط است. در ادامه به این دلیل که در سراسر این کتاب با فضاهای باناخ سر و کار داریم، به بیان چند ویژگی پایه‌ای این فضاها پرداخته و مفاهیم را در حالت خاص بیان می‌کنیم.

فرض کنید V و W دو فضای باناخ بوده و $T : V \rightarrow W$ یک نگاشت باشد. می‌گوییم

$$T(\lambda v_{\mathfrak{I}} + v_{\mathfrak{Y}}) = \lambda T(v_{\mathfrak{I}}) + T(v_{\mathfrak{Y}}), \quad v_{\mathfrak{I}}, v_{\mathfrak{Y}} \in V, \lambda \in \mathbb{C}.$$

1. normed space
2. complete normed space
3. Banach space

به سادگی می‌توان ثابت کرد که تحت شرایط بالا، نگاشت خطی T پیوسته است، هرگاه در صفر پیوسته باشد. فضای همه عملگرهای خطی و کراندار (پیوسته) مانند $T: V \rightarrow W$ را با نماد $B(V, W)$ نشان می‌دهند. این فضا نرم دار بوده و نرم آن برای نگاشت $T \in B(V, W)$ به صورت

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup \{ \|T(v)\| : \|v\| \leq 1, v \in V \} \quad (۱.۲)$$

تعریف می‌شود. دلیل اندیس op ابتدای کلمه «عملگر»^۱ است؛ چرا که این نرم را نرم عملگری می‌نامند. به وضوح پیوستگی T معادل با این است که نگاشت خطی T کراندار است. یعنی عدد ثابت و مثبت C موجود باشد به طوری که

$$\|T(v)\| \leq C\|v\|, \quad v \in V.$$

مهم‌ترین ویژگی این فضا در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۵.۲. برای فضاهای باناخ V و W ، فضای $B(V, W)$ یک فضای باناخ است.

از مهم‌ترین عناصر فضای $B(V, W)$ عملگرهای طولپا^۲ و وارون پذیر^۳ این فضا هستند که آنها را در یک تعریف ارائه می‌کنیم.

تعریف ۶.۲. فرض کنید V و W دو فضای باناخ باشند و $T \in B(V, W)$. در این صورت

$$۱. \text{ نگاشت } T \text{ طولپا است، هرگاه برای هر } v \in V, \|T(v)\| = \|v\|.$$

$$۲. \text{ نگاشت } T \text{ وارون پذیر است، هرگاه نگاشت } S \in B(W, V) \text{ موجود باشد به طوری که } S \circ T = \text{id}_V, T \circ S = \text{id}_W.$$

$$۳. \text{ نگاشت } T \text{ انقباضی}^۴ \text{ است، هرگاه } \|T\|_{\text{op}} \leq ۱.$$

-
1. operator
 2. isometric operators
 3. invertible operators
 4. contractive operators

۴. نگاشت T نگاشت خارج قسمتی^۱ است، هرگاه پوشا باشد و

$$\|T(v)\| = \inf \{\|v'\| : T(v) = T(v')\}, \quad v \in V.$$

در واقع نگاشت خارج قسمتی بیانگر یکرختی طولپای زیر است

$$V/\ker T = W.$$

توجه کنید که اگر عملگر $T \in \mathcal{B}(V, W)$ طولپا باشد، آنگاه یک به یک است. همچنین اگر T وارون پذیر و انقباضی با وارون انقباضی باشد، آنگاه طولپا است. در حالتی که $V = W$ است، برای سادگی از نماد $\mathcal{B}(V)$ به جای نماد $\mathcal{B}(V, V)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $\mathcal{B}(V)$ مثالی از یک جبر باناخ یک‌دار^۲ است که لزوماً جابجایی نیست. همانی ضربی این فضا همان نگاشت همانی id_V است. اگر مجموعه همه اعضای وارون پذیر و طولپای فضای $\mathcal{B}(V)$ را با نماد $\text{Iso}(V)$ نشان دهیم، آنگاه این مجموعه به همراه عمل ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهد.

یکی دیگر از مهم‌ترین مثال‌های فضای $\mathcal{B}(V, W)$ زمانی به دست می‌آید که برای فضای باناخ V قرار دهیم $W = \mathbb{C}$. در اینجا به جای نماد $\mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ از نماد V^* استفاده می‌کنیم و آن را فضای دوگان^۳ فضای V نامیده و اعضای فضای V^* را تابع‌های خطی^۴ (یا به طور مختصر، تابع) می‌نامیم. این فضا همواره در مباحث مربوط به آنالیز نقش ویژه ای ایفا می‌کند. نرم روی این فضا حالت خاصی از رابطه (۱.۲) است که به صورت

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup \{|\langle v, T \rangle| : \|v\| \leq 1, v \in V\}. \quad (2.2)$$

بیان می‌شود. توجه می‌کنیم که در رابطه (۲.۲) به دلیل مرسوم بودن نمایش رابطه دوگانی بین اعضای V و $T \in V^*$ به صورت $\langle v, T \rangle$ ، از این نماد به جای نماد $T(v)$ استفاده کردیم. یکی از نتایج مهم رابطه دوگانی بین فضای V و V^* این است که نرم فضای باناخ V را می‌توان از رابطه

$$\|v\| = \sup \{|\langle v, T \rangle| : \|T\|_{\text{op}} \leq 1, T \in V^*\}$$

-
1. quotient mapping
 2. unital Banach algebra
 3. dual space
 4. linear functionals

به دست آورد.

برای عملگر $T \in \mathcal{B}(V, W)$ عملگر مزدوج^۱ $T^* \in \mathcal{B}(W^*, V^*)$ برای $\eta \in W^*$ به صورت $\langle v, T^*(\eta) \rangle = \langle T(v), \eta \rangle$, $v \in V$ تعریف می شود. همچنین به آسانی نتیجه می شود $\|T^*\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}}$. در اینجا به بیان دو قضیه می پردازیم که هر دو از قضایای مهم آنالیز تابعی به شمار می آیند.

قضیه ۷.۲ (هان-باناخ)^۲. فرض کنید V یک فضای باناخ و $W \subseteq V$ زیرفضایی بسته از آن باشد. در این صورت، هر تابعک خطی و کراندار مانند $\Lambda \in W^*$ را می توان به تابعک $\tilde{\Lambda} \in V^*$ گسترش داد به طوری که $\|\Lambda\|_{\text{op}} = \|\tilde{\Lambda}\|_{\text{op}}$.

برای یک زیرفضای W از یک فضای باناخ V فضای $W^\perp$ به صورت

$$W^\perp = \{T \in V^* : \langle w, T \rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

تعریف می شود. با توجه به رابطه بالا، قضیه اساسی زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۸.۲. فرض کنید V یک فضای باناخ و W یک زیرفضای بسته از آن باشد. در این صورت یکسان ریختی های طول پای زیر برقرار هستند

$$W^* = V^*/W^\perp, \quad (V/W)^* = W^\perp.$$

یکی دیگر از فضاهای مهم مورد بحث در این کتاب دوگان دوم فضای باناخ V است که آن را با نماد $V^{**} = (V^*)^*$ نشان می دهیم. در واقع فضای V^{**} فضای همه تابعک های خطی و کراندار مانند $F : V^* \rightarrow \mathbb{C}$ است. به طور مشابه برای یک عضو مانند $F \in V^{**}$ نرم عملگری در نظر گرفته می شود که به صورت

$$\|F\|_{\text{op}} = \sup \{ |\langle T, F \rangle| : \|T\|_{\text{op}} \leq 1, T \in V^* \}.$$

تعریف می شود. هر عضو $v \in V$ یک تابعک خطی و کراندار مانند F_v روی فضای V^* ایجاد می کند که به صورت

$$F_v : V^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_v(T) = \langle v, T \rangle, \quad T \in V^*.$$

1. conjugate operator

2. Hahn-Banach

بیان می‌شود. به تابع F_v یک تابع ارزیابی^۱ می‌گویند. حال نگاشت زیر را در نظر بگیرید

$$\kappa_V : V \rightarrow V^{**}, \quad \kappa_V(v) = F_v, \quad v \in V. \quad (3.2)$$

آنگاه $\mathcal{R}(\kappa_V)$ برد نگاشت κ_V ، یک زیرفضای بسته از فضای V^{**} بوده و با محدود کردن خود به برد این فضا، یعنی با در نظر گرفتن نگاشت فوق به صورت $(\kappa_V)_{\mathcal{R}} : V \rightarrow \mathcal{R}(\kappa_V)$ یک یکسان‌ریختی^۲ توپولوژیکی بین دو فضای باناخ V و $\mathcal{R}(\kappa_V)$ ایجاد می‌شود. یعنی نگاشت خطی $(\kappa_V)_{\mathcal{R}}$ یک‌به‌یک، پوشا، طولی با وارونی طولی است. به همین خاطر می‌توان فضای V را به عنوان زیرفضای بسته‌ای از فضای V^{**} در توپولوژی نرم در نظر گرفت. در ادامه به بیان چند تعریف مهم در مورد فضاهای باناخ می‌پردازیم.

تعریف ۹.۲. فرض کنید V یک فضای باناخ باشد. در این صورت

۱. V را یک فضای بازتابی^۳ می‌نامیم، هرگاه $V = V^{**}$. این یعنی زیرفضای بسته $\mathcal{R}(\kappa_V)$ نسبت به توپولوژی نرم در V^{**} چگال بوده و κ_V یک یکرختی طولی بین V و V^{**} باشد.

۲. می‌گوییم V به‌طور متناهی قابل نمایش^۴ در فضای باناخ W است، هرگاه برای هر زیرفضای متناهی بعد V_n از فضای V و هر عدد $a > 1$ یک یکرختی مانند $T_n : V_n \rightarrow W$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $v \in V_n$ ، $\frac{\|v\|}{a} \leq \|T_n(v)\| \leq a\|v\|$.

۳. V را فضای فوق بازتابی^۵ می‌نامیم، هرگاه هیچ فضای باناخ غیر بازتابی به‌طور متناهی قابل نمایش در V نباشد. به‌طور معادل فضای باناخ V فوق بازتابی است، هرگاه هر فضای باناخ به‌طور متناهی قابل نمایش در V بازتابی باشد.

-
1. evaluation functional
 2. homeomorphism
 3. reflexive
 4. finitely representable
 5. super-reflexive

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید V یک فضای باناخ باشد. آنگاه V را هموار^۱ می‌نامیم، هرگاه برای $v \in V \setminus \{0\}$ تابعک منحصر به فرد $T \in V^*$ وجود داشته باشد به طوری که $\|T\| = 1$ و $\langle v, T \rangle = \|v\|$.

قضیه ۱۱.۲. فضای باناخ V فوق بازتابی است، اگر و تنها اگر V^* فوق بازتابی باشد.

برهان. برای دیدن اثبات به قضیه ۲ از [۲۶] مراجعه کنید. $\square$

همانطور که انتظار می‌رود هر فضای باناخ فوق بازتابی، یک فضای بازتابی است. برای دیدن ویژگی‌های بیشتر در مورد چنین فضاهایی به [۲۶] رجوع کنید.

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. برای هر $\epsilon \in (0, 2]$ ، پیمانه تحدب^۲ $\delta(\epsilon)$ روی فضای باناخ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{v+v'}{2} \right\| : \|v\| \leq 1, \|v'\| \leq 1, \|v - v'\| \geq \epsilon \right\}.$$

نرم $\|\cdot\|$ را به طور یکنواخت محدب^۳ می‌نامیم، هرگاه برای هر $\epsilon \in (0, 2]$ ، $\delta(\epsilon) > 0$ و فضای باناخ V با این نرم را یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب می‌نامیم.

تذکر ۱۳.۲. با توجه به لم ۹.۲ از [۲۶] می‌توان شرط $\|v - v'\| \geq \epsilon$ را با شرط $\|v - v'\| = \epsilon$ تعویض کرد.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. اگر نرم $\|\cdot\|$ به طور یکنواخت محدب باشد، آنگاه V یک فضای باناخ بازتابی است.

برهان. برای دیدن اثبات به قضیه ۹.۱۲ از [۲۶] مراجعه کنید. $\square$

تذکر ۱۵.۲. فرض کنید V یک فضای باناخ و W یک زیرفضای بسته آن باشد. در این صورت

۱. اگر V یک فضای به طور یکنواخت محدب باشد، آنگاه W (که خود فضای باناخ است)، یک فضای به طور یکنواخت محدب است. زیرا برای هر $\epsilon > 0$ با فرض این که $\delta_V(\epsilon)$ و $\delta_W(\epsilon)$ به ترتیب پیمانه‌های تحدب فضاهای V و W باشند، داریم $\delta_W(\epsilon) \geq \delta_V(\epsilon)$.

-
1. smooth
 2. modulus of convexity
 3. uniformly convex

۲. بنا بر تمرین ۹۰۶ از [۲۶] اگر V یک فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب باشد و W زیرفضای بسته از آن باشد، آنگاه نرم فضای خارج قسمتی V/W نیز به‌طور یکنواخت محدب است و در نتیجه V/W یک فضای به‌طور یکنواخت محدب می‌شود.

۳. بنابر قسمت (i) از لم ۸۰۴ و قضیه ۹۰۱۰ از [۲۶] اگر V به‌طور یکنواخت محدب باشد، آنگاه V^* یک فضای هموار است.

از بین مفاهیمی که در آنالیز تابعی حائز اهمیت هستند، می‌توان به نگاشت‌های دوخطی^۱ اشاره کرد.

تعریف ۱۶.۲. فرض کنید V, W و Z فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. منظور از یک نگاشت دوخطی، نگاشتی مانند $T: V \times W \rightarrow Z$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + v_2, w) &= \alpha T(v_1, w) + T(v_2, w), \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall w \in W, \forall \alpha \in \mathbb{C}; \\ T(v, \beta w_1 + w_2) &= \beta T(v, w_1) + T(v, w_2), \quad \forall v \in V, \forall w_1, w_2 \in W, \forall \beta \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

تعریف ۱۷.۲. نگاشت دوخطی T را پیوسته می‌نامیم، هرگاه عدد ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|T(v, w)\|_Z \leq C \|v\|_V \|w\|_W, \quad \forall (v, w) \in V \times W.$$

فضای همه نگاشت‌های دوخطی و کراندار از فضای $V \times W$ به فضای Z را با $\mathfrak{B}(V \times W, Z)$ نشان می‌دهیم. نرم روی این فضا به‌صورت

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup \{ \|T(v, w)\|_Z : \|v\| \leq 1, \|w\| \leq 1, v \in V, w \in W \}$$

تعریف می‌شود. در حالتی‌که $Z = \mathbb{C}$ این فضا را با $\mathfrak{B}(X \times Y)$ نشان می‌دهیم و اعضای آن را صورت‌های دوخطی^۲ می‌نامیم. هر شکل دوخطی مانند $T: V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ عملگری خطی و کراندار مانند $\mathcal{J}(T)$ از فضای V به فضای W^* تولید می‌کند که به‌صورت

$$\mathcal{J}(T)(v) = T_v \in W^*, \quad T_v: W \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle w, T_v \rangle = T(v, w), \quad w \in W, v \in V,$$

-
1. bilinear mappings
 2. bilinear forms

تعریف می‌شود. لذا نگاشت $\mathcal{J} : \mathfrak{B}(V \times W) \rightarrow \mathcal{B}(V, W^*)$ قابل تعریف است. همچنین، هر عملگر خطی $T \in \mathcal{B}(V, W^*)$ یک فرم دوخطی مانند $\mathcal{S}(T) \in \mathfrak{B}(V \times W)$ به صورت

$$\mathcal{S}(T)(v, w) = \langle w, T(v) \rangle, \quad (v, w) \in V \times W.$$

تعریف می‌کند. لذا نگاشت $\mathcal{S} : \mathcal{B}(V, W^*) \rightarrow \mathfrak{B}(V \times W)$ قابل تعریف است. در واقع دو نگاشت $\mathcal{J}$ و $\mathcal{S}$ معکوس یکدیگر بوده و در نتیجه یکسان‌ریختی طولپای زیر برقرار است

$$\mathfrak{B}(V \times W) = \mathcal{B}(V, W^*). \quad (۴.۲)$$

این زیر بخش را با معرفی چهار توپولوژی به پایان می‌رسانیم. در حالت کلی، اگر برای یک خانواده اندیس‌گذار مانند $\mathbb{I}$ خانواده $\tau_s = (p_i)_{i \in \mathbb{I}}$ متشکل از نیم-نرم‌ها روی فضای V باشد، آنگاه این خانواده روی این فضا یک توپولوژی (یک نوع همگرایی!) به صورت زیر تعریف می‌کند

$$\tau_s - \lim_{j \in \mathbb{J}} v_j = v \iff \lim_{j \in \mathbb{J}} p_i(v_j) = p_i(v), \quad \forall i \in \mathbb{I}, \quad (v_j)_{j \in \mathbb{J}}, v \in V.$$

حال چند خانواده از چنین نیم-نرم‌هایی را به روی فضاهای باناخ معرفی می‌کنیم. خانواده $(p_T)_{T \in V^*}$ از نیم-نرم‌هایی به روی فضای V که توسط فضای V^* اندیس‌گذاری شده‌اند را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$p_T : V \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad p_T(v) = |\langle v, T \rangle|, \quad v \in V.$$

این خانواده از نیم-نرم‌ها یک توپولوژی تولید می‌کنند که به آن توپولوژی ضعیف^۱ گفته و با τ_w نشان می‌دهیم. داریم

$$\tau_w - \lim_{j \in \mathbb{J}} v_j = v \iff \lim_{j \in \mathbb{J}} \langle v_j, T \rangle = \langle v, T \rangle, \quad \forall T \in V^*, \quad (v_j)_{j \in \mathbb{J}}, v \in V.$$

همچنین، فضای V نیز به روی دوگان خود، فضای V^* ، یک توپولوژی ایجاد می‌کند که در واقع از تابع‌های ارزیابی حاصل می‌شود. خانواده $(p_v)_{v \in V}$ از نیم-نرم‌ها به روی فضای V^*

1. weak topology

را در نظر بگیرید. توپولوژی حاصل از این خانواده از نیم-نرم‌ها را توپولوژی ضعیف-ستاره^۱ می‌نامیم و با τ_{w*} نشان می‌دهیم. همگرایی نسبت به این توپولوژی به صورت زیر است

$$\tau_{w*} - \lim_{j \in \mathbb{J}} T_j = T \iff \lim_{j \in \mathbb{J}} \langle v, T_j \rangle = \langle v, T \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (T_j)_{j \in \mathbb{J}}, T \in V^*.$$

در پایان، برای فضای باناخ V به معرفی دو توپولوژی عملگری به روی فضای $B(V)$ می‌پردازیم. نیم-نرم‌های زیر روی این فضا را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$p_{v, \|\cdot\|} : B(V) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad p_{v, \|\cdot\|}(S) = \|S(v)\|, \quad S \in B(V), \quad v \in V,$$

$$p_{(v, T)} : B(V) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad p_{(v, T)}(S) = |\langle S(v), T \rangle|, \quad S \in B(V),$$

که در آن $(v, T) \in V \times V^*$. توپولوژی‌های حاصل از دو خانواده از نیم-نرم‌های $(p_{v, \|\cdot\|})_{v \in V}$ و $(p_{(v, T)})_{(v, T) \in V \times V^*}$ را به ترتیب توپولوژی عملگری قوی و توپولوژی عملگری ضعیف^۲ نامیده و با نمادهای $\tau_{w.o.t}$ و $\tau_{s.o.t}$ نشان می‌دهیم. برای $(S_j)_{j \in \mathbb{J}}$ و S از فضای $B(V)$ همگرایی در این توپولوژی‌ها به صورت زیر است

$$\tau_{s.o.t} - \lim_{j \in \mathbb{J}} S_j = S \iff \lim_{j \in \mathbb{J}} \|S_j(v) - S(v)\|_V = 0, \quad \forall v \in V,$$

$$\tau_{w.o.t} - \lim_{j \in \mathbb{J}} S_j = S \iff \lim_{j \in \mathbb{J}} |\langle S_j(v) - S(v), T \rangle| = 0, \quad \forall (v, T) \in V \times V^*.$$

۲.۱.۲ فضاهای هیلبرت

فضاهای هیلبرت^۳، که نام آنها از دیوید هیلبرت ریاضیدان آلمانی گرفته شده است، در اوایل قرن بیستم و در نتیجه مطالعات مربوط به معادلات انتگرال و فضاهای برداری بینهایت بعدی شکل گرفتند. هیلبرت بین سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۱۰ این فضاهای کامل ضرب داخلی را صورت بندی کرد و بعدها جان فون نویمان در سال ۱۹۲۹ این مفهوم را تعمیم داد و اصل بندی مدرن آن را پایه گذاری کرد. امروزه فضاهای هیلبرت نقش اساسی در مکانیک کوانتوم، آنالیز تابعی

1. weak-star topology

2. strong operator topology and weak operator topology

3. Hilbert spaces

و ریاضیات کاربردی ایفا می‌کنند و چارچوب ریاضی لازم برای آنالیز فوریه، نظریه طیفی و بسیاری از زمینه‌های دیگر را فراهم می‌سازند. در این زیر بخش کوتاه به ارائه مفاهیم اولیه درباره فضاهای هیلبرت می‌پردازیم. این فضاها را می‌توان تعمیمی از فضای ضرب داخلی $\mathbb{C}$ در نظر گرفت. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد. یک ضرب داخلی^۱ روی $\mathcal{H}$ نگاشتی به صورت $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ است که دارای خواص زیر باشد:

$$1. \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

$$2. \text{ برای } \xi \in \mathcal{H}, \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \xi = 0$$

$$3. \text{ برای } \xi, \eta \in \mathcal{H}, \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{H}}}$$

$$4. \text{ برای } \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{H}, \lambda, \gamma \in \mathbb{C}, \langle \lambda \xi + \gamma \eta, \zeta \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda \langle \xi, \zeta \rangle_{\mathcal{H}} + \gamma \langle \eta, \zeta \rangle_{\mathcal{H}}$$

ضرب داخلی یک نرم به شکل زیر القا می‌کند

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}}}, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

تعریف ۱۸.۲. فضای برداری مجهز به ضرب داخلی را فضای ضرب داخلی^۲ گویند.

قضیه ۱۹.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت، روابط زیر برقرار هستند.

۱. نامساوی شوارتز^۳

$$|\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|\xi\|_{\mathcal{H}} \|\eta\|_{\mathcal{H}}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

۲. قانون متوازی الاضلاع^۴

$$\|\xi + \eta\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\xi - \eta\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\|\eta\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

-
1. inner product
 2. inner product space
 3. Schwarz's inequality
 4. parallelogram law

تعریف ۲۰.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای ضرب داخلی باشد. می‌گوییم $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت است، هرگاه با نرم القایی از ضرب داخلی، کامل باشد.

تعریف ۲۱.۲. یک فضای هیلبرت را جدایی‌پذیر^۱ گوئیم، هرگاه یک زیرمجموعه چگال شمارا داشته باشد.

تعریف ۲۲.۲. یک پایه متعامد یک^۲ برای فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $\mathcal{H}$ ، دنباله‌ای مانند $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ است که دارای ویژگی‌های زیر باشد

$$1. \quad \langle w_k, w_j \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{kj}, k, j \in \mathbb{N}$$

$$2. \quad \|w_k\|_{\mathcal{H}} = 1, k \in \mathbb{N}$$

$$3. \quad \text{برای } \xi \in \mathcal{H} \text{ و } c_k = \langle \xi, w_k \rangle_{\mathcal{H}}, \xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k.$$

تذکر ۲۳.۲. به سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k$ موجود در نمایش عضو $\xi \in \mathcal{H}$ سری فوریه^۳ تعمیم یافته گوئند و اعداد $c_k = (\xi, w_k)$ ضرایب فوریه عضو ξ بر حسب پایه $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ نامیده می‌شوند. همچنین

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi, w_k)_{\mathcal{H}}^2, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

قضیه ۲۴.۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یک^۲ در H باشد. آنگاه

(۱) برای هر $x \in H$ رابطه $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ که نامساوی بسل^۴ نامیده می‌شود، برقرار است.

(۲) احکام زیر معادل هستند:

(الف) $\{e_k\}$ یک پایه متعامد است.

(ب) برای هر $x \in H$ $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$

-
1. separable Hilbert space
 2. orthonormal basis
 3. Fourier series
 4. Bessel's inequality

(پ) برای هر $x \in H$ ، $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$. این رابطه تساوی پارسوال^۱ نامیده می‌شود.

گزاره ۲۵.۲. هر فضای هیلبرت جدایی‌پذیر یک پایه متعامد یکه دارد.

در پایان این زیربخش، به بیان قضیه مشهور نمایش ریس^۲ می‌پردازیم.

قضیه ۲۶.۲. (نمایش ریس) فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. برای هر عضو $g \in \mathcal{H}^*$ عضو منحصر به فرد $h_g \in \mathcal{H}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|g\|_{\text{op}} = \|h_g\|_{\mathcal{H}}$ و برای هر $h \in \mathcal{H}$ ، $\langle h, g \rangle = \langle h, h_g \rangle_{\mathcal{H}}$.

قضیه بالا بیانگر برقراری یکرختی‌های زیر $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}^{**}$ است. فضاهای هیلبرت فوق بازتابی، هموار و به‌طور یکنواخت محدب هستند.

۳.۱.۲ L^p - فضاهای

این قسمت غالباً برگرفته از بخش ۷.۱ از کتاب [۱۹] است. در اینجا تلاش می‌شود که کوتاه‌ترین مسیر ممکن (با حفظ پیوستگی) برای ارائه مطالب در مورد L^p - فضاهای در پیش گرفته شود. در سراسر این کتاب برای عدد $p \in [1, \infty]$ ، فرض می‌کنیم عدد p' نشان دهنده مزدوج اسکالر آن باشد، یعنی $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

برای مجموعه X خانواده Δ_X از زیرمجموعه‌های X را یک σ -جبر می‌نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

$$1. X \in \Delta_X$$

$$2. \text{ اگر } A \in \Delta_X, \text{ آنگاه } A^c \in \Delta_X$$

$$3. \text{ برای خانواده } \{A_k; k \in \mathbb{N}\} \text{ از } \Delta_X, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ به } \Delta_X \text{ متعلق است.}$$

تابع $\mu: \Delta_X \rightarrow [0, \infty]$ را یک اندازه می‌نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد.

$$1. \text{ برای } A \in \Delta_X, \mu(A) \geq 0$$

-
1. Parseval's identity
 2. Riesz representation theorem

$$\mu(\emptyset) = 0. \quad 2.$$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \quad 3.$$

به زیرمجموعه‌هایی مانند A مشمول در X که $\mu(A) = 0$ مجموعه μ - پوچ^۱ گفته می‌شود. حال اگر Δ_X یک σ -جبر از زیرمجموعه‌های X و μ یک اندازه باشد، آنگاه دوتایی (X, μ) (و یا هنگام تاکید روی σ -جبر، سه تایی (X, Δ_X, μ)) را یک فضای اندازه می‌نامیم. همچنین، زیر مجموعه A مشمول در X را یک مجموعه اندازه پذیر گوئیم، هرگاه $A \in \Delta_X$. فرض کنید $f: (X, \Delta_X, \mu) \rightarrow (Y, \Delta_Y, \nu)$ نشان دهنده یک تابع روی فضاهای اندازه (X, Δ_X, μ) و (Y, Δ_Y, ν) باشد. می‌گوئیم f اندازه پذیر است، هرگاه برای هر B در Δ_Y ، مجموعه $f^{-1}(B) \in \Delta_X$. در اینجا برای زیرمجموعه B مشمول در Y منظور از $f^{-1}(B)$ تصویر معکوس زیرمجموعه B تحت تابع f است. به‌طور دقیق‌تر $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. فرض کنید (X, τ_X) یک فضای توپولوژیکی و B نشان دهنده σ -جبر تولید شده توسط خانواده τ_X باشد، که در واقع اشتراک همه σ -جبرهای شامل τ_X بوده و در نتیجه کوچکترین آن‌ها است. خانواده B را σ -جبر بورل^۲ و هر اندازه ای که روی σ -جبر B تعریف شود را یک اندازه بورل^۳ می‌نامند. در اینجا فهرستی از ویژگی‌های یک اندازه بورل را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲۷.۲. فرض کنید (X, B, μ) یک اندازه بورل باشد. آنگاه می‌گوئیم اندازه μ

۱. روی مجموعه‌های فشرده متناهی است، هرگاه برای هر زیرمجموعه فشرده K ، $\mu(K) < \infty$.

۲. منظم درونی^۴ است، هرگاه برای هر $A \in B$ ،

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq A \text{ و } K \text{ فشرده} \}.$$

۳. منظم بیرونی^۵ است، هرگاه برای هر $A \in B$ ،

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(O) : A \subseteq O \text{ و } O \text{ باز} \}$$

-
1. μ -null
 2. Borel σ -algebra
 3. Borel measure
 4. inner regular
 5. outer regular

۴. منظم است، هرگاه منظم درونی و بیرونی باشد.

۵. موضعاً متناهی^۱ است، هرگاه برای هر نقطه $x \in X$ ، یک همسایگی U از x وجود داشته باشد به طوری که $\mu(U) < \infty$. به عبارت دیگر، هر نقطه از X دارای یک همسایگی با اندازه متناهی باشد.

۶. رادون^۲ است، هرگاه منظم و موضعاً متناهی باشد.

یکی از اندازه‌های معروف روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ اندازه لبگ^۳ است که از همه صفات ذکر شده در بالا برخوردار بوده و یک اندازه رادون است. در واقع اندازه لبگ اندازه‌ای است که به هر بازه به صورت $I = [a, b]$ (یا $I = (a, b)$ و غیره) مقدار طول بازه یعنی $b - a$ را اختصاص می‌دهد و برای هر زیرمجموعه A در $\mathbb{R}$ اندازه بیرونی لبگ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\}.$$

می‌گوییم زیرمجموعه A در $\mathbb{R}$ در شرط کاراتئودوری^۴ صدق می‌کند، هرگاه

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad E \subseteq \mathbb{R}.$$

می‌توان نشان داد که خانواده همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ که در شرط کاراتئودوری صدق می‌کنند، تشکیل یک σ -جبر می‌دهد و اندازه لبگ برای اعضای این σ -جبر همان اندازه خارجی لبگ خواهد بود.

اندازه علامت دار^۵ روی فضای (X, Δ_X) نگاشتی مانند $[-\infty, \infty]$ با $\nu : \Delta_X \rightarrow [-\infty, \infty]$ خواص زیر است.

$$\nu(\emptyset) = 0. \quad ۱.$$

-
1. locally finite
 2. Radon
 3. Lebesgue measure
 4. Carathéodory criterion
 5. signed measure

$$2. \nu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

توجه می‌کنیم که ν یکی از دو مقدار " ∞ " یا " ∞ " را می‌تواند اخذ کند. در قضیه تجزیه جردن^۱ ثابت می‌شود که هر اندازه علامت‌دار را می‌توان به صورت تفاضل دو اندازه مثبت به صورت یکتا تجزیه کرد.

اندازه مختلط^۲ $\mu : \Delta_X \rightarrow \mathbb{C}$ نگاشتی است که همانند اندازه علامت دار دارای دو خاصیت بیان شده در بالا بوده و همچنین قابل تجزیه به صورت $\nu + i\lambda$ است که در آن ν و λ اندازه‌های علامت دار هستند.

تابع $\mathbb{C} \rightarrow (X, \mu) : f$ را μ -اندازه پذیر (یا اندازه پذیر) گوئیم، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه بورل $B \subseteq \mathbb{C}$ مجموعه $f^{-1}(B)$ مجموعه ای μ -اندازه پذیر باشد. قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۲۸.۲. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه باشد و $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ توابع اندازه‌پذیر باشند. آنگاه

۱. تابع $f + g$ اندازه‌پذیر است.

۲. تابع $f \cdot g$ اندازه‌پذیر است.

۳. برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، تابع αf اندازه‌پذیر است.

۴. توابع $f^+ = \max(f, 0)$ و $f^- = -\min(f, 0)$ اندازه‌پذیرند.

۵. تابع $|f|$ اندازه‌پذیر است.

قضیه بالا نشان می‌دهد مجموعه توابع اندازه پذیر حقیقی یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهند. فضای برداری همه چنین توابعی را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

می‌گوئیم دو تابع f و g ، μ -تقریباً همه جا^۳ برابرند و می‌نویسیم $f \sim g$ هرگاه مجموعه $\{x \in X : f \neq g\}$ مجموعه ای μ -پوچ باشد. توجه می‌کنیم که رابطه " $\sim$ " یک رابطه هم‌ارزی روی فضای $B(X)$ تعریف می‌کند. منظور ما از فضای برداری $B(X)$ ، فضای خارج قسمتی نسبت به این رابطه هم‌ارزی است.

1. Jordan decomposition theorem

2. complex measure

3. μ -almost everywhere

در این کتاب با فضاهایی سروکار داریم که به نحوی با دسته خاصی از توابع اندازه پذیر در ارتباط هستند. برای ما فضای همه توابع انتگرال پذیر لبگ^۱ حائز اهمیت است. برای این منظور تعریف یک تابع ساده^۲ را ارائه می‌کنیم. برای زیرمجموعه $A \subseteq X$ تابع مشخصه^۳ مجموعه A را با χ_A نشان داده و به صورت

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. تابع ساده $s : (X, \Delta_X, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی به شکل

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}, \quad (A_k)_{k=1}^n \subseteq \Delta_X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

است. انتگرال این تابع نسبت به اندازه μ به صورت

$$\int_X \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k).$$

محاسبه می‌شود. مجموعه همه توابع ساده به روی فضای اندازه (X, μ) را با $S(\mu)$ نشان می‌دهیم.

می‌دانیم که برای هر تابع نامنفی اندازه پذیر و در نتیجه برای هر تابع اندازه پذیر مختلط مقدار مانند $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ، دنباله ای از توابع ساده مانند $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ موجود است به طوری که

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n(x) d\mu(x),$$

که رابطه بالا، تعریف انتگرال لبگ یک تابع اندازه پذیر است. مقدار انتگرال سمت راست می‌تواند بی نهایت شود. در حالتی که این مقدار متناهی شود، تابع اندازه پذیر f را یک تابع μ -انتگرال پذیر (یا برای سادگی انتگرال پذیر) می‌گویند. حال با ارائه تعریف زیر گام نخست را برمی‌داریم.

-
1. Lebesgue integrable
 2. simple function
 3. characteristic function

تعریف ۲۹.۲. فرض کنید فضای (X, μ) یک فضای اندازه باشد و $p \in [1, \infty)$. تابع $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع p -انتگرال پذیر^۱ می‌نامیم، هرگاه یک تابع μ -اندازه پذیر بوده و تابع $|f|^p$ یک تابع μ -انتگرال پذیر باشد، یعنی

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

فضای همه توابع p -انتگرال پذیر را با $\mathfrak{L}_p(X, \mu)$ (و یا برای سادگی با $\mathfrak{L}_p(X)$) نشان می‌دهیم. برای $f \in \mathfrak{L}_p(X)$ تعریف کنید

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

آنگاه $\|\cdot\|_p$ یک نیم-نرم روی $\mathfrak{L}_p(X)$ تعریف می‌کند.

برای ارائه تعریف توابع ضرورتاً کراندار^۲ نیاز به توضیح مفهوم مجموعه‌های μ -اندازه پذیر موضعی^۳ (یا برای سادگی اندازه پذیر موضعی) و μ -پوچ موضعی^۴ (یا برای سادگی پوچ موضعی) است.

زیرمجموعه A از X را یک مجموعه μ -اندازه پذیر موضعی می‌نامند، هرگاه برای هر مجموعه μ -اندازه پذیر با $\mu(B) < \infty$ ، مجموعه $A \cap B$ یک مجموعه μ -اندازه پذیر باشد. همچنین زیرمجموعه A از X را μ -پوچ می‌نامیم، هرگاه برای هر مجموعه μ -اندازه پذیر با $\mu(B) < \infty$ ، مجموعه $A \cap B$ یک مجموعه μ -پوچ باشد.

تابع مختلط مقدار $\mathbb{C} \rightarrow (X, \mu) : f$ را μ -اندازه پذیر موضعی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه بورل $B \subseteq \mathbb{C}$ مجموعه $f^{-1}(B)$ اندازه‌پذیر موضعی باشد. فضای همه چنین توابعی را با $B^{\text{loc}}(X)$ نشان می‌دهیم.

گوییم دو تابع f و g موضعاً μ -تقریباً همه جا^۵ برابرند و می‌نویسیم $g \sim^{\text{loc}} f$ هرگاه مجموعه $\{x \in X : f \neq g\}$ مجموعه ای μ -پوچ موضعی باشد. توجه می‌کنیم که رابطه

-
1. p -integrable
 2. essentially bounded functions
 3. local μ -measurable
 4. local μ -null
 5. locally μ -almost everywhere

” $\sim^{\text{loc}}$ ” یک رابطه هم‌ارزی روی فضای $B^{\text{loc}}(X)$ تعریف می‌کند. حال آماده تعریف زیر هستیم.

تعریف ۳۰.۲. تابع μ -اندازه پذیر $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ را که خارج از یک مجموعه μ -پوچ موضعی به‌طور یکنواخت کراندار باشد، یک تابع اساساً کراندار می‌نامیم.

فضای همه توابع اساساً کراندار را با $\mathfrak{L}_{\infty}(X)$ نشان می‌دهیم.
برای $f \in \mathfrak{L}_{\infty}(X)$ تعریف کنید

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{r \geq 0 : |f| > r, \text{ پوچ موضعی } \mu\}$$

در این صورت، به $\|f\|_{\infty}$ سوپرمم اساسی^۱ تابع f گفته می‌شود و $\|\cdot\|_{\infty}$ یک نیم-نرم به روی این فضا است.

از آنجا که برای $p \in [1, \infty]$ نگاشت $\|\cdot\|_p$ یک نیم-نرم به روی فضای برداری $\mathfrak{L}_p(X)$ است، در نتیجه این نیم-نرم این فضا را به کلاس‌های هم‌ارزی افزای می‌کند. این کلاس‌های هم‌ارزی برای $p \in [1, \infty)$ توسط رابطه هم‌ارزی μ -تقریباً همه جا برابری و برای $p = \infty$ توسط رابطه هم‌ارزی موضعیاً μ -تقریباً همه جا برابری ایجاد می‌شوند. با در نظر گرفتن کامل شده فضای خارج قسمتی این فضا، به پیمانه فضای پوچ این نیم-نرم، به فضای باناخ $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ می‌رسیم. به‌طور دقیق‌تر قرار دهید

$$N_p = \{f \in \mathfrak{L}_p(X) : \|f\|_p = 0\}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$N_{\infty} = \{f \in \mathfrak{L}_p(X) : \|f\|_{\infty} = 0\}.$$

آنگاه نرم حاصل از کامل سازی فضای خارج قسمتی

$$\frac{\mathfrak{L}_p(X)}{N_p}, \quad p \in [1, \infty],$$

را همچنان با $\|\cdot\|_p$ نشان داده و کامل شده این فضا با این نرم را با $L^p(X)$ نشان می‌دهیم، که یک فضای باناخ است.

1. essential supremum

تعریف ۳۱.۲. برای عدد حقیقی p در $[1, \infty]$ ، فضای $L^p(X)$ را فضای کلاس‌های هم‌ارزی توابع p -انتگرال‌پذیر (برای $p = \infty$ کلاسهای هم‌ارزی توابع μ -ضرورتاً کراندار) می‌نامیم که رابطه هم‌ارزی روی آن رابطه μ -تقریباً همه جا برابری (برای $p = \infty$ رابطه μ -تقریباً همه جا برابری موضعی) است.

زمان آن فرا رسیده که قضیه مهم زیر را ارائه کنیم.

قضیه ۳۲.۲ (نامساوی هولدر^۱). فرض کنید $p \in [1, \infty]$ و توابع $f \in \mathfrak{L}_p(X)$ و $g \in \mathfrak{L}_{p'}(X)$ را در نظر بگیرید. در این صورت $f, g \in \mathfrak{L}_1(X)$ و $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

قضیه ۳۳.۲. فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه باشد و $p \in [1, \infty]$. آنگاه نگاشت $\Phi : L^p(X)^* \rightarrow L^{p'}(X)$ با ضابطه $\Phi(f) := \Phi_f$ که در آن $\Phi_f : L^p(X) \rightarrow \mathbb{C}$ و

$$\Phi_f(g) = \langle g, \Phi_f \rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu(x), \quad g \in L^p(X),$$

یک نشان دادن طولی^۲ است. در حالتی که $1 < p < \infty$ فضای اندازه اجتماعی شمارا از مجموعه‌های با اندازه متناهی است، این نگاشت پوشا بوده و برای $1 < p < \infty$ ، $L^p(X)^* \cong L^{p'}(X)$.

حال به توصیف فضاهایی شامل توابع بردار-مقدار^۳ می‌پردازیم. این فضاها تعمیمی از فضاهای $L^p(X)$ و $L^\infty(X)$ هستند. فرض کنید (X, μ, Δ_X) یک فضای اندازه و $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. تابع $s : X \rightarrow V$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع μ -پله ای^۴ می‌نامیم.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(x)v_k, \quad (A_k)_{k=1}^n \subseteq \Delta_x, \quad (v_k)_{k=1}^n \subseteq V.$$

-
1. Hölder Inequality
 2. isometric embedding
 3. vector-valued functions
 4. μ -step function

همچنین انتگرال این دسته از توابع به صورت زیر است

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) v_k \in V.$$

تابع $f : X \rightarrow V$ را یک تابع μ -اندازه پذیر (یا قویاً μ -اندازه پذیر^۱) گویند، هرگاه برای هر زیرمجموعه $A \in \Delta_X$ دنباله $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از توابع μ -ساده موجود باشد به طوری که برای μ -تقریباً همه $x \in A$ همگرایی زیر برقرار باشد

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

فضای همه چنین توابعی را با $B(X, V)$ نمایش می دهیم. تابع $f : X \rightarrow V$ را یک تابع μ -اندازه پذیر موضعی (یا قویاً μ -اندازه پذیر موضعی^۲) گویند، هرگاه برای هر زیرمجموعه $A \in \Delta_X$ دنباله $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از توابع μ -ساده موجود باشد به طوری که برای μ -موضعیاً تقریباً همه $x \in A$ همگرایی زیر برقرار باشد

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

فضای همه این توابع را با $B^{\text{loc}}(X, V)$ نمایش می دهیم. حال به تعمیم دو رابطه هم ارزی $\sim^{\text{loc}}$ و می پردازیم. گوئیم دو تابع μ -اندازه پذیر f و g از فضای $B(X, V)$ ($B^{\text{loc}}(X, V)$) μ -تقریباً همه جا (موضعیاً μ -تقریباً همه جا) برابرند و می نویسیم $f \sim^{\text{loc}} g$ هرگاه برای μ -تقریباً همه x ها (موضعیاً μ -تقریباً همه x ها)، $\|f(x) - g(x)\|_V = 0$.

تعریف ۳۴.۲. فرض کنید V یک فضای باناخ و (X, μ) یک فضای اندازه باشد.

۱. توابع μ -اندازه پذیر مانند $f : X \rightarrow V$ که برای آنها تابع $\|f(\cdot)\|_V^p$ یک تابع μ -انتگرال پذیر است، را با نماد $\mathfrak{L}_p(X, V)$ (یا برای سادگی $\mathfrak{L}_p(V)$) نمایش می دهیم.

1. strongly μ -measurable
2. local strongly μ -measurable

فضای خارج قسمتی این فضا نسبت به رابطه هم‌ارزی حاصل از توابع μ -پوچ « $\sim$ »
یعنی فضای $L^p(X, V) = \mathfrak{L}_p(X, V) / \sim$ (یا به اختصار $L^p(V)$) مجهز به نرم

$$\|[f]\|_p := \left(\int_X \|f(x)\|_V^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad [f] \in L^p(V)$$

فضای توابع p -انتگرال‌پذیر باختر^۱ را تشکیل می‌دهند.

۲. برای $p = \infty$ فضای $\mathfrak{L}_\infty(X, V)$ و یا به اختصار $\mathfrak{L}_\infty(V)$ فضای همه توابع
 μ -ضرورتاً کراندار و μ -اندازه‌پذیر موضعی مانند $f: X \rightarrow V$ تعریف می‌شود
و فضای خارج قسمتی $L^\infty(X, V) = \mathfrak{L}_\infty(X, V) / \sim^{\text{loc}}$ به همراه نرم

$$\|[f]\|_\infty = \text{ess sup } \|f(\cdot)\|_V, \quad [f] \in L^\infty(V)$$

متشکل از همه کلاس‌های هم‌ارزی نسبت به توابع μ -پوچ موضعی است.

گزاره ۳۵.۲. فرض کنید X یک فضای اندازه و V یک فضای باناخ باشد. آنگاه

۱. برای دو تابع $f \in \mathfrak{L}_p(X, V)$ و $g \in \mathfrak{L}_{p'}(X, V^*)$ تابع $\langle f(x), g(x) \rangle$ به $x \in X$ به $\mathfrak{L}_1(X)$
متعلق است. همچنین نامساوی هولدر برقرار است؛ یعنی

$$\|\langle f, g \rangle\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

۲. برای $p \in [1, \infty]$ فضای $L^p(X, V)$ یک فضای باناخ است.

۳. برای $p \in [1, \infty]$ نگاشت طبیعی $\Phi: L^{p'}(X, V^*) \rightarrow L^p(X, V)^*$ که به صورت

$$\langle g, \Phi(f) \rangle = \int_X \langle g(x), f(x) \rangle d\mu(x), \quad f \in L^{p'}(X, V^*), \quad g \in L^p(X, V),$$

تعریف می‌شود، طولی است و در حالتی که $p \in (1, \infty)$ و فضای باناخ V بازتابی باشد،
همسان‌ریختی $L^p(X, V)^* = L^{p'}(X, V^*)$ برقرار است.

1. Bochner p -integrable functions

نوع خاصی از L^p -فضاها در این کتاب مورد بررسی قرار می‌گیرند که به کمک مفاهیم بالا قابل توصیف هستند. فرض کنید $\mathbb{I}$ یک خانواده اندیس‌گذار باشد. فضای $L^p(\mathbb{I}, V)$ یا به اختصار $L^p(V)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^p(V) = \{(v_i)_{i \in \mathbb{I}} \subseteq V : \sum_{i \in \mathbb{I}} \|v_i\|^p < \infty\}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$L^\infty(V) = \{(v_i)_{i \in \mathbb{I}} \subseteq V : \sup_{i \in \mathbb{I}} \|v_i\| < \infty\}.$$

همچنین نرم روی این فضا به صورت زیر است

$$\|(v_i)_i\|_p = \left(\sum_{i \in \mathbb{I}} \|v_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|(v_i)_i\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{I}} \|v_i\|.$$

در حالتی که $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ اعضای فضای $L^p(V)$ دنباله‌ها هستند. در این حالت ($\mathbb{I} = \mathbb{N}$) اگر $V = \mathbb{C}$ آنگاه به جای نماد $L^p(V)$ از نماد L^p استفاده می‌کنیم. در آخر، اگر برای $n \in \mathbb{N}$ ، $V = \mathbb{C}$ و $\mathbb{I} = \{1, \dots, n\}$ آنگاه فضای $L^p(\{1, \dots, n\}, \mathbb{C})$ را با نماد L_p^n نشان می‌هیم که در واقع همان فضای $\mathbb{C}^n$ مجهز به نرم $\|\cdot\|_p$ است.

۴.۱.۲ -فضاها QSL_p

در این زیربخش به دسته دیگری از فضاهای باناخ می‌پردازیم. این فضاها از روی L^p -فضاها ساخته می‌شوند و تا «حد خوبی» حافظ خواص آنها هستند. برای این منظور، خود را به L^p -فضاها برای $p \in (1, \infty)$ محدود می‌کنیم. مراجع اصلی در این زیربخش، [۲۶] و [۵۶] هستند.

تعریف ۳۶.۲. فرض کنید $p \in (1, \infty)$.

۱. فضای باناخ E را یک L^p -فضا می‌نامیم، هرگاه برای دست‌کم یک فضای اندازه (X, μ) ، با فضای $L^p(X)$ به طور طولیاً یکریخت باشد.

۲. فضای باناخ E را یک QSL_p -فضا می‌نامیم، هرگاه با یک فضای خارج قسمتی از یک زیرفضای یک L^p -فضا به طور طولیاً یکریخت باشد. در واقع، دست‌کم یک فضای اندازه (X, μ) وجود داشته باشد به طوری که

$$E \cong E_\infty / E_\infty, \quad E_\infty \subseteq E_1 \subseteq L^p(X).$$

در این قسمت برای $p \in (1, \infty)$ به ارائه مفاهیم و نتایجی در مورد جمع مستقیم QSL_p - فضاها می‌پردازیم. برای این منظور احکامی را که ممکن است در حالت کلی برای هر فضای باناخی برقرار نباشد را در حالت خاص برای این دسته از فضاها بیان می‌کنیم. منظور از L^p - جمع مستقیم دو QSL_p - فضا مانند E و F فضای برداری

$$E \oplus F = \{\xi \oplus \zeta : \xi \in E, \zeta \in F\},$$

مجهز شده به نرم زیر است

$$\|\xi \oplus \zeta\|_p = (\|\xi\|_E^p + \|\zeta\|_F^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \xi \oplus \zeta \in E \oplus F.$$

کامل شده فضای جمع مستقیم جبری $E \oplus F$ به همراه این نرم را با $E \oplus_p F$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۷.۲. برای دو QSL_p - فضا مانند E و F ، فضای $E \oplus_p F$ یک QSL_p - فضا بوده و یکسانریختی زیر برقرار است

$$(E \oplus_p F)^* = E^* \oplus_{p'} F^*. \quad (5.2)$$

در حالتی که QSL_p - فضای E به صورت ذکر شده در قسمت (۲) از تعریف ۳۶.۲ باشد، یعنی $E = \frac{E_1}{E_2}$ ، آنگاه $E_1 = E \oplus_p E_2$. همچنین به سادگی دیده می‌شود که $E_2 = (E^*)^\perp$ ، $E = (E_2^\perp)^*$ برای خانواده $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ از QSL_p - فضاها L^p - جمع مستقیم آنها را با $L^p - \oplus_{i \in \mathbb{I}} E_i$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^p - \oplus_{i \in \mathbb{I}} E_i = \{(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}} : \|(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}}\| = \left(\sum_{i \in \mathbb{I}} \|\xi_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

برای اینکه نرم عضو $(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}}$ متناهی شود، نیاز است حداکثر تعداد شمارا از ξ_i ها مخالف صفر باشند. همچنین مشابه رابطه (۵.۲) داریم

$$(L^p - \oplus_{i \in \mathbb{I}} E_i)^* = L^{p'} - \oplus_{i \in \mathbb{I}} E_i^*.$$

تذکر ۳۸.۲. در ادامه فهرستی از ویژگی‌های QSL_p - فضاها را ارائه می‌دهیم.

۱. هر QSL_p - فضا زیر فضایی از فضای خارج قسمتی از یک L^p - فضا است.

۲. زیرفضای بسته از یک QSL_p -فضا یک QSL_p -فضا است.
۳. فضای خارج قسمتی یک QSL_p -فضا به پیمانه زیرفضایی بسته از خود، یک QSL_p -فضا است.
۴. اگر $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ یک خانواده از QSL_p -فضاها باشد، آنگاه L^p -جمع مستقیم آنها یعنی فضای $L^p - \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} E_i$ یک QSL_p -فضا است.
۵. اگر E یک QSL_p -فضا باشد، آنگاه فضای E^* یک $QSL_{p'}$ -فضا است. همچنین هر QSL_p -فضا یک فضای بازتابی است.
۶. بنا بر قضیه ۳.۹۰ از [۲۶] برای هر فضای اندازه (X, μ) ، فضای $L^p(X)$ یک فضای به طور یکنواخت محدب است. در نتیجه بنا بر ملاحظه ۱۵.۲ هر QSL_p -فضا مانند E به طور یکنواخت محدب بوده و فضای E^* یک فضای هموار است.

۵.۱.۲ ابر فیلترها و فضاهای ابرتوان

در این زیربخش توصیفی بسیار کوتاه از ابرفیلتر^۱ ها و فضای ابرتوان^۲ یک فضای باناخ را ارائه می دهیم. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می توانید [۳۴] را مطالعه کنید. در سراسر این بخش مجموعه $\mathbb{I}$ مجموعه ای است که فیلتر^۳ ها روی آن در نظر گرفته می شوند که می تواند یک مجموعه اندیس گذار باشد.

تعریف ۳۹.۲. برای مجموعه $\mathbb{I}$ یک فیلتر مانند $\mathcal{V}$ یک خانواده از زیرمجموعه های $\mathbb{I}$ بوده که دارای ویژگی های زیر است

$$1. \quad \emptyset \notin \mathcal{V} \text{ و } \mathbb{I} \in \mathcal{V}$$

$$2. \quad \text{برای هر } A \text{ و } B \text{ متعلق به } \mathcal{V} \text{ داریم } A \cap B \in \mathcal{V}$$

$$3. \quad \text{اگر } A \in \mathcal{V} \text{ و } A \subseteq B \text{ آنگاه } B \in \mathcal{V}$$

-
1. ultrafilter
 2. ultrapower space
 3. filter

فرض کنید $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ دو فیلتر روی مجموعه $\mathbb{I}$ باشند. می‌گوییم فیلتر $\mathcal{U}$ بر فیلتر $\mathcal{V}$ غلبه می‌کند^۱ هرگاه $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

تعریف ۴۰.۲. فیلتر $\mathcal{U}$ به روی مجموعه $\mathbb{I}$ را یک ابرفیلتر می‌نامیم، هرگاه هر فیلتر غلبه کننده بر آن با آن مساوی باشد.

در ادامه لیستی از ابرفیلترهای خاص را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۴۱.۲. گوییم ابرفیلتر $\mathcal{U}$

۱. اصلی^۲ (بدیهی^۳ یا غیر آزاد^۴) است، هرگاه توسط یک عضو مانند $i_0 \in \mathbb{I}$ مشخص شود. به‌طور دقیق‌تر دارای این خاصیت باشد که $A \in \mathcal{U}$ ، اگر و تنها اگر $i_0 \in A$.

۲. آزاد^۵ (غیر بدیهی^۶) است، هرگاه $\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A = \emptyset$.

حال یک نوع از محاسبه حد را توضیح می‌دهیم که ابرحد^۷ نام دارد. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و $(x_i)_{i \in \mathbb{I}} \in \prod_{i \in \mathbb{I}} X$ یک تور باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{U}$ یک ابرفیلتر روی مجموعه $\mathbb{I}$ باشد. گوییم ابرحد تور $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ عضو $x_0 \in X$ است، هرگاه به ازای هر همسایگی U از x_0

$$\mathbb{I}_U = \{i \in \mathbb{I} : x_i \in U\} \in \mathcal{U}.$$

اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی (هاسدورف) و فشرده باشد، آنگاه هر تور $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ در $\prod_{i \in \mathbb{I}} X$ دارای ابرحد منحصر به فرد است. حال برای مجموعه اندیس‌گذار $\mathbb{I}$ فرض کنید $(V_i)_{i \in \mathbb{I}}$ خانواده‌ای از فضاهای باناخ باشد. فضای

$$L^\infty(\mathbb{I}, V_i) = \{(v_i)_{i \in \mathbb{I}} : \sup \|v_i\|_{V_i} < \infty\},$$

-
1. $\mathcal{U}$ dominates $\mathcal{V}$
 2. principal
 3. trivial
 4. non-free
 5. free
 6. non-trivial
 7. ultralimit

به همراه نرم

$$\|(v_i)_i\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{I}} \|v_i\|_{V_i}, \quad (v_i)_i \in L^\infty(\mathbb{I}, V_i),$$

یک فضای باناخ است.

برای تور دلخواه $(v_i)_{i \in \mathbb{I}} \in L^\infty(\mathbb{I}, V_i)$ قرار دهید $M = \sup_{i \in \mathbb{I}} \|v_i\|_{V_i}$. با توجه به تعریف فضای $L^\infty(\mathbb{I}, V_i)$ می‌دانیم $M < \infty$ و تور عددی $(\|v_i\|_{V_i})_i$ به فضای $\prod_{i \in \mathbb{I}} X$ متعلق بوده که در آن $X = [0, M]$ یک فضای فشرده است. در نتیجه ابرحد $\lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_{V_i}$ موجود است. قرار دهید

$$N_{\mathcal{U}} = \{(v_i)_i \in L^\infty(\mathbb{I}, V_i) : \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_{V_i} = 0\}.$$

می‌توان ثابت کرد که $N_{\mathcal{U}}$ یک زیرفضای بسته از $L^\infty(\mathbb{I}, V_i)$ است. در نتیجه می‌توان این فضا را به پیمانه $N_{\mathcal{U}}$ افراز کرد که به رابطه هم‌ارزی زیر منجر می‌شود

$$(v_i)_i \sim (v'_i)_i \iff \lim_{\mathcal{U}} \|v_i - v'_i\|_{V_i} = 0, \quad (v_i)_i, (v'_i)_i \in L^\infty(\mathbb{I}, V_i).$$

تعریف ۴۲.۲. برای مجموعه اندیس‌گذار $\mathbb{I}$ و خانواده‌ای از فضاهای باناخ مانند $(V_i)_{i \in \mathbb{I}}$ فضای خارج قسمتی $L^\infty(\mathbb{I}, V_i)/N_{\mathcal{U}}$ را فضای ابرضرب^۱ خانواده $(V_i)_{i \in \mathbb{I}}$ نسبت به ابرفیلتر $\mathcal{U}$ (روی مجموعه $\mathbb{I}$) نامیده و با نماد $(V_i)_{\mathcal{U}}$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید که فضای $(V_i)_{\mathcal{U}}$ یک فضای خارج قسمتی است. در نتیجه اعضای این فضا کلاس‌های هم‌ارزی هستند و کلاس هم‌ارزی یک عضو مانند $(v_i)_i \in L^\infty(\mathbb{I}, V_i)$ را به صورت $(v_i)_{\mathcal{U}}$ نشان داده و نرم آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\|(v_i)_{\mathcal{U}}\| = \inf_{(a_i)_{\mathcal{U}}} \|(v_i - a_i)\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{I}} \inf_{(a_i)_{\mathcal{U}}} \|v_i - a_i\|_{V_i}.$$

گزاره ۴۳.۲. برای خانواده $(V_i)_{i \in \mathbb{I}}$ از فضاهای باناخ و ابرفیلتر $\mathcal{U}$ روی مجموعه $\mathbb{I}$ ، نرم روی فضای ابرضرب $(V_i)_{\mathcal{U}}$ به طور معادل از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\|(v_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|v_i\|_{V_i}, \quad (v_i)_{\mathcal{U}} \in (V_i)_{\mathcal{U}}.$$

1. ultraproduct space

توجه کنید در حالتی که ابرفیلتر $\mathcal{U}$ اصلی باشد و توسط عضو $i_0 \in \mathbb{I}$ تولید شده باشد،
 $(V_i)_{\mathcal{U}} \cong V_{i_0}$.

تعریف ۴۴.۲. اگر برای هر $i \in \mathbb{I}$ ، $V_i = V$ ، آنگاه فضای $(V)_{\mathcal{U}} = V^{\mathbb{I}}/N_{\mathcal{U}}$ را فضای ابرتوان^۱ فضای باناخ V می‌نامیم.

حال که مفاهیم مربوط به فضای ابرضربها و ابرفیلترها را معرفی کردیم، به معرفی ابرضرب عملگرها می‌پردازیم. فرض کنید $(V_i)_{i \in \mathbb{I}}$ و $(W_i)_{i \in \mathbb{I}}$ دو خانواده از فضاهای باناخ روی یک مجموعه اندیس‌گذار مشترک $\mathbb{I}$ باشند. برای هر $i \in \mathbb{I}$ فرض کنید $T_i \in \mathcal{B}(V_i, W_i)$ T_i طوری باشد که $\sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\| < \infty$.

در این صورت عملگر $(T_i)_{\mathcal{U}} : (V_i)_{\mathcal{U}} \rightarrow (W_i)_{\mathcal{U}}$ با تعریف $(T_i)_{\mathcal{U}}((v_i)_{\mathcal{U}}) = (T_i(v_i))_{\mathcal{U}}$ ، برای $(v_i)_{\mathcal{U}} \in (V_i)_{\mathcal{U}}$ خوش تعریف بوده و داریم $(T_i)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{B}((V_i)_{\mathcal{U}}, (W_i)_{\mathcal{U}})$. همچنین $\|(T_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|T_i\|$. در حالت کلی شمول $(V_i^*)_{\mathcal{U}} \subseteq (V_i)_{\mathcal{U}}^*$ برای خانواده $(V_i)_{i \in \mathbb{I}}$ از فضاهای باناخ و ابرفیلتر $\mathcal{U}$ روی $\mathbb{I}$ به صورت طولیا با استفاده از رابطه دوگانی زیر برقرار است

$$\langle (v_i)_{\mathcal{U}}, (s_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle v_i, s_i \rangle, \quad (v_i)_{\mathcal{U}} \in (V_i)_{\mathcal{U}}, \quad (s_i)_{\mathcal{U}} \in (V_i^*)_{\mathcal{U}}.$$

و در حالتی که V_i ها فوق بازتابی باشند، این شمول به تساوی طولیای زیر تبدیل می‌شود

$$(V_i)_{\mathcal{U}}^* = (V_i^*)_{\mathcal{U}}.$$

یکی از حقایق ساده در مورد فضای ابرتوان $(V)_{\mathcal{U}}$ این است که هر ابرفیلتر $\mathcal{U}$ ، به صورت طولیا شامل فضای باناخ V است. در واقع، نگاشت خطی

$$J : V \rightarrow (V)_{\mathcal{U}}, \quad J(v) = (v_i)_{\mathcal{U}}, \quad v_i = v, \quad i \in \mathbb{I}$$

به وضوح طولیا است.

در حالتی که V فوق بازتابی باشد و $(V)_{\mathcal{U}}^* = (V^*)_{\mathcal{U}}$ آنگاه اثر این عضو روی عضو $J(v)$ به صورت زیر است

$$\langle J(v), (s_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle v, s_i \rangle.$$

1. ultrapower

حال نگاشت طولپای $\kappa_V : V \rightarrow V^{**}$ در رابطه (۳.۲)، را یادآوری می‌کنیم. می‌دانیم که گوی واحد فضای V^{**} برای هر فضای باناخ V نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره فشرده است (که وجود حد زیر را نتیجه می‌دهد). در نتیجه نگاشت

$$\mathcal{J} : (V)_{\mathcal{U}} \rightarrow V^{**}, \quad \mathcal{J}((v_i)_{\mathcal{U}}) = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \kappa_V(v_i), \quad (v_i)_{\mathcal{U}} \in (V)_{\mathcal{U}},$$

خوش تعریف و انقباضی است. همچنین داریم

$$\langle s, \mathcal{J}((v_i)_{\mathcal{U}}) \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle v_i, s \rangle, \quad s \in V^*, \quad (v_i)_{\mathcal{U}} \in (V)_{\mathcal{U}}.$$

قضیه بعد، یکی از قضایای مهم و کاربردی در مورد ابرفیلترها و فضاهای ابرتوان است. برای دیدن اثبات و مفاهیم مرتبط دیگر می‌توانید به مقاله [۳۴] مراجعه کنید. در اینجا برای یک فضای باناخ V و زیرفضای W از آن نگاشت خطی $P : V \rightarrow W$ را یک تصویر^۱ می‌نامیم هرگاه $P|_W = \text{id}_W$.

قضیه ۴۵.۲. فرض کنید V یک فضای باناخ باشد. آنگاه ابرفیلتر $\mathcal{U}$ و نگاشت خطی و طولپای $\bar{\mathcal{J}} : V^{**} \rightarrow (V)_{\mathcal{U}}$ موجود هستند به طوری که

$$\bar{\mathcal{J}}|_V = \mathcal{J}. \quad ۱.$$

$$\mathcal{J} \circ \bar{\mathcal{J}} = \text{id}_{V^{**}}. \quad ۲.$$

۳. نگاشت $\bar{\mathcal{J}} \circ \mathcal{J}$ یک تصویر با نرم یک از فضای $(V)_{\mathcal{U}}$ به روی فضای $\bar{\mathcal{J}}(V^{**})$ است.

در آخر این زیربخش نتیجه مهم زیر را ارائه می‌کنیم.

گزاره ۴۶.۲. فضای ابرتوان هر QSL_p -فضا خود یک QSL_p -فضا است.

۶.۱.۲ جبرهای C^* و فون نویمان

جبرهای C^* و جبرهای فون نویمان از مهم‌ترین ساختارها در آنالیز تابعی و نظریه‌ی عملگرها هستند. این جبرها ارتباط عمیقی با فیزیک کوانتومی، نظریه‌ی نمایش و هندسه‌ی غیرجایایی

1. projection

دارند. در این زیربخش به معرفی قضایای پایه‌ای در ارتباط با C^* -جبرها^۱ و جبرهای فون نویمان^۲ می‌پردازیم و لیستی از تعاریف به هم پیوسته را (در برخی موارد به ناچار و برای شفافیت تعاریف) ارائه می‌کنیم. در اینجا عمدتاً از [۴۹] استفاده کرده ایم. نخست به توصیف اجمالی C^* -جبرها و جبرهای فون نویمان می‌پردازیم.

تعریف ۴۷.۲. فضای برداری $\mathcal{A}$ را به همراه عمل ضرب

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

یک جبر نرم‌دار^۳ می‌نامیم. اگر جبر نرم $\mathcal{A}$ دارای عضو همانی ضربی $1_{\mathcal{A}}$ باشد و $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$ آنگاه آن را جبر نرم دار یک دار^۴ می‌نامیم.

تعریف ۴۸.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر مختلط باشد.

۱. یک برگردان^۵ روی $\mathcal{A}$ یک نگاشت مزدوج-خطی مانند

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad a \mapsto a^*,$$

است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ ، $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$.

به جبر $\mathcal{A}$ به همراه این عمل یک جبر برگرداننده^۶ یا $*$ -جبر می‌گوییم.

۲. برای زیرمجموعه $S \subseteq \mathcal{A}$ قرار دهید $S^* = \{a^* : a \in S\}$. اگر $S^* = S$ آنگاه S را یک مجموعه خودالحاق^۷ می‌نامیم.

۳. یک $*$ -جبر باناخ $\mathcal{A}$ ، یک $*$ -جبر نرم‌دار کامل است که نرم آن دارای خاصیت زیر ضربی است؛ یعنی برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داریم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ و برای هر a در $\mathcal{A}$ ، تساوی $\|a^*\| = \|a\|$ برقرار است.

-
1. C^* -Algebras
 2. Von Neumann algebras
 3. normed algebra
 4. unital normed algebra
 5. involution
 6. involutive algebra
 7. self-adjoint

۴. یک C^* -جبر A یک $*$ -جبر باناخ است به طوری که برای هر عضو a در A تساوی $\|a^*a\| = \|a\|^2$ برقرار است.

۵. یک W^* -جبر یک C^* -جبر مانند M است که دوگان یک فضای باناخ است. یعنی فضای باناخ M_* موجود است به طوری که داریم $M = (M_*)^*$.

۶. برای فضای هیلبرت H یک جبر فون نویمان یک C^* -زیرجبر از فضای $B(H)$ است که شامل عملگر همانی بوده و نسبت به توپولوژی عملگری قوی بسته است.

تذکر ۴۹.۲. در حقیقت W^* -جبر تعریف مجرد جبر فون نویمان است. برای دیدن مفاهیم بیشتر در مورد این جبرها به [۱۵] و [۴۹] مراجعه کنید.

در ادامه به معرفی یک ترتیب جزئی^۱ روی C^* -جبرها می پردازیم.

تعریف ۵۰.۲. فرض کنید A یک جبر نرم دار باشد.

۱. عضو a در A را وارون پذیر می نامیم، هرگاه عضو b در جبر موجود باشد به طوری که $ab = ba = 1_A$ و در این حالت عضو b را با a^{-1} نشان می دهیم.

۲. مجموعه همه اعضای وارون پذیر A را با $\text{Inv}(A)$ نشان می دهیم؛ این مجموعه تحت عمل ضرب یک گروه است.

۳. طیف^۲ عضو a در A را با $\sigma(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_A - a \notin \text{Inv}(A)\}.$$

۴. عضو a در A را یک عضو هرمیتی^۳ می نامیم، هرگاه $a^* = a$.

۵. عضو a در A را یکانی^۴ می نامیم، هرگاه $a^*a = aa^* = 1_A$.

1. partial order

2. spectrum

3. hermitian

4. unitary

۶. عضو a در A را یک عضو مثبت^۱ می‌نامیم، هرگاه یک عضو هرمیتی بوده و $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$. همچنین مجموعه همه عناصر مثبت در A را با A_+ نشان می‌دهیم.

۷. برای دو عضو a و b در A می‌گوییم عضو b بزرگتر یا مساوی با عضو a است و می‌نویسیم $b \geq a$ ، هرگاه $b - a \in A_+$.

تعریف ۵۱.۲. فرض کنید A و B دو C^* -جبر باشند. در این صورت

۱. یک نگاشت خطی $m : A \rightarrow B$ بین دو C^* -جبر را یک نگاشت مثبت می‌نامیم، هرگاه $m(A_+) \subset B_+$.

۲. تابع $m : A \rightarrow \mathbb{C}$ روی C^* -جبر یکدار A را یک حالت^۲ می‌نامیم، هرگاه یک نگاشت مثبت بوده و دارای نرم یک باشد. مجموعه همه حالت‌ها به روی جبر باناخ A را با $S(A)$ نشان می‌دهیم

۳. تابع $m : A \rightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع ضربی^۳ می‌نامیم، هرگاه برای هر a, b در A ، $m(ab) = m(a)m(b)$. مجموعه همه تابع‌های ضربی و ناصفر A را با $\Sigma(A)$ نشان می‌دهیم

تعریف ۵۲.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی باشد.

۱. زیر فضای $\mathcal{T}$ را یک ایده‌ال برای A می‌نامیم، هرگاه برای هر (a, x) در $A \times \mathcal{T}$ ، ax به $\mathcal{T}$ متعلق باشد.

۲. ایده‌ال $\mathcal{T}$ از جبر A را غیربدیهی^۳ می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{T} \neq \{0\}$ و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^\perp$ هرگاه $\mathcal{T} \subsetneq A$.

۳. ایده‌ال غیر بدیهی و سره $\mathcal{T}$ از جبر A را ایده‌ال ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه مشمول در ایده‌ال سره دیگری نباشد. فضای همه ایده‌ال‌های ماکسیمال جبر باناخ جابجایی A را با $\Delta(A)$ نشان می‌دهیم.

-
1. positive
 2. state
 3. multiplicative functional

گزاره ۵۳.۲. برای جبر باناخ جابجایی و یک دار $\mathcal{A}$ تناظری دوسویی بین $\Delta(\mathcal{A})$ و $\Sigma(\mathcal{A})$ برقرار است. همچنین مجموعه $(\Sigma(\mathcal{A}), \tau_{w*})$ فشرده است.

در حالتی که جبر باناخ $\mathcal{A}$ یک دار نباشد، می توان به طریقی آن را یک دار کرد. در واقع اگر قرار دهیم

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C} = \{(a, \lambda) : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

آنگاه این فضا جبر باناخ یک دار شده است. عمل ضرب روی جبر باناخ $\mathcal{A}_1$ به صورت زیر تعریف می شود

$$(a, \lambda)(b, \gamma) = (ab + \lambda b + \gamma a, \lambda\gamma), \quad (a, \lambda), (b, \gamma) \in \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}.$$

همچنین همانی ضربی آن عضو $(0, 1_{\mathbb{C}})$ است و جبر $\mathcal{A}$ را به عنوان ایده ال ماکسیمال در بر دارد. علاوه بر این، فضای خارج قسمتی $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}$ از بعد یک و همه اعضای آن وارون پذیر هستند. در نتیجه $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}$ با فضای $\mathbb{C}$ یکریخت است. حال رابطه زیر را داریم

$$\Sigma(\mathcal{A}_1) = \Sigma(\mathcal{A}) \cup \{0_{\mathcal{A}_1}\}$$

که در آن $0_{\mathcal{A}_1}$ نشان دهنده تابع صفر روی فضای $\mathcal{A}$ است. در این حالت، مجموعه $\Sigma(\mathcal{A})$ موضعاً فشرده بوده و فشرده سازی تک نقطه ای آن در توپولوژی τ_{w*} مجموعه $\Sigma(\mathcal{A}_1)$ است.

تعریف ۵۴.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^* -جبر و $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت

۱. دوتایی $(\Pi, \mathcal{H})$ را یک نمایش^۱ برای C^* -جبر $\mathcal{A}$ روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می نامیم، هرگاه نگاشت $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ، $\tau_{s.o.t.} - \tau_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ پیوسته بوده و دارای ویژگی های زیر باشد

$$(\text{آ}) \quad \Pi(\gamma a + b) = \gamma \Pi(a) + \Pi(b), \quad \gamma \in \mathbb{C} \text{ و } a, b \in \mathcal{A}$$

$$(\text{ب}) \quad \Pi(ab) = \Pi(a)\Pi(b), \quad a, b \in \mathcal{A}$$

$$(\text{ج}) \quad \Pi(a^*) = \Pi(a)^*, \quad a \in \mathcal{A}$$

۲. نمایش $(\Pi, \mathcal{H})$ برای C^* -جبر $\mathcal{A}$ را ناتبهگون^۲ می نامیم، هرگاه $\mathcal{H} = \overline{\Pi(\mathcal{A})\mathcal{H}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}}$ و وفادار^۳ گوییم، هرگاه یک به یک باشد.

-
1. representation
 2. non-degenerate
 3. faithful

قضیه ۵۵.۲ (گلفند^۱ - نیمارک^۲ - سگال^۳). برای هر تابع خطی مثبت φ روی C^* -جبر A ، یک نمایش $(\pi, \mathcal{H})$ و عضو $v \in \mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که برای هر $a \in A$ ، $\varphi(a) = \langle \pi(a)v, v \rangle$.

با استفاده از فضای همه حالت‌ها روی C^* -جبر A ثابت می‌شود که نمایشی طولپا و ناتب‌گون برای C^* -جبر دلخواه A به روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ وجود دارد. این یعنی هر C^* -جبر با C^* -زیرجبری از $B(\mathcal{H})$ برای یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یکریخت است. به چنین نمایشی یک نمایش جامع^۴ برای C^* -جبر A گفته می‌شود.

۷.۱.۲ فضاهای عملگری

شاید بتوان گفت تاریخ تولد فضاهای عملگری به تاریخ تولد مکانیک ماتریسی هایزنبرگ، در اوایل قرن بیستم نزدیک است. زیرا مکانیک ماتریسی هایزنبرگ تأثیر فوق العاده‌ای در علوم فیزیکی داشت. مکانیک ماتریسی یک فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی است که توسط ورنر هایزنبرگ^۵، ماکس برن^۶ و پاسکوال جردن^۷ در سال ۱۹۲۵ ایجاد شد. مکانیک ماتریسی اولین فرمول‌بندی از لحاظ مفهوم، مستقل و از لحاظ منطق، سازگار با مکانیک کوانتومی است. موری^۸ و فون نویمان^۹ از جمله ریاضیدانانی بودند که مکانیک ماتریسی هایزنبرگ را پیگیری کردند. فون نویمان با کار روی عملگرهای خود الحاق روی فضاهای هیلبرت، ماتریس‌های هایزنبرگ را شبیه‌سازی کرد. فون نویمان توابع را با عملگرها جایگزین کرد و ایده‌ی نسخه‌های عملگری انتگرال را مطرح کرد و زمینه‌ی ظهور جبرهای عملگری فراهم شد. در واقع نظریه‌ی فضاهای عملگری، معنایی از کوانتیده کردن فضاهای باناخ است. هر فضای برداری را به روش‌های مختلف می‌توان نرم دار کرد. نرم دار کردن این فضا با دید ماتریسی، باعث ایجاد ویژگی‌های جدید و ساختاری جذاب می‌شود که دستاوردهای بزرگی در آنالیز تابعی و آنالیز

-
1. Israel Gelfand
 2. Mark Naimark
 3. Irving Segal
 4. universal representation
 5. Werner Heisenberg
 6. Max Born
 7. Pascual Jordan
 8. Francis Joseph Murray
 9. von Neumann

هارمونیک داشته است. روان^۱ در سال ۱۹۸۸ اصول موضوعی این فضا را پایه گذاری کرد. در بخش ۸.۱.۲ تعمیم این ساختار را مطالعه می‌کنیم. تعمیمی که سنگ بنای فصول بعدی است. در این بخش فضاهای نرم ماتریسی، فضاهای عملگری مجرد و فضاهای عملگری واقعی^۲ را معرفی می‌کنیم. در ادامه ریخت^۳ متناظر این رسته جدید که نگاشت‌های کاملاً کراندار هستند را بیان و قضایایی در ارتباط با آنها اثبات می‌کنیم. در پایان عنصر جامع این رسته را با ارائه قضیه نمایش معرفی می‌کنیم. خواننده علاقمند را به [۲۲]، [۲۴]، [۵۳]، [۶۲] ارجاع می‌دهیم. یک فضا از توابع کراندار مختلط مقدار روی مجموعه S ، یک زیرفضای خطی از $\ell^\infty(S)$ است. این تلقی راهی برای نرم‌دار کردن فضاهای تابعی است. در واقع هر فضای نرم‌دار E با یک فضای تابعی یکریخت طولیا است.

فرض کنید $x \in E$. در این صورت بنابر قضیه‌ی هان-باناخ تابعک خطی $f \in E^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|f\| = 1$ یعنی $\|f(x)\| = \|x\|$. در نتیجه اگر S گوی یکه‌ی بسته در E^* باشد، آنگاه برای هر $f \in S$ ،

$$\begin{aligned}\Phi : E &\longrightarrow \ell^\infty(S) \\ \Phi_x(f) &= f(x).\end{aligned}$$

پس هر فضای خطی نرم‌دار را می‌توان به‌عنوان یک فضای تابعی مجرد و هر فضای تابعی را به‌عنوان یک نمایش طولیا از یک فضای نرم‌دار در نظر گرفت.

با جایگزینی عملگرها به‌جای توابع و $B(H)$ به‌جای $\ell^\infty(S)$ فضای عملگری واقعی^۴ متولد می‌شود.

تعریف ۵۶.۲. فرض کنید H فضای هیلبرت باشد. در این صورت هر زیرفضای خطی V از $B(H)$ را یک فضای عملگری واقعی می‌نامیم.

تعریف ۵۷.۲. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک نرم $\|\cdot\|_n$ روی فضای ماتریسی $M_n(V)$ وجود داشته باشد، آنگاه خانواده‌ای از این نرم‌ها $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ، نرم ماتریسی^۵ روی فضای V نامیده می‌شود.

-
1. Z. J. Ruan
 2. concrete operator space
 3. morphism
 4. concrete operator space
 5. matricial norm

فضای V همراه با نرم ماتریسی را فضای نرم ماتریسی می‌نامیم، هرگاه نرم ماتریسی آن برای هر $\beta \in \mathbb{M}_n(V)$ و $\circ \in \mathbb{M}_m(V)$ در شرایط زیر صدق کند

$$\|v + \circ\|_{n+m} = \|v\|_n \quad (۱)$$

$$\|v\beta\|_n \leq \|\beta\| \|v\|_n, \quad \|\beta v\|_n \leq \|\beta\| \|v\|_n \quad (۲)$$

با توجه به یکریختی $\mathbb{M}_n(B(H)) \cong B(H^n)$ ، C^* -جبر $B(H)$ یک فضای نرم ماتریسی است. در واقع نرم ماتریسی این فضا در شرط قوی‌تر زیر که به شرط L^∞ معروف است صدق می‌کند، برای هر $w \in \mathbb{M}_m(B(H))$ و $v \in \mathbb{M}_n(B(H))$

$$\|v \oplus w\|_{n+m} = \max\{\|v\|_n, \|w\|_m\}.$$

شمول طبیعی $\mathbb{M}_n(V) \subseteq \mathbb{M}_n(B(H)) \cong B(H^n)$ ، نرم $\|\cdot\|_n$ روی فضای ماتریسی $\mathbb{M}_n(V)$ را مشخص می‌کند. $\mathbb{M}_n(V)$ فضای نرم‌دار متناظر است. می‌توان از راه‌های مختلفی فضای $\mathbb{M}_n(V)$ را نرم‌دار کرد؛ ولی نرم‌دار کردن آن با نرم عملگری القایی از $B(H^n)$ باعث می‌شود دو شرط مهمی که در ادامه بیان می‌شود، برای نرم این فضا برقرار باشد.

تعریف ۵۸.۲. فرض کنید فضای خطی V همراه با نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ باشد. در این صورت V یک فضای عملگری مجرد^۱ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $w \in \mathbb{M}_n(V)$ ، $v \in \mathbb{M}_m(V)$ ، $\alpha \in \mathbb{M}_{n,m}$ و $\beta \in \mathbb{M}_{m,n}$

$$\|v \oplus w\|_{n+m} = \max\{\|v\|_m, \|w\|_n\} \quad \mathbf{M1}$$

$$\|\alpha v \beta\|_n \leq \|\alpha\| \|v\|_m \|\beta\| \quad \mathbf{M2}$$

نرم ماتریسی که در شرایط $\mathbf{M1}$ و $\mathbf{M2}$ صدق کند را نرم ماتریسی فضای عملگری گویند. شرایط $\mathbf{M1}$ و $\mathbf{M2}$ به شرایط روان معروف هستند. در نظریه کلاسیک فضاهای عملگری V با نرم $\|\cdot\|$ کامل است، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ هر یک از فضاهای نرم‌دار شده $\mathbb{M}_n(V)$ کامل باشند. برای فضای عملگری مجرد V ، از شرط $\mathbf{M1}$ نتیجه می‌شود، برای هر $v \in \mathbb{M}_n(V)$ نگاشت $v \mapsto v \oplus \circ = \begin{bmatrix} v & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ یک طولپایی پوشا از $\mathbb{M}_n(V)$ به $\mathbb{M}_{n+1}(V)$ است.

مثال ۵۹.۲. در ادامه مثال‌هایی از فضاهای عملگری ارائه می‌شود.

۱. هر فضای عملگری واقعی یک فضای عملگری مجرد است.

۲. برای فضای هیلبرت H و K با توجه به یکرختی $B(H^n, K^n) \cong \mathbb{M}_n(B(H, K))$ ، نتیجه می‌شود که نرم ماتریسی روی $B(H, K)$ در شرایط M_1 و M_2 صدق می‌کند. در ادامه در صورت نیاز فضای $B(H, K)$ را با زیرفضایی از ماتریس‌ها به فرم

$$\begin{bmatrix} \circ & \circ \\ b & \circ \end{bmatrix} \quad (۶.۲)$$

در $B(H \oplus K)$ یکی می‌گیریم.

۳. فرض کنیم A یک C^* -جبر باشد. در این صورت نرم روی A توسط ساختار C^* -جبری آن مشخص می‌شود. اگر یک نمایش یک به یک از A روی یک فضای هیلبرت H را ثابت در نظر بگیریم، می‌توان $\mathbb{M}_n(A)$ را به عنوان C^* -جبری از عملگرهای کراندار روی H^n در نظر گرفت. نرم متناظر روی $\mathbb{M}_n(A)$ به نمایش انتخاب شده بستگی ندارد. با این نرم ماتریسی، A یک فضای عملگری است و این فضا را ساختار فضای عملگری کانونی روی A می‌نامیم.

فرض کنید V یک فضای عملگری مجرد باشد و $v \in \mathbb{M}_n(V)$ و $\mu \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس یکانی باشد. در این صورت با توجه به شرط M_2 داریم

$$\|\mu v\| \leq \|\mu\| \|v\| = \|v\| = \|\mu^{-1} \mu v\| \leq \|\mu^{-1}\| \|\mu v\| = \|\mu v\|$$

این عمل متناظر با ضرب ماتریس جایگشت از سمت چپ یا راست می‌باشد و ما می‌توانیم سطرها و ستون‌های v را جابه‌جا کنیم بدون این‌که نرم آن تغییر کند.

فرض کنید V یک فضای عملگری مجرد باشد و $v = [v_{i,j}] \in \mathbb{M}_n(V)$. در این صورت یکی از نرم‌هایی که می‌توان روی v تعریف کرد به‌طوری‌که نرم v با نرم مولفه‌هایش مرتبط باشد، به‌صورت $\|v\|_1 = \sum_{i,j} \|v_{i,j}\|$ است که در آن منظور از $\|v_{i,j}\|$ نرم $v_{i,j}$ در $\mathbb{M}_1(V)$ است.

تذکر ۶۰.۲. به‌وضوح این نرم، شرایط نرم ماتریسی فضاهای عملگری را ندارد. بررسی این نرم و مقایسه آن با نرم ماتریسی فضای عملگری V ، نتایج زیر را به همراه دارد

(۱) نرم $\|\cdot\|_1$ با نرم ماتریسی فضای عملگری روی V هم‌ارز است.

(۲) دنباله $(v(k))_{k \in \mathbb{N}}$ در $\mathbb{M}_n(V)$ همگراست اگر و تنها اگر مولفه‌هایش، $v(k)_{i,j}$ ، همگرا باشند.

(۳) زیرفضای W از V بسته است اگر و تنها اگر $\mathbb{M}_n(W)$ در $\mathbb{M}_n(V)$ بسته باشد.

(۴) V کامل است اگر و تنها اگر هر یک از فضاهای نرم‌دار $\mathbb{M}_n(V)$ کامل باشد.

(۵) واضح است که نگاشت خطی $F = [F_{ij}] : V \rightarrow \mathbb{M}_n$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر یک از نگاشت‌های $F_{ij} : V \rightarrow \mathbb{C}$ پیوسته باشند.

۱.۷.۱.۲ نگاشت‌های خطی کاملاً کراندار

در این بخش ریخت‌های مناسب این رشته را معرفی و خواصی برای آنها معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶۱.۲. فرض کنیم V و W دو فضای عملگری مجرد و نگاشت $\varphi : V \rightarrow W$ خطی باشد. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ نگاشت‌های زیر توسط نگاشت φ القا می‌شوند

$$\begin{aligned}\varphi_n : \mathbb{M}_n(V) &\rightarrow \mathbb{M}_n(W) \\ \varphi_n = [\varphi(v_{ij})], \quad v = [v_{ij}] &\in \mathbb{M}_n(V).\end{aligned}$$

نرم زیر را برای نگاشت φ تعریف می‌کنیم

$$\|\varphi\|_{cb} = \sup\{\|\varphi_n\| : n \in \mathbb{N}\}$$

این نرم را نرم کاملاً کراندار می‌نامیم.

با توجه به شرط $M1$ و رابطه (۶.۲) $\{\|\varphi_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله نزولی تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر

$$\|\varphi\| \leq \|\varphi_2\| \leq \|\varphi_3\| \leq \dots \leq \|\varphi\|_{cb}.$$

تعریف ۶۲.۲. اگر V و W فضاهای عملگری مجرد و φ نگاشت خطی از V به W باشد، آنگاه نگاشت φ را کاملاً کراندار^۱ گوئیم، هرگاه $\|\varphi\|_{cb} < \infty$ ؛

1. completely bounded

کاملاً انقباضی^۱ گوییم، هرگاه $\|\varphi\|_{cb} \leq 1$ ؛
 کاملاً طولی^۲ گوییم، هرگاه $\|\varphi\|_{cb} = 1$ ؛
 کاملاً مثبت^۳ گوییم، هرگاه برای هر $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$ ها نگاشت‌های مثبت باشند؛ به این معنا که هر عضو مثبت (با ترتیب القایی از ساختار واقعی خود) را به عضو مثبت می‌نگارند؛
 کاملاً خارج‌قسمتی^۴ گوییم، هرگاه برای هر $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$ ها نگاشت خارج‌قسمتی باشند،
 یکرختی کامل^۵ گوییم، هرگاه یکرختی خطی φ^{-1} موجود باشد، که $\|\varphi\|_{cb} \|\varphi^{-1}\|_{cb} < \infty$.
 از نماد $W \hookrightarrow V$ برای نمایش نگاشت یک‌به‌یک و کاملاً طولی و از نماد $W \twoheadrightarrow V$ برای نشان دادن نگاشت پوشا و کاملاً خارج‌قسمتی بهره می‌بریم.

تعریف ۶۳.۲. مجموعه همه نگاشت‌های کاملاً کراندار از V به W را با $CB(V, W)$ نشان می‌دهیم. این فضا همراه نرم کاملاً کراندار یک فضای نرم‌دار است.

هر نگاشت کاملاً کراندار، کراندار است؛ در واقع $CB(V, W) \subseteq B(V, W)$. ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. نگاشت ترانهاده یک نگاشت کراندار است که کاملاً کراندار نیست.

گزاره ۶۴.۲. فرض کنید V و W فضاهای عملگری مجرد باشند. در این صورت اگر فضای W باناخ باشد، آنگاه فضای $CB(V, W)$ نیز باناخ خواهد بود.

برهان. چون فضای W باناخ است، با استفاده از قضیه کلاسیک در فضاهای باناخ، نتیجه می‌شود فضای $B(V, W)$ نیز باناخ خواهد بود. کافی است ثابت کنیم $CB(V, W)$ زیرفضای بسته $B(V, W)$ است.

دنباله کشی $\{\varphi_n\}$ را در $CB(V, W)$ نظر می‌گیریم. واضح است که این دنباله در فضای $B(V, W)$ نیز کشی خواهد بود. چون فضای $B(V, W)$ باناخ است، نگاشت خطی کراندار $\varphi: V \rightarrow W$ در $B(V, W)$ وجود دارد به‌طوری‌که دنباله کشی $\{\varphi_n\}$ در توپولوژی نرم به آن همگراست؛ یعنی

$$\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0.$$

-
1. completely contractive
 2. completely isometric
 3. completely positive
 4. completely quotient
 5. completely isomorphic

از آنجایی که دنباله $\{\varphi_n\}$ در $CB(V, W)$ کشی است، برای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح به مقدار کافی بزرگ $N_\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $n, m > N_\epsilon$ $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{cb} < \epsilon$ عضو $\mathbb{M}_P(V)$ که $v = [v_{ij}] \in \mathbb{M}_P(V)$ را در نظر می‌گیریم

$$\|(\varphi_n - \varphi_m)_p\| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{cb} \|v\| \leq \epsilon \|v\|.$$

از آنجایی که $\varphi_m(v_{ij})$ در W به $\varphi(v_{ij})$ همگراست، $\|(\varphi_n - \varphi)_p(v)\| \leq \epsilon \|v\|$ و در نتیجه $\|(\varphi_n - \varphi)_p\| \leq \epsilon$ با توجه به تعریف نرم کاملاً کراندار داریم

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{cb} = \sup_p \|(\varphi_n - \varphi)_p\| \leq \epsilon.$$

بنابراین دنباله $\{\varphi_n\}$ در $CB(V, W)$ به φ همگراست و در نتیجه $CB(V, W)$ بسته و باناخ است. $\square$

گزاره ۶۵.۲. اگر V یک فضای عملگری مجرد باشد و $\varphi : V \rightarrow \mathbb{M}_n$ یک نگاشت خطی باشد، آنگاه $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi_n\|$.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر عدد صحیح $m \geq n$ $\|\varphi_m\| \leq \|\varphi_n\|$. برای هر $\epsilon > 0$ عنصری مانند $v \in \mathbb{M}_m(V)$ که $\|v\| \leq 1$ وجود دارد، که $\|\varphi_m\| - \epsilon \leq \|\varphi_m(v)\|$ بردارهای ξ, η متعلق به فضای اقلیدسی $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = (\mathbb{C}^n)^m$ وجود دارند به طوری که $\|\varphi_m\| - \epsilon < |\langle \varphi_m(v)\eta | \xi \rangle|$ طولپایی‌های $\alpha, \beta : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ و بردارهای $\eta, \xi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ وجود دارند که $\eta = (\beta \otimes I_n)(\tilde{\eta})$ و $\xi = (\alpha \otimes I_n)(\tilde{\xi})$. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \|\varphi_m\| - \epsilon &< |\langle \varphi_m(v)\eta | \xi \rangle| = |\langle \varphi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\tilde{\eta}) | (\alpha \otimes I_n)(\tilde{\xi}) \rangle| \\ &= |\langle (\alpha \otimes I_n)^* \varphi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\tilde{\eta}) | \tilde{\xi} \rangle| \\ &= |\langle (\alpha^* \otimes I_n) \varphi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\tilde{\eta}) | \tilde{\xi} \rangle| \\ &= |\langle (\alpha^* \varphi_m(v) \beta)(\tilde{\eta}) | \tilde{\xi} \rangle| \\ &= |\langle \varphi_n(\alpha^* v \beta) \tilde{\eta} | \tilde{\xi} \rangle| \\ &\leq \|\varphi(\alpha^* v \beta)\| \\ &\leq \|\varphi_n\|. \end{aligned}$$

این رابطه برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه برقرار است. پس $\|\varphi_m\| \leq \|\varphi_n\|$. $\square$

این گزاره وقتی $n = 1$ نتیجه زیر را در بر دارد.

نتیجه ۶۶.۲. فرض کنید V یک فضای عملگری مجرد و $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع خطی باشد. در این صورت $\|f\|_{cb} = \|f\|$. لذا

$$V^* = B(V, \mathbb{C}) = CB(V, \mathbb{C}). \quad (۷.۲)$$

لم ۶۷.۲. اگر V یک فضای عملگری مجرد و $v \in V$ به گونه‌ای باشد که $\|v\| = 1$ ، آنگاه نگاشت $\theta_v : \mathbb{C} \rightarrow V$ با ضابطه $\alpha \mapsto \alpha v$ کاملاً طولپا است.

برهان. با توجه به تعریف نگاشت θ_v ، نگاشت $(\theta_v)_n : \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{M}_n(V)$ را به صورت $(\theta_v)_n(\alpha) = [\theta_v(\alpha_{ij})] = [\alpha_{ij}v] = \alpha \otimes v$ تعریف می‌کنیم. برای هر $\alpha \in \mathbb{M}_n$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|(\theta_v)_n(\alpha)\| = \|\alpha \otimes v\| = \|\alpha\| \|v\| = \|\alpha\|.$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(\theta_v)_n$ ها طولپا و در نتیجه θ_v کاملاً طولپا است. $\square$

از این لم این نتیجه کلی به دست می‌آید که فقط یک فضای عملگری از بعد یک وجود دارد که یکریخت با $\mathbb{C}$ است.

نتیجه ۶۸.۲. اگر V و W فضاهای عملگری مجرد باشند که بعد یکی یا هر دو آن‌ها برابر n باشد، آنگاه هر نگاشت خطی $\varphi : V \rightarrow W$ در رابطه $\|\varphi\|_{cb} \leq n \|\varphi\|$ صدق می‌کند.

برهان. فرض کنید $\dim W = n$. در این صورت می‌توانیم پایه $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ را برای W انتخاب کنیم به طوری که $\|w_i\| = 1$. همچنین $g_j \in W^*$ وجود دارند به طوری که $\|g_j\| = 1$ و $g_j(w_i) = \delta_{i,j}$. طبق تعریف θ_{w_j} در لم (۶۷.۲) عملگر همانی روی فضای W را به صورت $id_W = \sum_{j=1}^n \theta_{w_j} \circ g_j$ تعریف می‌کنیم. همان‌گونه که در لم قبل مشاهده کردیم، نگاشت θ_{w_j} یک نگاشت کاملاً طولپا و پوشا از $\mathbb{C}$ به W است و نگاشت‌های g_j تابعک‌های خطی و کراندار روی V هستند. نگاشت φ را به صورت

$$\varphi = id_W \circ \varphi = \left(\sum_{j=1}^n \theta_{w_j} \circ g_j \right) \circ \varphi = \sum_{j=1}^n \theta_{w_j} \circ (g_j \circ \varphi).$$

تعریف می‌کنیم. با توجه به نتیجه ۶۶.۲ داریم

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_{cb} &= \left\| \sum_{j=1}^n \theta_{w_j} \circ (g_j \circ \varphi) \right\|_{cb} \leq \sum_{j=1}^n \|\theta_{w_j} \circ (g_j \circ \varphi)\|_{cb} \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \|\theta_{w_j}\|_{cb} \|g_j \circ \varphi\|_{cb} \\
 &= \sum_{j=1}^n \|g_j \circ \varphi\| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \|g_j\| \|\varphi\| \\
 &= \|\varphi\| \sum_{j=1}^n \|g_j\| = n\|\varphi\|.
 \end{aligned}$$

□

نتیجه ۶۹.۲. فرض کنید V و W فضاهای عملگری مجرد n -بعدی باشند. در این صورت یکرختی $\varphi: V \rightarrow W$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|\varphi\|_{cb} \|\varphi^{-1}\|_{cb} \leq n^2$.

برهان. پایه‌های $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ که در اثبات نتیجه ۶۸.۲ تعریف کردیم را به‌ترتیب برای V و W همراه با $f_j \in V^*$ و $g_j \in W^*$ ها در نظر می‌گیریم. نگاشت‌های $\varphi: V \rightarrow W; v \mapsto \sum f_i(v)w_i$ و $\psi: W \rightarrow V; w \mapsto \sum g_i(w)v_i$ را تعریف می‌کنیم. این دو نگاشت خطی وارون یکدیگر هستند و

$$\varphi(v_i) = \sum f_i(v_i)w_i = \delta_{ii}w_i = w_i$$

و

$$\psi(w_i) = \sum g_i(w_i)v_i = \delta_{ii}v_i = v_i.$$

برای نگاشت φ داریم

$$\|\varphi\|_{cb} = \left\| \sum f_i w_i \right\|_{cb} \leq \sum \|f_i\|_{cb} \|w_i\|_{cb} \leq n.$$

به طور مشابه می توان ثابت کرد $\|\psi\|_{cb} \leq n$ ، در نتیجه

$$\|\varphi\|_{cb}\|\varphi^{-1}\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}\|\psi\|_{cb} \leq n^2.$$

□

در نتیجه (۶۶.۲) دیدیم که برای هر فضای عملگری مجرد V ، تابع خطی $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ دارای ویژگی $\|f\|_{cb} = \|f\|$ است. آیا فضاهای عملگری دیگری چون W وجود دارند که رابطه $CB(V, W) = B(V, W)$ برای آن ها نیز برقرار باشد؟ گزاره زیر پاسخ این پرسش را بیان می کند.

گزاره ۷۰.۲. اگر V یک فضای عملگری مجرد و A یک C^* -جبر جابه جایی باشد، آنگاه هر نگاشت خطی کراندار $\varphi: V \rightarrow A$ در تساوی $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi\|$ صدق می کند.

برهان. فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف موضعا فشرده باشد. در این صورت منظور از $C_0(\Omega)$ مجموعه همه توابع پیوسته مختلط مقدار روی Ω است که حد آنها در بی نهایت صفر است. بنابر قضیه گلفند چون A یک C^* -جبر جابه جایی است، می توان A را با $C_0(\Omega)$ یکسان در نظر گرفت. همچنین می توان $\mathbb{M}_n(C_0(\Omega))$ را با $C_0(\Omega, \mathbb{M}_n)$ یکسان فرض کرد. برای توابع ماتریسی مقدار $f = [f_{ij}] \in \mathbb{M}_n(C_0(\Omega))$ داریم

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \{\|[f_{ij}(\omega)]\|\}.$$

حال عنصر ثابت $v \in \mathbb{M}_n(V)$ را در نظر می گیریم. با سوپریمم گرفتن روی همه $\omega \in \Omega$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ که $\|\alpha\|_2 = \|\beta\|_2 = 1$ ، می توان نوشت

$$\begin{aligned} \|\varphi_n(v)\| &= \|\varphi(v_{i,j})\| = \sup_{\omega \in \Omega} \{\|\varphi(v_{i,j})\|\} \\ &= \sup_{\omega, \alpha, \beta} \{|\langle [\varphi(v_{i,j})(\omega)]\alpha \mid \beta \rangle|\} \\ &= \sup_{\omega, \alpha, \beta} \left| \sum_{i,j=1}^n \bar{\beta}_i \varphi(v_{i,j})(\omega) \alpha_j \right|. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن ماتریس های ستونی $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ داریم

$$\|\varphi_n(v)\| = \sup_{\omega, \alpha, \beta} \{|\varphi(\beta^* v \alpha)(\omega)|\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\alpha, \beta} \{ \|\varphi\| \|\beta^* v \alpha\| \|\omega\| \} \\
&\leq \|\varphi\| \sup_{\alpha, \beta} \{ \|\beta^* v \alpha\| \} \\
&\leq \|\varphi\| \sup_{\alpha, \beta} \{ \|\beta^*\| \|v\| \|\alpha\| \} \\
&= \|\varphi\| \|v\|.
\end{aligned}$$

در پایان با دو بار سوپریمم گرفتن از طرفین نامساوی، اثبات کامل می‌شود و بنابراین $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$ و $\|\varphi\|_{cb} \leq \|\varphi\|$.

□

۲.۷.۱.۲ قضیه نمایش

در بخش قبل مشاهده کردیم که هر فضای عملگری واقعی یک فضای عملگری مجرد نیز هست. روان در سال ۱۹۸۸ در یک قضیه اساسی به نام قضیه نمایش عکس این مطلب را بیان و اثبات نمود. این قضیه جزء مهم‌ترین قضایای این فصل است که برای اثبات آن نیاز به بیان و اثبات چندین لم داریم. در پایان این بخش گزاره بسیار زیبایی را بیان می‌کنیم که شرط جایگزینی برای شرط M۱ از شرایط روان را بیان می‌کند.

تعریف ۷۱.۲. فرض کنید K زیرمجموعه‌ای محدب از یک فضای خطی حقیقی V باشد. در این صورت تابع حقیقی e روی K یک آفین نامیده می‌شود، هرگاه ترکیبات محدب را حفظ کند. در واقع برای هر $\alpha \leq 1$ و $x, y \in K$

$$e(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha e(x) + (1 - \alpha)e(y).$$

مثال ۷۲.۲. اگر f یک تابع خطی حقیقی روی V ، c یک ثابت و I نگاشت همانی روی V باشد، آنگاه تحدید $e = f + cI$ روی V یک آفین است. زیرا

$$\begin{aligned}
e(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= (f + cI)(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\
&= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) + \alpha cx + (1 - \alpha)cy \\
&= \alpha(f(x) + cx) + (1 - \alpha)(f(y) + cy) \\
&= \alpha(f + cI)(x) + (1 - \alpha)(f + cI)(y) \\
&= \alpha e(x) + (1 - \alpha)e(y).
\end{aligned}$$

لم ۷۳.۲. فرض کنید $\mathcal{E}$ یک مخروط از توابع آفین پیوسته حقیقی روی یک زیرمجموعه محدب فشرده K از یک فضای خطی توپولوژیک E باشد. در این صورت اگر برای هر $e \in \mathcal{E}$ یک نقطه k_e متناظر در K وجود داشته باشد به طوری که $e(k_e) \geq 0$ ، آنگاه یک نقطه $k_* \in K$ وجود دارد که برای هر $e \in \mathcal{E}$ ، $e(k_*) \geq 0$.

برهان. برای اثبات این لم باید نشان دهیم مجموعه‌های $\{k \in K : e(k) \geq 0\}$ اشتراک ناتهی دارند؛ در واقع $\bigcap_{e \in \mathcal{E}} e(k) \neq \emptyset$. بنابه فرض، مجموعه‌های تعریف شده به صورت بالا ناتهی هستند. اگر دنباله (k_α) در $K(e)$ را همگرا به عنصری مانند k در نظر بگیریم، آنگاه از آنجایی که آفین‌ها همگی پیوسته هستند، طبق قضیه گراف بسته داریم $e(k_\alpha) \rightarrow e(k)$. در نتیجه $e(k) \geq 0$ و $k \in K(e)$. در این صورت مجموعه $K(e)$ بسته است. این نتیجه می‌دهد که $K(e)$ فشرده نیز هست. حال کافی است نشان دهیم این مجموعه‌ها دارای ویژگی اشتراک متناهی هستند. اگر چنین نباشد، آنگاه عناصر $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{E}$ وجود دارند به طوری که

$$K(e_1) \cap K(e_2) \cap \dots \cap K(e_n) = \emptyset.$$

نگاشت $\theta : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ را به صورت $\theta(k) = (e_1(k), e_2(k), \dots, e_n(k))$ تعریف می‌کنیم. از آنجایی که e_i ها همگی آفین‌های پیوسته هستند، θ نیز یک آفین پیوسته می‌باشد. چون نگاشت پیوسته حافظ فشردگی است، $\theta(K)$ در $\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای فشرده و محدب است و بنابر فرض خلف $\theta(k) \cap (\mathbb{R}^n)^+ = \emptyset$. از شکل هندسی قضیه هان-باناخ نتیجه می‌شود که تابع خطی f روی $\mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $f(\theta(K)) < 0$ و $f(\mathbb{R}^n)^+ \geq 0$. از آنجایی که برای ثابت‌های $c_j \geq 0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, \quad (x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n)$$

نتیجه می‌شود $e = f \circ \theta < 0$. چون e ترکیب خطی از آفین‌هاست خود نیز یک آفین است که عضوی از $\mathcal{E}$ است به طوری که $K(e) = \emptyset$ و این با فرض لم تناقض دارد. $\square$

لم ۷۴.۲. اگر فضای عملگری مجرد باشد و $F \in [\mathbb{M}_n(V)]^*$ به طوری که $\|F\| = 1$ ، آنگاه حالت‌های p_* و q_* روی $\mathbb{M}_n$ وجود دارند به طوری که برای هر $\alpha \in \mathbb{M}_{n,r}$ ، $\beta \in \mathbb{M}_{r,n}$ و $v \in \mathbb{M}_r(V)$ (دلخواه)

$$|F(\alpha v \beta)| \leq p_*(\alpha \alpha^*)^{\frac{1}{r}} \|v\| q_*(\beta^* \beta)^{\frac{1}{r}}.$$

برهان. برای $v \in \mathbb{M}_r(V)$ می‌توان فرض کرد $\|v\| = 1$. S_n را فضای حالت روی $\mathbb{M}_n$ تعریف می‌کنیم. کافی است حالت‌های p_* و q_* عضو S_n را طوری بیابیم که

$$|F(\alpha v \beta)| \leq p_*(\alpha \alpha^*)^{\frac{1}{r}} q_*(\beta^* \beta)^{\frac{1}{r}}. \quad (۸.۲)$$

برای این منظور باید نشان دهیم

$$ReF(\alpha v \beta) \leq p_*(\alpha \alpha^*)^{\frac{1}{p}} q_*(\beta^* \beta)^{\frac{1}{q}}. \quad (9.2)$$

زیرا با قراردادن $\alpha e^{i\theta}$ برای یک $\theta \leq$ مناسب به جای α همان رابطه (۲۶.۳) به دست می‌آید. اکنون برای اثبات (۹.۲) حالت‌های p_* و q_* را طوری پیدا می‌کنیم که

$$ReF(\alpha v \beta) \leq \frac{1}{p} (p_*(\alpha \alpha^*) + q_*(\beta^* \beta)). \quad (10.2)$$

در رابطه (۱۰.۲) اگر به جای α ، $t^{\frac{1}{p}} \alpha$ و به جای β ، $t^{-\frac{1}{q}} \beta$ برای $t > 0$ قرار دهیم، آنگاه رابطه زیر به دست می‌آید

$$ReF(\alpha v \beta) \leq \frac{1}{p} (tp_*(\alpha \alpha^*) + t^{-1} q_*(\beta^* \beta)).$$

اگر در این رابطه $p_*(\alpha \alpha^*)$ و $q_*(\beta^* \beta)$ مقادیر ناصفر باشند، آنگاه با قراردادن t برابر با $\frac{1}{p} (tp_*(\alpha \alpha^*) + t^{-1} q_*(\beta^* \beta))^{-\frac{1}{p}}$ رابطه (۹.۲) به دست می‌آید. اگر $p_*(\alpha \alpha^*) = 0$ ، $q_*(\beta^* \beta) \neq 0$ و t را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، آنگاه نتیجه می‌شود $ReF(\alpha v \beta) = 0$ و رابطه (۹.۲) به دست می‌آید. برای $p_*(\alpha \alpha^*) \neq 0$ و $q_*(\beta^* \beta) = 0$ نیز برهانی مشابه استفاده می‌کنیم. در نهایت اگر هر دو صفر باشند، آنگاه $ReF(\alpha v \beta) = 0$.

حاصل ضرب دکارتی $K = S_n \times S_n$ یک زیرمجموعه محدب فشرده از $(\mathbb{M}_n \oplus \mathbb{M}_n)^*$ است زیرا S_n ها محدب و فشرده هستند. فضای خطی توابع آفین پیوسته حقیقی روی K را با نماد $A(K)$ نشان می‌دهیم.

اگر $\alpha \in \mathbb{M}_{n,r}$ ، $\beta \in \mathbb{M}_{r,n}$ و $v \in \mathbb{M}_r(V)$ که $\|v\| = 1$ ، آنگاه آفین $e_{\alpha,v,\beta} \in A(K)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$e_{\alpha,v,\beta}(p, q) = p(\alpha \alpha^*) + q(\beta^* \beta) - 2ReF(\alpha v \beta).$$

در این رابطه $p, q \in S_n$. مجموعه همه توابع به این فرم را با $\mathcal{E}$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم نشان دهیم نقطه‌ای مانند $(p_*, q_*) \in K$ وجود دارد که برای هر $e \in \mathcal{E}$ ، $e(p_*, q_*) \geq 0$ اما داریم

(۱) هر تابع $e \in \mathcal{E}$ در بعضی نقاط $(p_e, q_e) \in K$ نامنفی است.

برای اثبات این حکم فرض می‌کنیم $e = e_{\alpha, v, \beta} \in \mathcal{E}$ و حالت‌های p_e و q_e را طوری انتخاب می‌کنیم که $\|e\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ و $p_e(\alpha\alpha^*) = \|\alpha\|^2$ و $q_e(\beta\beta^*) = \|\beta\|^2$ در این صورت داریم

$$e(p_e, q_e) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2\operatorname{Re} F(\alpha\beta) \geq 0.$$

زیرا

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(\alpha\beta) &\leq |F(\alpha\beta)| \leq \|F\| \|\alpha\| \|\beta\| \\ &\leq \|\alpha\| \|\beta\| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2). \end{aligned}$$

(۲) مجموعه $\mathcal{E}$ یک مخروط در $A(K)$ می‌باشد. این ادعا از رابطه $ce_{\alpha, v, \beta} = e_{c\alpha, v, c\beta}$ برای $c \geq 0$ و $e_{\alpha, v, \beta} \in \mathcal{E}$ نتیجه می‌شود. همچنین اگر $e_{\alpha', v', \beta'}, e_{\alpha, v, \beta} \in \mathcal{E}$ آنگاه $e_{\alpha, v, \beta} + e_{\alpha', v', \beta'} = e_{\alpha'', v'', \beta''}$ که در آن $\alpha'' = [\alpha \ \alpha']$ ، $\beta'' = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta' \end{bmatrix}$ و $v'' = v \oplus v'$ با توجه به خاصیت M_1

$$\|v''\| = \|v \oplus v'\| = \max\{\|v\|, \|v'\|\} = 1.$$

در این صورت شرایط لم ۷۳.۲ برقرار است و ما نشان دادیم که زوج (p_0, q_0) وجود دارد که در رابطه (۱۰.۲) صدق می‌کند. $\square$

لم ۷۵.۲. اگر V یک فضای عملگری مجرد باشد، آنگاه برای تابع خطی $F \in [\mathbb{M}_n(V)]^*$ که $\|F\| = 1$ نگاشت کاملاً انقباضی $\varphi : V \rightarrow \mathbb{M}_n$ و بردارهای $\xi, \eta \in (\mathbb{C}^n)^n$ وجود دارند به طوری که برای هر $v \in \mathbb{M}_n(V)$ $F(v) = \langle \varphi_n(v)\eta \mid \xi \rangle$.

برهان. حالت‌های p_0 و q_0 روی $\mathbb{M}_n$ را مانند لم ۷۴.۲ ثابت در نظر می‌گیریم. از قضیه نمایش گلفند-نیمارک-سگال، نمایش‌های متناظر π و θ از $\mathbb{M}_n$ روی فضای هیلبرت متناهی بعد H و K با بردارهای دوری $\xi_0 \in H$ و $\eta_0 \in K$ وجود دارند به طوری که برای هر $\alpha \in \mathbb{M}_n$

$$p_0(\alpha) = \langle \pi(\alpha)\xi_0 \mid \xi_0 \rangle \quad (11.2)$$

و

$$q_*(\alpha) = \langle \theta(\alpha)\eta_* | \eta_* \rangle. \quad (12.2)$$

برای ماتریس سطری $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n] \in \mathbb{M}_{1,n}$ ، ماتریس $\tilde{\alpha} \in \mathbb{M}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.2)$$

فضای خطی همه ماتریس‌های $n \times n$ به این صورت را با $\widetilde{M}_{1,n}$ نشان می‌دهیم. زیرفضای H_* از H و K_* از K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_* := \pi(\widetilde{M}_{1,n})\xi_* \subseteq H \quad (14.2)$$

و

$$K_* := \theta(\widetilde{M}_{1,n})\eta_* \subseteq K. \quad (15.2)$$

عنصر $v \in V$ را ثابت در نظر می‌گیریم و فرم یک و نیم خطی B_v را روی $K_* \times H_*$ برای $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_{1,n}$ دلخواه، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_v(\theta(\tilde{\beta})\eta_*, \pi(\tilde{\alpha})\xi_*) = F(\alpha^*v\beta) \quad (16.2)$$

طبق لم قبل و روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} |B_v(\theta(\tilde{\beta})\eta_*, \pi(\tilde{\alpha})\xi_*)| &= |F(\alpha^*v\beta)| \leq p_*(\alpha^*\alpha)^{\frac{1}{p}} \|v\| q_*(\beta^*\beta)^{\frac{1}{q}} \\ &= \langle \pi(\alpha^*\alpha)\xi_* | \xi_* \rangle^{\frac{1}{p}} \|v\| \langle \theta(\beta^*\beta)\eta_* | \eta_* \rangle^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\pi(\tilde{\alpha})\xi_*\| \|\theta(\tilde{\beta})\eta_*\| \|v\|. \end{aligned}$$

پس فرم یک و نیم خطی (نسبت به مولفه اول خطی و نسبت به مولفه دوم مزدوج خطی) کراندار است. بنابراین عملگر کراندار منحصربه‌فرد $\varphi_*(v) : K_* \longrightarrow H_*$ وجود دارد به طوری که برای $\theta(\tilde{\beta})\eta_* \in K_*$ و $\pi(\tilde{\alpha})\xi_* \in H_*$ رابطه زیر برقرار است

$$F(\alpha^*v\beta) = \langle \varphi_*(v)\theta(\tilde{\beta})\eta_* | \pi(\tilde{\alpha})\xi_* \rangle. \quad (17.2)$$

فضای H_0 دارای بعد h و فضای K_0 دارای بعد k است که $h, k \leq n$. می‌توان آنها را با زیرفضاهایی از $\mathbb{C}^h \oplus \mathbb{C}^{n-h}$ و $\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{n-k}$ یکی گرفت. اگر E را تصویر $\mathbb{C}^n$ در K_0 در نظر بگیریم و نگاشت φ را برای هر $v \in V$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned}\varphi : V &\longrightarrow \mathbb{M}_n \\ \varphi(v) &= \varphi_0(v)E,\end{aligned}$$

آنگاه نگاشت موردنظر در لم، که طبق (۱۷.۲) در رابطه زیر صدق می‌کند را یافته‌ایم

$$F(\alpha^* v \beta) = \langle \varphi(v) \theta(\tilde{\beta}) \eta_0 \mid \pi(\tilde{\alpha}) \xi_0 \rangle.$$

ماتریس $v \in \mathbb{M}_n(V)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}F(v) &= F\left(\sum_{i,j} E_i^{n*} v_{i,j} E_j^n\right) = \sum_{i,j} F(E_i^{n*} v_{i,j} E_j^n) \\ &= \sum_{i,j} \langle \varphi(v_{i,j}) \theta(\tilde{E}_j^n) \eta_0 \mid \pi(\tilde{E}_i^n) \xi_0 \rangle \\ &= \langle \varphi_n(v) \eta \mid \xi \rangle\end{aligned}$$

که در آن $\eta = \begin{pmatrix} \theta(\tilde{E}_1^n) \eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\tilde{E}_n^n) \eta_0 \end{pmatrix}$ به $(\mathbb{C}^n)^n$ تعلق دارند و در رابطه

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2 &= \langle \eta \mid \eta \rangle = \sum_i \langle \theta(\tilde{E}_i^n) \eta_0 \mid \theta(\tilde{E}_i^n) \eta_0 \rangle \\ &= \sum_i \|\theta(\tilde{E}_i^n) \eta_0\|^2 \\ &= \sum_i q_0(E_i^{n*} E_i^n) \\ &= q_0\left(\sum_i E_i^{n*} E_i^n\right) \\ &= q_0(I) = 1.\end{aligned}$$

صدق می‌کنند. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\|\xi\|^2 = 1$. اکنون باید ثابت کنیم نگاشت φ کاملاً انقباضی است. برای این کار باید نشان دهیم برای هر $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$ ها انقباضی هستند. با توجه به تعریف φ کافی است برای هر $\xi_1 \in H^n$ ، $v \in \mathbb{M}_n(V)$ و $\eta_1 \in K^n$ ثابت کنیم $|\langle (\varphi_n)_n(v)\eta_1 | \xi_1 \rangle| \leq \|v\| \|\eta_1\| \|\xi_1\|$. ماتریس‌های ξ_1 و η_1 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{M}_{1,n}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \pi(\tilde{\alpha}_1)\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{\alpha}_1)\xi_0 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} \theta(\tilde{\beta}_1)\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\tilde{\beta}_1)\eta_0 \end{pmatrix}.$$

هم‌چنین داریم

$$\|\eta_1\|^2 = \sum_j \|\theta(\tilde{\beta}_j)\eta_0\|^2 = \sum_j q_*(\beta_j^* \beta_j) = q_*(\beta^* \beta). \quad (18.2)$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد

$$\|\xi_1\|^2 = p_*(\alpha^* \alpha) \quad (19.2)$$

که در آن

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n.$$

این نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \langle (\varphi_n)_n(v)\eta_1 | \xi_1 \rangle &= \sum_{i,j} \langle \varphi_*(v_{i,j})\theta(\tilde{\beta}_j)\eta_0 | \pi(\tilde{\alpha}_i)\xi_0 \rangle \\ &= \sum_{i,j} F(\alpha_i^* v_{i,j} \beta_j) \\ &= F(\alpha^* v \beta). \end{aligned}$$

در پایان با توجه به لم ۷۴.۲ و رابطه‌های (۱۸.۲) و (۱۹.۲) داریم

$$|\langle (\varphi_n)_n(v)\eta_1 | \xi_1 \rangle| = |F(\alpha^* v \beta)| \leq p_*(\alpha^* \alpha)^{\frac{1}{2}} \|v\| q_*(\beta^* \beta)^{\frac{1}{2}} = \|v\| \|\xi_1\| \|\eta_1\|.$$

□

لم ۷۶.۲. اگر V یک فضای عملگری مجرد باشد و عنصر $v \in \mathbb{M}_n(V)$ داده شده باشد، آنگاه نگاشت کاملاً انقباضی $\varphi : V \rightarrow \mathbb{M}_n$ وجود دارد به طوری که $\|\varphi_n(v)\| = \|v\|$.

برهان. $v \in \mathbb{M}_n(V)$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه هان-باناخ، تابع خطی $F \in [\mathbb{M}_n(V)]^*$ وجود دارد به طوری که $\|F\| = 1$ و $|F(v)| = \|v\|$. طبق لم ۷۵.۲ نگاشت کاملاً انقباضی $\varphi : V \rightarrow \mathbb{M}_n$ و بردارهای $\xi, \eta \in (\mathbb{C}^n)^n$ وجود دارند به طوری که

$$\|\varphi_n(v)\| \geq |\langle \varphi_n(v)\eta | \xi \rangle| = |F(v)| = \|v\|.$$

عکس نامساوی بالا نیز به خاطر کاملاً کراندار بودن φ برقرار است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $\|\varphi_n(v)\| = \|v\|$. $\square$

قضیه ۷۷.۲. (قضیه نمایش) اگر V یک فضای عملگری مجرد باشد، آنگاه فضای هیلبرت H و فضای عملگری واقعی $W \subseteq B(H)$ وجود دارند که V با W کاملاً طولپا است.

برهان. برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$S_n = S_n(V) = CB(V, \mathbb{M}_n)_{\|\cdot\|_{cb} \leq 1}. \quad (20.2)$$

هم‌چنین

$$S = S(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n(V).$$

فضای هیلبرت مورد نظر را نیز به صورت $H = \bigoplus_{\varphi \in S} \mathbb{C}^{n(\varphi)}$ تعریف می‌کنیم، که در آن $n(\varphi)$ عدد صحیح n با شرط $\varphi \in S_n$ است و داریم

$$\begin{aligned} \Phi : V &\rightarrow B(H) \\ \Phi(v) &= (\varphi_n(v))_{\varphi \in S}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

می‌توانیم نگاشت $\Phi_n : \mathbb{M}_n(V) \rightarrow B(H^n)$ را با نگاشت $(\varphi_n(v))_{\varphi \in S}$ یکی $v \mapsto$ بگیریم. از این‌رو نگاشت Φ یک نگاشت کاملاً انقباضی است. از طرف دیگر برای یک $v \in \mathbb{M}_n(V)$ ثابت، با استفاده از لم ۷۶.۲ می‌توان $\varphi \in S_n$ را به نحوی انتخاب کرد که $\|(\varphi \circ)_n(v)\| = \|v\|$ واضح است که

$$\|\Phi_n(v)\| \geq \|(\varphi \circ)_n(v)\| = \|v\|.$$

در نتیجه $\|\Phi_n(v)\| = \|v\|$ و Φ یک نگاشت کاملاً طولپا می‌باشد. $\square$

قضیه بالا نشان می‌دهد که عنصر جامع رسته فضاهای عملگری مجرد، زیر فضاهای بسته $B(H)$ ، یعنی فضاهای عملگری واقعی، هستند و لذا بدون ابهام از این به بعد این دو فضا را زیر عنوان فضاهای عملگری می‌شناسیم. در ادامه مثال‌هایی از ساختارهای فضاهای عملگری، نحوه ساختن و مطالعه آنها بیان می‌کنیم.

مثال ۷۸.۲. فرض کنید V یک فضای نرم‌دار و $J : V \rightarrow B(H)$ یک طولپایی باشد. در این صورت برای $v_{ij} \in V$ قرار می‌دهیم $\| [Jv_{ij}]_{n \times n} \|_n = \| [v_{ij}]_{n \times n} \|_n$. یکرختی $B(\mathcal{H}^n) = \mathbb{M}_n(B(H))$ یک راه طبیعی برای ایجاد یک ساختار عملگری روی یک فضای نرم‌دار است که به آن الحاق می‌شود.

مثال ۷۹.۲. فرض کنید A یک C^* -جبر و $\pi : A \rightarrow B(H)$ یک نمایش یک‌به‌یک از آن باشد که بنابر قضیه گلفند-نیمارک-سگال موجود است. در این صورت با توجه به مثال قبل $\| [a_{ij}] \|_n = \| [\pi(a_{ij})] \|_n$ ، نرم یکتایی است که روی $\mathbb{M}_n(A)$ تعریف می‌شود و A را به یک فضای عملگری تبدیل می‌کند.

مثال ۸۰.۲. برای زیرفضای بسته $V_0 \subseteq V$ با قراردادن

$$\mathbb{M}_n(V/V_0) \cong \mathbb{M}_n(V)/\mathbb{M}_n(V_0)$$

می‌توان ساختار فضای عملگری خارج‌قسمتی را تعریف کرد و V/V_0 را به فضای عملگری تبدیل کرد.

مثال ۸۱.۲. فرض کنید V یک فضای نرم‌دار باشد. حال نداشت ارزیاب $E : V \rightarrow C((\text{ball}(V^*), w^*))$ را با تعریف $E(v)(f) = f(v)$ در نظر بگیرید. با قراردادن $B = ((\text{ball}(V^*), w^*))$ ، مشاهده می‌کنیم که به‌عنوان جبرهای C^* ، یکرختی $\mathbb{M}_n(C(B)) \cong \mathbb{M}_n(C(B, \mathbb{M}_n))$ موجود است. بنابراین همین ساختار عملگری را می‌توان به V منتقل کرد. این ساختار را ساختار عملگری مینیمال روی V می‌نامیم. در واقع

$$\| [v_{ij}] \|_n^{\min} = \sup_{\xi \in (\text{Ball}(E^*), w^*)} \| [\xi(v_{ij})] \|_{\mathbb{M}_n}.$$

مثال ۸۲.۲. فرض کنید V یک فضای نرم‌دار باشد. برای $[v_{ij}] \in \mathbb{M}_n(V)$ ، مقدار $\| [v_{ij}] \|_n^{\max}$ را به صورت

$\sup \left\{ \| [Jv_{ij}] \| \mid J : V \rightarrow B(H) \text{ یک طولپایی است و } H \text{ یک فضای هیلبرت است} \right\}$

تعریف می‌کنیم. با توجه به اینکه $\| [v_{ij}] \|_n^{\max} \leq \sum_{i,j=1}^n \| v_{ij} \|$ این سوپریمم متناهی است. این تعریف را ساختار فضای عملگری ماکسیمال می‌نامیم. در واقع

$$\max V = (V, (\| \cdot \|_n^{\max})_{n=1}^{\infty})$$

و همواره $B(V, W) = CB(\max V, W)$. همچنین برای هر ساختار عملگری دلخواهی از V داریم

$$\| [v] \|_n^{\min} \leq \| v \|_n \leq \| v \|_n^{\max}.$$

مثال ۸۳.۲. دقت کنید با هر ساختار فضای عملگری برای V ، با در نظر گرفتن تساوی $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_m(V)) = \mathbb{M}_{nm}(V)$ فضای $\mathbb{M}_m(V)$ خود یک فضای عملگری است. همچنین برای دو فضای عملگری V و W با قراردادن

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(CB(V, W)) &\cong CB(V, \mathbb{M}_n(W)) \\ [T_{ij}] &\longmapsto (V \longrightarrow [T_{ij}V]) \end{aligned}$$

یک طولپایی برقرار می‌شود و این یعنی $CB(V, W)$ و به‌طور خاص V^* خود یک فضای عملگری است و داریم $\mathbb{M}_n(V^*) \cong CB(V, \mathbb{M}_n)$. در مثال ۸۴.۲ آن را دقیق‌تر معرفی می‌کنیم.

مثال ۸۴.۲. (فضای دوگان) در ادامه برای دو فضای عملگری V و W ساختار فضای عملگری طبیعی روی فضای نرم‌دار $CB(V, W)$ را ارائه می‌کنیم. از بخش‌های قبل به‌خاطر بیاورید $V^* = B(V, C) = CB(V, C)$ می‌خواهیم روی $\mathbb{M}_n(V^*)$ نرم مناسبی که در شرایط نرم فضای عملگری صادق باشد، تعریف کنیم. برای این هدف فرض کنید $f = [f_{ij}] \in \mathbb{M}_n(V^*)$ نگاشت $f : V \longrightarrow \mathbb{M}_n$ با تعریف $f(v) = [f_{ij}(v)]$ را داریم. این نگاشت، طولپایی $\mathbb{M}_n(V^*) \cong CB(V, \mathbb{M}_n)$ را به‌دست می‌دهد و به‌این ترتیب خانواده نرم‌دار $\mathbb{M}_n(V^*)$ برای $n \in \mathbb{N}$ حاصل می‌شود. با این تعریف V^* به یک فضای عملگری تبدیل می‌شود. در واقع برای $f \in \mathbb{M}_n(V^*)$ داریم

$$\| f \| = \sup \left\{ \| f_n(v) \| \mid v \in \mathbb{M}_n(V), \| v \| \leq 1 \right\}$$

به همین شکل نرم روی $\mathbb{M}_n(V^*)$ ، نرم فضای عملگری مناسبی را روی $\mathbb{M}_n(V)$ مشخص می‌کند. فرض کنید $v \in \mathbb{M}_n(V)$ ، قرار می‌دهیم

$$\|v\| = \sup \left\{ \|f_n(v)\|, f \in CB(V, \mathbb{M}_n), \|f\|_{cb} \leq 1 \right\}$$

بنابراین پیش‌دوگان هر فضای عملگری در صورت وجود به یک ساختار عملگری مجهز است. به‌طور خاص با توجه به قضیه معروف ساکایی، هر جبر فون نویمان (زیرجبر یکدار $*$ - بسته، w^* - بسته $\mathbb{M}(B(H))$ ، دارای یک پیش‌دوگان یکتای $\mathbb{M}_*$ است. بنابراین با تعریف بالا می‌توان $\mathbb{M}_*$ را به یک فضای عملگری تبدیل کرد.

$A(G)$ به‌عنوان پیش‌دوگان $VN(G)$ و $B(G)$ به‌عنوان $C^*(G)^*$ مجهز به ساختار عملگری طبیعی هستند.

در فصل بعد نشان می‌دهیم در واقع این ساختار با ساختار جبری $A(G)$ نیز سازگاری مناسبی دارد و آن را به یک جبر کوانتیده^۱ تبدیل می‌کند.

۸.۱.۲ فضاهای p -عملگری

گذار از مبحث فضاهای عملگری که مطالعه عملگرهای روی فضاهای هیلبرت تلقی می‌شود، به عملگرها روی فضاهای باناخ خاص (L^p - فضاها) یکی از علاقمندی‌های نویسندگان این کتاب است. از این رو، در این بخش به ارائه مفاهیمی در ارتباط با فضای p -عملگری^۲ پرداخته ایم. تعاریف و قضایای ارائه شده در این قسمت غالباً برگرفته از [۱۸] است.

در ابتدا نمادهای مورد استفاده در این بخش را ارائه می‌کنیم. در سراسر این بخش $p \in (1, \infty)$ و $p' = \frac{p}{p-1}$. برای $n \in \mathbb{N}$ فضای L_p^n همان فضای $\mathbb{C}^n$ با نرم L^p است. در واقع فضای l_p^n فضای همه بردارهای $\mathbb{C}^n$ $a = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{C}^n$ است به‌طوری‌که نرم

بردار a به‌صورت $\|a\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌شود. همچنین برای یک مجموعه

اندیس‌گذار $\mathbb{I}$ فضای $l^p(\mathbb{I})$ شامل اعضای $a = [a_i]_{i \in \mathbb{I}}$ است به‌طوری‌که $a_i \in \mathbb{C}$ و داریم

$$\|a\|_{l^p(\mathbb{I})} = \left(\sum_{i \in \mathbb{I}} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

1. quantized algebra

2. p -operator space

که در این سری، حداکثر شمارا جمله مخالف صفر است. فضای همه ماتریس های $n \times m$ با درایه های متعلق به $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{M}_{n,m}$ و اگر $n = m$ با $\mathbb{M}_n$ نشان می‌دهیم. نرم یک ماتریس مانند $a = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{n,m}$ را با در نظر گرفتن آن به عنوان عملگری متعلق به فضای $B(l_p^m, l_p^n)$ به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\|a\|_{B(l_p^m, l_p^n)} = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} b_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} : b \in l_p^m, \|b\|_{l_p^m} \leq 1 \right\}.$$

برای شناسایی QSL_p -فضاها [۴۴] معیار دیگری ارائه می‌کند که در ادامه آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸۵.۲. فضای E یک QSL_p -فضا است اگر و فقط اگر برای هر ماتریس $a = [a_{ij}]$ در $\mathbb{M}_n$

$$\sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} : [\xi_j]_{j=1}^n \subset E, \sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^p \leq 1 \right\} \leq \|a\|_{B(l_p^n)}.$$

حال تعریف زیر ارائه می‌کنیم.

تعریف ۸۶.۲. یک فضای p -عملگر واقعی^۱ یک زیر فضای بسته X از فضای $B(E)$ است که در آن فضای E یک QSL_p -فضا است.

تذکر ۸۷.۲. در تعریف بالا، به طور معادل به جای $B(E)$ می‌توان $B(E, F)$ قرار داد که در آن E و F دو QSL_p -فضا هستند. در این صورت می‌توان فضای $B(E, F)$ را با زیر فضای بسته ای از $B(E \oplus_p F)$ یکی در نظر گرفت و به تعریف اولیه رسید.

اینک توصیف خانواده‌ای از نرم‌ها روی فضای ضرب تانسوری از فضاهای p -عملگری واقعی را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۸۸.۲. برای یک QSL_p -فضای E و فضای p -عملگر واقعی X از $B(E)$ و اعداد $n, m \in \mathbb{N}$ نرم $\|\cdot\|_{n,m}$ روی فضای $\mathbb{M}_{n,m} \otimes X = \mathbb{M}_{n,m}(X)$ را با در نظر گرفتن

1. concrete p -operator space

$\mathbb{M}_{n,m}(X)$ به عنوان زیر فضایی از $\mathcal{B}(l_p^m \otimes_p E, l_p^n \otimes_p E)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر، برای عضو $T = [T_{ij}] \in \mathbb{M}_{n,m}(X)$ نرم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\|T\|_{n,m} = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^m T_{ij}[\xi_j] \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : [\xi_j]_{j=1}^m \subset E, \sum_{j=1}^m \|\xi_j\|^p \leq 1 \right\}.$$

در حالتی که $n = m$ این نرم را با $\|\cdot\|_n$ نشان می‌دهیم.

برای فضای p -عملگر واقعی $X \subseteq \mathcal{B}(E)$ خانواده نرم‌های $\|\cdot\|_n$ در دو خاصیت زیر صدق می‌کنند.

۱. خاصیت $\mathcal{D}_\infty$: برای $u \in \mathbb{M}_n(X)$ و $v \in \mathbb{M}_m(X)$ داریم

$$\|u \otimes v\|_{n+m} = \max(\|u\|_n, \|v\|_m).$$

که ماتریس $u \otimes v$ به فضای $\mathbb{M}_{n+m}(X)$ تعلق دارد و دارای نمایش بلوکی $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ است.

۲. خاصیت $\mathbb{M}_p$: برای $a \in \mathbb{M}_{n,m}$ ، $b \in \mathbb{M}_{m,n}$ و $u \in \mathbb{M}_m(X)$ داریم

$$\|aub\|_n \leq \|a\| \|u\|_m \|b\|,$$

که در آن نرم‌های $\|a\|$ و $\|b\|$ به ترتیب به عنوان اعضای $\mathcal{B}(l_p^m, l_p^n)$ و $\mathcal{B}(l_p^n, l_p^m)$ محاسبه می‌شوند.

اکنون به توصیف دیگری از فضاهای p -عملگری می‌پردازیم.

تعریف ۸۹.۲. فضای p -عملگری مجرد^۱، یک فضای باناخ X به همراه خانواده ای از نرم‌ها مانند $(\|\cdot\|_n)_{n=1}^\infty$ است به طوری که خانواده $(\mathbb{M}_n(X), \|\cdot\|_n)_{n=1}^\infty$ در دو خاصیت $\mathcal{D}_\infty$ و $\mathbb{M}_p$ صدق می‌کند.

1. abstract p -operator space

تذکر ۲.۹۰. برای حالتی که $p = 2$ دو شرط بالا برای فضاهای p -عملگر همان شرایط روان در [۲۴] برای فضاهای عملگری است، در نتیجه این تعریف در حالت $p = 2$ منطبق بر تعریف روان است.

برای عملگر خطی $\Phi : X \rightarrow Y$ نگاشت « n -تا»^۱ شده Φ به صورت زیر تعریف می شود

$$\Phi^{(n)} : \mathbb{M}_n(X) \rightarrow \mathbb{M}_n(Y), \quad \Phi^{(n)}((T_{ij})) := (\Phi(T_{ij})), \quad (T_{ij}) \in \mathbb{M}_n(X).$$

حال تعریف زیر را ارائه می دهیم.

تعریف ۲.۹۱. فرض کنید X و Y دو فضای p -عملگری باشند و $\Phi : X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد. می گوئیم Φ یک

۱. عملگر p -کاملاً کراندار^۲ است، هرگاه $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi^{(n)}\| < \infty$.

۲. عملگر p -کاملاً انقباضی^۳ است هرگاه $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi^{(n)}\| \leq 1$.

۳. p -کاملاً طولپا^۴ است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ نگاشت $\Phi^{(n)}$ طولپا باشد و در این حالت داریم $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi^{(n)}\| = 1$.

۴. یکریختی p -کاملاً طولپا (انقباضی - کراندار) است هرگاه وارون پذیر (یک به یک و پوشا) و p -کاملاً طولپا (انقباضی - کراندار) بوده و Φ^{-1} نگاشتی p -کاملاً طولپا (کراندار) باشد. در این حالت می گوئیم دو فضای p -عملگری X و Y به صورت p -کاملاً طولپا (انقباضی - کراندار) یکریخت هستند.

برای یک نگاشت مانند Φ در بالا، مقدار $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi^{(n)}\|$ را با $\|\Phi\|_{p-cb}$ نشان می دهیم. همچنین فضای همه نگاشت های p -کاملاً کراندار بین دو فضای p -عملگری X و Y را با $\mathcal{CB}_p(X, Y)$ نمایش می دهیم. نرم روی فضای ماتریسی $\mathbb{M}_n(\mathcal{CB}_p(X, Y))$ با یکسان در نظر گرفتن این فضا با فضای $\mathcal{CB}_p(X, \mathbb{M}_n(Y))$ حاصل می شود و این نرم های ماتریسی در دو شرط D_∞ و $\mathbb{M}_p$ صدق می کنند. در نتیجه فضای $\mathcal{CB}_p(X, Y)$ به همراه این خانواده از نرم ها به یک فضای p -عملگر تبدیل می شود.

1. (n) -fold
2. p -completely bounded
3. p -completely contractive
4. p -completely isometric

قضیه ۹۲.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ و $(\|\cdot\|_n)_{n=1}^\infty$ خانواده‌ای از نرم‌های ماتریسی روی آن باشد. آنگاه خانواده $(\mathbb{M}_n(X), \|\cdot\|_n)_{n=1}^\infty$ در دو شرط $\mathbb{M}_p$ و $\mathcal{D}_\infty$ صدق می‌کند (یعنی X یک فضای p -عملگری مجرد است) اگر و تنها اگر دو QSL_p -فضا مانند E و F موجود باشند به‌طوری‌که نگاشت طبیعی $J: X \rightarrow \mathcal{B}(E, F)$ یک نگاشت p -کاملاً طولپا باشد.

برهان. برای دیدن اثبات به قضیه ۴۰.۱ از [۴۴] مراجعه کنید. $\square$

قضیه قبل بیانگر این امر است که یک فضای p -عملگری مجرد یک فضای باناخ مانند X است که به‌صورت طولپا در یک فضای $\mathcal{B}(E)$ می‌نشیند (با در نظر گرفتن $\mathcal{B}(E, F)$ به عنوان زیر فضایی از $\mathcal{B}(E \otimes_p F)$ و در نهایت با تغییر نماد $E \otimes_p F := E$)، یعنی با زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{B}(E)$ به‌صورت p -کاملاً طولپا یگریخت است. در ادامه چند نتیجه در ارتباط با ساختار فضاهای p -عملگری ارائه می‌کنیم.

لم ۹۳.۲. فرض کنید X یک فضای p -عملگری باشد و $\eta \in X^*$. آنگاه η به عنوان یک نگاشت از X به توی $\mathbb{C}$ یک نگاشت p -کاملاً کراندار است و داریم $\|\eta\|_{p\text{-cb}} = \|\eta\|$.

برهان. لم ۴۰.۲ از [۱۸] را ببینید. $\square$

قضیه ۹۴.۲. فرض کنید X یک فضای p -عملگری باشد. آنگاه برای یک مجموعه اندیس‌گذار $\mathbb{I}$ نگاشت p -کاملاً طولپای $\mathcal{J}: X^* \rightarrow \mathcal{B}(L^p(\mathbb{I}))$ وجود دارد.

برهان. برای دیدن اثبات به قضیه ۴۰.۳ از [۱۸] مراجعه کنید. $\square$

خالی از لطف نیست که نحوه به دست آمدن مجموعه اندیس‌گذار $\mathbb{I}$ را توصیف کنیم. برای $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید

$$s_n = \{\xi \in \mathbb{M}_n(X) : \|\xi\|_n = 1\}, \quad s = \bigcup_{n=1}^\infty s_n.$$

برای $x \in s$ فرض کنید $n(x) \in \mathbb{N}$ به گونه‌ای باشد که $x \in s_{n(x)}$. قرار دهید

$$E = l^p - \oplus_{x \in s} l_p^{n(x)}.$$

آنگاه فضای E با یک فضای $l^p(\mathbb{I})$ یگریخت است. در واقع داریم $\mathbb{I} = \mathbb{N}^{|s|}$. لم بعد یکی از مهم‌ترین نتایج در [۱۸] است. این لم یکی از تکنیک‌های اصلی ما در این کتاب است.

لم ۹۵.۲. فرض کنید X و Y دو فضای p -عملگری باشند و $\Phi \in CB_p(X, Y)$. آنگاه $\Phi^* \in CB_p(Y^*, X^*)$ و داریم $\|\Phi^*\|_{p-cb} \leq \|\Phi\|_{p-cb}$.

برهان. برای دیدن اثبات به لم ۴۰۵ از [۱۸] مراجعه کنید $\square$

۲.۲ ضربهای تانسوری

ضرب تانسوری یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات مدرن است که نقش محوری در شاخه‌های مختلف ایفا می‌کند. این مفهوم به ویژه در آنالیز تابعی و نظریه عملگرها حائز اهمیت است. ضرب تانسوری فضاهای باناخ و هیلبرت امکان مطالعه سیستم‌های چندمتغیره را فراهم می‌کند. ضرب تانسوری در نظریه C^* -جبرها، برای ساخت جبرهای عملگری جدید ضروری است. همچنین به تعریف نرم‌های عملگری مانند نرم‌های شاتن کمک می‌کند. در جبر خطی و چندخطی امکان توصیف تبدیل‌های چندخطی را می‌دهد و در محاسبات ماتریسی و بهینه‌سازی کاربرد دارد. در فیزیک ریاضی برای فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی چندذره‌ای^۱ ضروری است و در نظریه میدان‌های کوانتومی کاربرد دارد و در شبکه‌های عصبی عمیق برای محاسبات پارامترها استفاده می‌شود.

در این بخش کلیه ضرب‌های تانسوری مورد استفاده در این کتاب مورد بررسی قرار می‌گیرند، به این ترتیب که با استفاده از مطالب مربوط به بخش ۱.۲، در زیربخش ۱.۲.۲ به مقدمه‌ای بر انواع ضرب تانسوری^۲ دو فضای باناخ می‌پردازیم و با معرفی نرم‌های مختلف تا حد امکان این فضا را توصیف می‌کنیم. در زیربخش ۲.۲.۲ ضرب‌های تانسوری مربوط به جبرها ارائه می‌شود. در گام بعد، در زیربخش ۳.۲.۲ ضرب تانسوری ویژه‌ای را که توسط روندا ارائه شد، روی QSL_p -فضاها توصیف می‌کنیم. در نهایت در ۴.۲.۲ با بیان مفاهیم مربوط به فضاهای p -عملگری و ضرب تانسوری متناسب با آن در زیربخش ۸.۱.۲ این بخش را به پایان می‌رسانیم. با توجه به نقش ضمیمه‌ای این بخش، از آوردن برهان‌ها پرهیز کرده ایم و در تمام موارد مراجع دقیق را اعلام نموده ایم. برای دیدن مفاهیم در حالت کلی تر و خواص بیشتر می‌توانید [۵۸]، [۱۹] و [۵۶] را مطالعه کنید.

1. many-particle quantum mechanics
2. tensor product space

۱.۲.۲ ضربهای تانسوری تزریقی و تصویری

در این بخش خود را همچنان به فضاهای باناخ محدود می‌کنیم. فرض کنید V و W دو فضای باناخ باشند. برای جفت $(v, w) \in V \times W$ عضو متناظر $v \otimes w$ را می‌توان به دو صورت، به عنوان عضوی از فضای $\mathfrak{B}(V \times W)^*$ و یا عضوی از $\mathfrak{B}(V^* \times W^*)$ ، در نظر گرفت. روابط زیر گویای این حقیقت هستند

$$\begin{aligned} v \otimes w : \mathfrak{B}(V \times W) &\rightarrow \mathbb{C}, & \langle T, v \otimes w \rangle &= T(v, w), & T &\in \mathfrak{B}(V \times W), \\ v \otimes w : V^* \times W^* &\rightarrow \mathbb{C}, & v \otimes w(s, t) &= \langle v, s \rangle \langle w, t \rangle, & (s, t) &\in V^* \times W^*. \end{aligned}$$

فضای ضرب تانسوری جبری $V \otimes W$ ^۱، فضای همه عناصر به صورت $u = \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k$ است که در آن $n \in \mathbb{N}$. با توجه به توضیحات بالا، از طریق رابطه زیر، این عنصر به فضای $\mathfrak{B}(V \times W)^*$ متعلق است. برای $T \in \mathfrak{B}(V \times W)$ داریم:

$$\langle T, u \rangle = \langle T, \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle T, v_k \otimes w_k \rangle = \sum_{k=1}^n T(v_k, w_k).$$

همچنین به طور مشابه می‌توان u را به عنوان عضوی از فضای $\mathfrak{B}(V^* \times W^*)$ توسط رابطه زیر در نظر گرفت

$$u(s \times t) = \left(\sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k \right)(s, t) = \sum_{k=1}^n \langle v_k, s \rangle \langle w_k, t \rangle, \quad (s, t) \in V^* \times W^*.$$

تعریف ۹۶.۲. برای دو فضای باناخ V و W نرم $\|\cdot\|_\alpha$ روی فضای $V \otimes W$ را یک نرم زیر-صلیبی^۲ می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو $v \in V$ و $w \in W$ ،

$$\|v \otimes w\|_\alpha \leq \|v\|_V \|w\|_W, \quad v \otimes w \in V \otimes W,$$

و نرم صلیبی^۳ می‌نامیم، هرگاه

$$\|v \otimes w\|_\alpha = \|v\|_V \|w\|_W, \quad v \otimes w \in V \otimes W.$$

-
1. algebraic tensor product space
 2. sub cross-norm
 3. cross-norm

در ادامه برخی از ویژگی‌های ضرب‌های تانسوری قابل تعریف روی فضای ضرب تانسوری جبری را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۹۷.۲. به نرم $\|\cdot\|_\alpha$ روی فضای ضرب تانسوری جبری $V \otimes W$ یک نرم صلیبی معقول^۱ می‌گویند هرگاه

$$1. \text{ برای } v \otimes w \text{ در } V \otimes W, \|v \otimes w\|_\alpha \leq \|v\|_V \|w\|_W,$$

$$2. \text{ برای } s \otimes t \in (V \otimes_\alpha W)^*, s \otimes t \in V^* \otimes W^* \text{ و } \|s \otimes t\|_{\text{op}} \leq \|s\|_{\text{op}} \|t\|_{\text{op}}.$$

فضای $V \otimes W$ مجهز به نرم $\|\cdot\|_\alpha$ را با $V \otimes_\alpha W$ و کامل شده این فضا با این نرم را با $V \tilde{\otimes}_\alpha W$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹۸.۲. فرض می‌کنیم V, W, E و F فضاهای باناخ باشند.

۱. می‌گوییم نرم $\|\cdot\|_\alpha$ دارای ویژگی نگاشت متری^۲ است هرگاه برای هر دو عملگر T و S به ترتیب از فضاهای $B(W, F)$ و $B(V, E)$,

$$T \otimes S \in B(V \otimes_\alpha W, E \otimes_\alpha F), \quad \|T \otimes S\| \leq \|T\| \|S\|.$$

۲. به نرم صلیبی معقول که در خاصیت نگاشت متری صدق کند، نرم صلیبی یکنواخت^۳ و یا نرم تانسوری^۴ گویند.

حال اولین نرم شناخته شده و مهم بر روی فضای ضرب تانسوری جبری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹۹.۲. نرم تصویری^۵ روی فضای ضرب تانسوری جبری $V \otimes W$ که آن را با $\|\cdot\|_\wedge$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|u\|_\wedge = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|v_k\| \|w_k\| : u = \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k \right\},$$

-
1. reasonable cross-norm
 2. metric mapping property
 3. uniform cross-norm
 4. tensor norm
 5. projective norm

که اینفیم روی همه نمایش‌های ممکن برای عضو u به صورت $u = \sum_{k=1}^n v_k \otimes v_k$ محاسبه می‌شود.

فضای $V \otimes W$ مجهز به نرم $\|\cdot\|_{\wedge}$ را با $V \otimes_{\wedge} W$ و کامل شده این فضا با این نرم را با $V \widehat{\otimes} W$ نشان می‌دهند و آن را فضای ضرب تانسوری تصویری V و W می‌نامند.

گزاره ۱۰۰.۲. فرض کنید V و W دو فضای باناخ باشند، $u \in V \widehat{\otimes} W$ و $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. آنگاه دنباله‌های $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ و $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq W$ موجود هستند به طوری که سری $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes w_n$ به u همگرا است و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| \|w_n\| < \|u\|_{\wedge} + \epsilon,$$

و در نتیجه

$$\|u\|_{\wedge} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty, u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\}$$

برهان. برای دیدن اثبات به گزاره ۲۰.۸ از [۵۸] مراجعه کنید. $\square$

تذکر ۱۰۱.۲. گزاره بالا این حقیقت را بیان می‌کند که فضای $V \widehat{\otimes} W$ فضای باناخ همه اعضا به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes w_n$ است و نرم چنین عضوی با اینفیم گیری روی همه مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| \|w_n\| < \infty$ به ازای همه نمایش‌های عضو u محاسبه می‌شود.

هر نگاشت $T \in \mathfrak{B}(V \times W, Z)$ یک نگاشت $\mathcal{J}(T) \in \mathcal{B}(V \widehat{\otimes} W, Z)$ به صورت زیر تعریف می‌کند

$$\mathcal{J}(T) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes w_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} T(v_n, w_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \otimes w_n \in V \widehat{\otimes} W.$$

همچنین، هر نگاشت $T \in \mathcal{B}(V \widehat{\otimes} W, Z)$ یک نگاشت $\mathcal{S}(T) \in \mathcal{B}(V \times W, Z)$ به صورت زیر تعریف می‌کند

$$\mathcal{S}(T)(v, w) = T(v \otimes w), \quad (v, w) \in V \times W.$$

حال قضیه مهم زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰۲.۲. فرض کنید V ، W و Z سه فضای باناخ باشند. آنگاه یکریختی طولپای $\mathfrak{B}(V \times W, Z) = \mathcal{B}(V \hat{\otimes} W, Z)$ را داریم. به طور ویژه اگر قرار دهیم $Z = \mathbb{C}$ ، آنگاه

$$\mathfrak{B}(V \times W) = (V \hat{\otimes} W)^*. \quad (22.2)$$

در نتیجه نرم $\|\cdot\|_{\wedge}$ از طریق این رابطه دوگانی به صورت زیر نیز قابل محاسبه است

$$\|u\|_{\wedge} = \{|\langle u, T \rangle| : T \in \mathfrak{B}(V \times W), \|T\| \leq 1\}.$$

برهان. برای دیدن اثبات به قضیه ۲۰۹ از [۵۸] مراجعه کنید. $\square$

تذکر ۱۰۳.۲. در حالتی که فضای باناخ V بازتابی باشد، با استفاده از روابط (۴.۲) و (۲۲.۲) داریم $\mathcal{B}(V) = (V^* \hat{\otimes} V)^*$.

توجه کنید که نرم تصویری حاصل از در نظر گرفتن فضای ضرب تانسوری جبری $V \otimes W$ به عنوان زیرفضایی از دوگان $(V \hat{\otimes} W)^{**} = \mathfrak{B}(V \times W)^*$ است. تعریف بعد، نرم دیگری برای ضرب تانسوری جبری $V \otimes W$ ارائه می‌کند که حاصل از در نظر گرفتن این فضا به عنوان زیرفضایی از فضای $\mathfrak{B}(V^* \times W^*)$ است.

تعریف ۱۰۴.۲. نرم تزریقی^۱ روی فضای ضرب تانسوری جبری دو فضای باناخ V و W با $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|u\|_{\varepsilon} = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n \langle v_k, s \rangle \langle w_k, t \rangle \right| : \|s\| \leq 1, \|t\| \leq 1, s \in V^*, t \in W^* \right\},$$

که در آن نمایش دلخواهی از عضو u است. این یعنی نرم تزریقی مستقل از انتخاب نمایش u است. فضای $V \otimes W$ مجهز شده به نرم $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ را با $V \otimes_{\varepsilon} W$ و کامل شده این فضا با این نرم را با $V \hat{\otimes}_{\varepsilon} W$ نشان می‌دهند و آن را فضای ضرب تانسوری تزریقی^۲ دو فضای V و W می‌نامند.

-
1. injective norm
 2. injective tensor product space

گزاره ۱۰۵.۲. فرض کنید فضاهای V و W دو فضای باناخ باشند. آنگاه برای $u \in V \otimes W$ داریم $\|u\|_\varepsilon \leq \|u\|_\wedge$ و برای $v \in V, w \in W$ ، تساوی‌های نرمی تانسوری

$$\|v \otimes w\|_\varepsilon = \|v \otimes w\|_\wedge = \|v\|_V \|w\|_W$$

برقرار است.

برهان. برای دیدن اثبات به گزاره ۳۰۱ از [۵۸] مراجعه کنید. $\square$

گزاره ۱۰۶.۲. فرض کنید V و W دو فضای باناخ باشند.

۱. نرم $\|\cdot\|_\alpha$ یک نرم صلیبی معقول روی $V \otimes W$ است اگر و فقط اگر

$$\|\cdot\|_\varepsilon \leq \|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\wedge.$$

۲. اگر نرم $\|\cdot\|_\alpha$ یک نرم صلیبی معقول روی $V \otimes W$ باشد، آنگاه برای هر $v \in V$ و

$w \in W$ داریم $\|v \otimes w\|_\alpha = \|v\| \|w\|$ و برای هر $s \in V^*$ و $t \in W^*$ نگاشت $s \otimes t$ یک تابع خطی کراندار روی $V \otimes_\alpha W$ است و داریم $\|s \otimes t\| = \|s\| \|t\|$.

برهان. برای دیدن اثبات به گزاره ۱۰۶ از [۵۸] مراجعه کنید. $\square$

تذکره ۱۰۷.۲. توجه کنید که بنابر تعاریف فوق، نرم‌های $\|\cdot\|_\varepsilon$ و $\|\cdot\|_\wedge$ نرم‌های تانسوری هستند.

یکی دیگر از نرم‌های تانسوری روی فضای ضرب تانسوری جبری دو فضای V و W ، نرم تانسوری دوگانی^۱ است. ابتدا نرم دوگانی شاتن^۲ را تعریف می‌کنیم. برای این منظور دقت می‌کنیم که برای هر نرم تانسوری $\|\cdot\|_\alpha$ روی فضای $V^* \otimes W^*$ ، فضای ضرب تانسوری جبری $V \otimes W$ مشمول در فضای $(V^* \tilde{\otimes}_\alpha W^*)^*$ است. حال بر این هدف هستیم که از این رابطه دوگانی موجود، به نرم مناسبی برای $V \otimes W$ برسیم. برای $u = \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k \in V \otimes W$ و $z = \sum_{l=1}^m s_l \otimes t_l \in V^* \otimes W^*$ رابطه دوگانی زیر را در نظر بگیرید

$$\langle z, u \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^m s_l \otimes t_l, \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \langle v_k, s_l \rangle \langle w_k, t_l \rangle.$$

حال تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

-
1. dual tensor norm
 2. schatten dual norm

تعریف ۱۰۸.۲. برای نرم تانسوری $\|\cdot\|_\alpha$ به روی فضای $V^* \otimes W^*$ نرم دوگانی شاتن با $\|\cdot\|_{\alpha^s}$ نشان داده و برای $u \in V \otimes W$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\|u\|_{\alpha^s} = \sup \{ |\langle z, u \rangle| : \|z\|_\alpha \leq 1, z \in V^* \otimes W^* \}. \quad (23.2)$$

در حالتی که فضاهای V و W با بعد متناهی باشند، آنگاه داریم

$$V \tilde{\otimes}_{\alpha^s} W = (V^* \otimes_\alpha W^*)^*, \quad \|\cdot\|_{\alpha^s} = \|\cdot\|_{\alpha'}.$$

با استفاده از توضیحات [۵۸] داریم $\|\cdot\|_{\wedge^s} = \|\cdot\|_\varepsilon$. اما ممکن است روی اعضای فضا نامساوی نرمی $\|\cdot\|_{\wedge} < \|\cdot\|_{\varepsilon}$ برقرار باشد و این یعنی لزوماً تساوی $\|\cdot\|_{(\wedge^s)^s} = \|\cdot\|_{\wedge}$ برقرار نیست. در اینجا نیاز به تعریف بهتری از نرم دوگانی داریم. تعریف زیر مناسب خواهد بود.

تعریف ۱۰۹.۲. برای نرم $\|\cdot\|_\alpha$ به روی $V^* \otimes W^*$ نرم دوگانی تانسوری $\|\cdot\|_{\alpha'}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|u\|_{\alpha'} = \inf \{ \|u\|_{\alpha_{E \otimes F}^s} : E \subseteq V, F \subseteq W, u \in E \otimes F, \dim E, \dim F < \infty \},$$

که در اینجا نرم $\|u\|_{\alpha_{E \otimes F}^s}$ مشابه رابطه (۲۳.۲) به صورت زیر محاسبه می شود

$$\|u\|_{\alpha_{E \otimes F}^s} = \sup \{ |\langle z, u \rangle| : \|z\|_\alpha \leq 1, z \in E^* \otimes F^* \}.$$

با توجه به این تعریف و خواص زیر فضاهای با بعد متناهی تساوی های زیر نتیجه می شود

$$\|\cdot\|_{\wedge'} = \|\cdot\|_\varepsilon, \quad \|\cdot\|_{\varepsilon'} = \|\cdot\|_{\wedge}, \quad \|\cdot\|_{(\alpha')'} = \|\cdot\|_\alpha.$$

۲.۲.۲ ضرب تانسوری C^* - جبرها و جبرهای فون نویمان

در این زیربخش به صورت بسیار مختصر در مورد ضرب های تانسوری روی فضاهای هیلبرت، C^* - جبرها و جبرهای فون نویمان مفاهیمی را ارائه می کنیم.

فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. بنا بر قضیه ۶.۳.۱ از [۴۹] ضرب داخلی زیر روی فضای ضرب تانسوری جبری $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ منحصر به فرد است

$$\langle h \otimes k, h' \otimes k' \rangle_h = \langle h, h' \rangle \langle k, k' \rangle, \quad h \otimes k, h' \otimes k' \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}.$$

همان طور که در زیربخش ۲.۱.۲ توصیف شد، این ضرب داخلی نرم $\|\cdot\|_h$ را روی این فضا القا می‌کند. کامل شده فضای $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ به همراه این نرم را با $\mathcal{H} \tilde{\otimes}_h \mathcal{K}$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود فضای $\mathcal{H} \tilde{\otimes}_h \mathcal{K}$ مجدداً یک فضای هیلبرت است. این ضرب تانسوری روی رشته فضاهای هیلبرت دارای خواص مطلوبی است. به عنوان مثال، این نرم تانسوری محدود به این دسته از فضاها، در خاصیت نگاشت متری صدق می‌کند. در واقع اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ، آنگاه نگاشت منحصر به فرد $T \otimes S \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \tilde{\otimes}_h \mathcal{K})$ موجود است به طوری که

$$\|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|, \quad T \otimes S(h \otimes k) = T(h) \otimes S(k), \quad h \otimes k \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}.$$

به آسانی نتیجه می‌شود که نگاشت‌های $T \rightarrow T \otimes I$ و $S \rightarrow I \otimes S$ طولی هستند و در نتیجه فضاهای $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ دو زیرفضا از فضای $\mathcal{B}(\mathcal{H} \tilde{\otimes}_h \mathcal{K})$ به حساب می‌آیند. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو C^* -جبر باشند. اعمال ضرب و برگردان روی فضای جبری ضرب تانسوری $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \quad a \otimes b, a' \otimes b' \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

$$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*, \quad a \otimes b \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

حال فرض کنید زوج‌های $(\Pi, \mathcal{H})$ و $(\Lambda, \mathcal{K})$ نمایش‌های جامع برای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشند. بنابر بخش ۶.۳ از [۴۹] نگاشت $\Pi \otimes \Lambda : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H} \tilde{\otimes}_h \mathcal{K})$ یک نمایش وفادار برای $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ است. در نتیجه نگاشت زیر یک C^* -نرم به روی فضای $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ است

$$\|\cdot\|_* : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|c\|_* = \|\Pi \otimes \Lambda(c)\|, \quad c \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

به نرم $\|\cdot\|_*$ نرم فضایی^۱ گفته می‌شود. کامل شده فضای $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ با این نرم را با $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_* \mathcal{B}$ نشان می‌دهیم و آن را فضای ضرب تانسوری فضایی^۲ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ می‌نامیم. توجه کنید که $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_* \mathcal{B}$ یک C^* -جبر است.

لازم به ذکر است که برای دو جبر فون نویمان $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ فضای $\overline{\mathcal{A} \tilde{\otimes}_* \mathcal{B}}^{T_{s.o.t}}$ یک جبر فون نویمان است و در این حالت نماد $\mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{B}$ استفاده می‌شود.

-
1. spatial
 2. spatial tensor product

۳.۲.۲ ضرب تانسوری QSL_p - فضاها

در این زیربخش به دنبال ارائه ضرب صلیبی مناسب به روی فضای ضرب تانسوری جبری دو QSL_p - فضا مانند E و F هستیم. در ابتدا، مفاهیمی را از [۱۹] و سپس از [۵۶] ارائه می‌کنیم. در [۱۹] روی فضای تانسوری جبری یک L^p - فضا و یک فضای باناخ، یک نرم صلیبی معقول به دست آمده است که تحت شرایط ویژه‌ای در خاصیت نگاشت متری صدق می‌کند. این نرم که در ادامه آن را با $\|\cdot\|_{\Delta_p}$ نشان می‌دهیم، مقدمه‌ای برای ضرب صلیبی مناسبی می‌شود که کامل شده ضرب تانسوری جبری دو QSL_p - فضا نسبت به این نرم مجدداً یک QSL_p - فضا شود. این نتیجه در [۵۶] آورده شده است. در ابتدا فرض می‌کنیم که E یک فضای باناخ باشد. برای $p \in [1, \infty]$ نگاشت زیر یک به یک است

$$\mathcal{J} : L^p(X) \otimes E \rightarrow L^p(X, E); \quad \mathcal{J}(f \otimes \xi) := f\xi, \quad f \in L^p(X), \xi \in E, \\ f_\xi : X \rightarrow E, \quad f_\xi(x) = f(x)\xi, \quad x \in X.$$

همچنین داریم

$$\|f_\xi\|_{\Delta_p} = \|f\|_p \|\xi\|_E, \quad f \in L^p(X), \xi \in E.$$

حال اگر $u = \sum_{k=1}^n f_k \otimes \xi_k \in L^p(X) \otimes E$ آنگاه داریم

$$\|u\|_{\Delta_p} = \left(\int_X \left\| \sum_{k=1}^n f_k(x) \xi_k \right\|_E^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty), \\ \|u\|_{\Delta_\infty} = \text{ess} - \sup \left\| \sum_{k=1}^n f_k(\cdot) \xi_k \right\|_E,$$

به دلیل یک به یک بودن نگاشت $\mathcal{J}$ می‌توانیم فضای ضرب تانسوری جبری $L^p(X) \otimes E$ را در فضای $L^p(X, E)$ بنشانیم.

تعریف ۱۱۰.۲. فضای $L^p(X) \otimes E$ مجهز به نرم $\|\cdot\|_{\Delta_p}$ القایی از فضای $L^p(X, E)$ را با $E \otimes_{\Delta_p} L^p(X)$ و کامل شده این فضا با این نرم را با $E \otimes_{\Delta_p} L^p(X)$ نشان می‌دهند.

در گام نخست برخی از ویژگی‌های مهم این نرم را در گزاره زیر ارائه می‌کنیم.

گزاره ۱۱۱.۲. فرض کنید (X, μ) و (Y, ν) دو فضای اندازه و E یک فضای باناخ باشد. در این صورت

۱. برای $p \in [1, \infty)$ فضای $S(\mu) \otimes E$ در فضای $L^p(X, E)$ چگال است و در نتیجه یکریختی طولپای $L^p(X) \hat{\otimes}_{\Delta_p} E = L^p(X, E)$ موجود است و به‌طور خاص داریم

$$L^p(X, \tilde{\otimes}_{\Delta_p} L^p(Y)) = L^p(X, L^p(Y)) = L^p(X \times Y)$$

۲. برای $p \in [1, \infty]$ روی فضای $L^p(X) \otimes E$ روابط نرمی زیر را داریم.

$$(\text{آ}) \quad \|\cdot\|_{\Delta_1} = \|\cdot\|_{\wedge}, L^1(X) \otimes E \text{ روی}$$

$$(\text{ب}) \quad \|\cdot\|_{\Delta_\infty} = \|\cdot\|_{\varepsilon}, L^\infty(X) \otimes E \text{ روی}$$

$$(\text{ج}) \quad \text{برای } p \in (1, \infty) \text{ روی } L^p(X) \otimes E, \|\cdot\|_{\varepsilon} \leq \|\cdot\|_{\Delta_p} \leq \|\cdot\|_{\wedge}$$

برهان. برای دیدن اثبات به [۱۹] بخش‌های ۷۰۲ و ۷۰۳ مراجعه کنید. $\square$

با استفاده از گزاره قبل شمول‌های انقباضی زیر برقرار هستند

$$L^p(X) \hat{\otimes} E \subseteq L^p(X) \tilde{\otimes}_{\Delta_p} E \subseteq L^p(X) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} E, \quad p \in (1, \infty).$$

برای $p \in [1, \infty]$ فضای اندازه X و فضای باناخ E ، منظور از نرم ترانهاده $\|\cdot\|_{\Delta_p^t}$ ، نرم حاصل از یکسانریختی

$$E \otimes_{\Delta_p^t} L^p(X) \rightarrow L^p(X) \otimes_{\Delta_p} E, \quad \xi \otimes f \mapsto f \otimes \xi, \quad \xi \in E, f \in L^p(X).$$

است. به‌طور ویژه داریم $L^p(X) \otimes_{\Delta_p^t} L^p(Y) = L^p(X) \otimes_{\Delta_p} L^p(Y)$. گزاره زیر کلی‌ترین حالت ممکن را بیان می‌کند.

گزاره ۱۱۲.۲. برای دو فضای اندازه X و Y و اعداد $1 \leq q \leq p \leq \infty$ داریم

$$\text{id}_{L^q(Y)} \otimes \text{id}_{L^p(X)} \in \mathcal{B}(L^q(Y) \otimes_{\Delta_q} L^p(X), L^q(Y) \otimes_{\Delta_p^t} L^p(X)),$$

$$\|\text{id}_{L^q(Y)} \otimes \text{id}_{L^p(X)}\| = 1 \text{ و}$$

تذکر ۲.۱۱۳. با استفاده از قضیه ۲ از [۴۳]

۱. برای $p \in (1, \infty)$ ، فضای باناخ E یک QSL_p -فضا است اگر و فقط اگر برای هر دو فضای اندازه X و Y نگاشت

$$T : \mathcal{B}(L^p(X), L^p(Y)) \rightarrow \mathcal{B}(L^p(X, E), L^p(Y, E)), \quad T(T) := T \otimes \text{id}_E,$$

طولیا باشد.

۲. در حالت خاص برای $p, q \in (1, \infty)$ ، یک L^q -فضا یک QSL_p -فضا است اگر و فقط اگر $p \leq q \leq 2$ یا $p \leq q \leq 2$. در نتیجه اگر $2 \leq q \leq p$ یا $2 \leq q \leq p$ ، آنگاه هر QSL_q -فضا یک QSL_p -فضا است.

وجود یک ضرب تانسوری زیرصلیبی با خاصیت نگاشت متری حائز اهمیت است. در اینجا به دنبال حالاتی هستیم که برای $T \in \mathcal{B}(L^p(X), L^p(Y))$ و $S \in \mathcal{B}(V, W)$ نگاشت $T \otimes S : L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V \rightarrow L^p(Y) \otimes_{\Delta_p} W$ به طور دقیق تر $\|T \otimes S\| \leq \|T\| \|S\|$.

در حقیقت نرم $\|\cdot\|_{\Delta_p}$ «نزدیک» به نرم تانسوری است. به این معنی که یک نرم زیرصلیبی معقول است که الزاماً در خاصیت نگاشت متری صدق نمی‌کند. گزاره زیر به این موضوع می‌پردازد.

گزاره ۲.۱۱۴. برای هر فضای اندازه (X, μ) و هر فضای نرم دار V هیچ نرم تانسوری مانند $\|\cdot\|_\alpha$ وجود ندارد که برای آن تساوی $L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V = L^p(X) \otimes_\alpha V$ ، یک یکرختی باشد.

حالت‌های خاصی وجود دارند که برای آن نرم $\|\cdot\|_{\Delta_p}$ در خاصیت نگاشت متری صدق می‌کند که در ادامه به آنها می‌پردازیم. به عنوان مثال، برای هر فضای اندازه (X, μ) و هر جفت فضای باناخ (V, W) و $S \in \mathcal{B}(V, W)$ نتیجه می‌شود

$$\|\text{id}_{L^p(X)} \otimes S\| = \|S\|, \quad \text{id}_{L^p(X)} \otimes S \in \mathcal{B}(L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V, L^p(X) \otimes_{\Delta_p} W).$$

حالت کلی تر در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱۱۵.۲. فرض کنید V و W دو فضای باناخ باشند و $S \in \mathcal{B}(V, W)$. اگر برای دو فضای اندازه X و Y عملگر $T \in \mathcal{B}(L^p(X), L^q(Y))$ یک عملگر مثبت^۱ باشد، آنگاه

$$T \otimes S \in \mathcal{B}(L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V, L^q(Y) \otimes_{\Delta_q} W), \quad \|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|.$$

حال دو ویژگی مهم نرم $\|\cdot\|_{\Delta_p}$ را در گزاره زیر بیان می‌کنیم

گزاره ۱۱۶.۲. فرض کنید X یک فضای اندازه و V و W دو فضای باناخ باشند و $p \in [1, \infty]$. اگر T و S از فضای $\mathcal{B}(V, W)$ به ترتیب نگاشت‌های طولیا و خارج قسمتی باشند، آنگاه $\text{id}_{L^p(X)} \otimes S$ و $\text{id}_{L^p(X)} \otimes T$ نیز به طور طولیا و خارج قسمتی به فضای $\mathcal{B}(L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V, L^p(X) \otimes_{\Delta_p} W)$ متعلق هستند.

بنا بر بخش ۷.۰۹ از [۱۹] اگر $E_1 \subseteq L^p(X)$ و V یک فضای باناخ باشد، آنگاه فضای $E_1 \otimes_{\Delta_p} V$ نشان دهنده فضای $E_1 \otimes V$ به همراه نرم موروثی از $L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V$ خواهد بود. زیرا بنابر توضیحات بالا نگاشت زیر طولیا است

$$\mathfrak{E}m : E_1 \otimes_{\Delta_p} V \rightarrow L^p(X) \otimes_{\Delta_p} V,$$

چون $T : E_1 \rightarrow L^p(X)$ یک نگاشت مثبت (همانی) و طولیا است و $\mathfrak{E}m = T \otimes \text{id}_V$ ، لذا $\mathfrak{E}m$ نیز چنین است.

حال به ارائه قضیه زیر که حالت کلی نکته قبل است، می‌پردازیم.

قضیه ۱۱۷.۲. فرض کنید $1 \leq q \leq p \leq \infty$ ، X, Y, Z و W فضاهای اندازه، $E_1 \subseteq L^q(Y)$ ، یک زیرفضای بسته و E و V دو فضای نرم دار باشند.

۱. اگر $T \in \mathcal{B}(E_1, V)$ و $S \in \mathcal{B}(E, L^p(X))$ ، آنگاه $T \otimes S \in \mathcal{B}(E_1 \otimes_{\Delta_q} E, V \otimes_{\Delta_p} L^p(X))$ و $\|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|$.

۲. در حالت خاص اگر قرار دهیم $E_1 = L^q(Y)$ ، $E = L^q(Z)$ و $V = L^p(W)$ ، آنگاه برای $T \in \mathcal{B}(L^q(Y), L^p(W))$ و $S \in \mathcal{B}(L^q(Z), L^p(X))$ ، عملگر $T \otimes S$ به فضای $\mathcal{B}(L^q(Y) \otimes_{\Delta_q} L^q(Z), L^p(W) \otimes_{\Delta_p} L^p(X))$ متعلق است و $\|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|$.

۱. برای دیدن تعریف عملگر مثبت $T \in \mathcal{B}(L^p(X), L^q(Y))$ به مفاهیم مربوط به مشبک‌های باناخ موجود در کتب آنالیز حقیقی مراجعه کنید. توجه کنید که برای $p \in [1, \infty]$ هر L^p -فضا به صورت طولیا (و با حفظ ترتیب) با یک فضای $L^p(X, \mu)$ یکریخت است که در آن μ یک اندازه رادون است.

در این حالت اگر $q = p \in [1, \infty]$ ، آنگاه نتیجه می‌شود که برای هر T متعلق به $B(L^p(Y), L^p(W))$ و S متعلق به $B(L^p(Z), L^p(X))$ ، عملگر $T \otimes S$ به فضای $(L^p(Y) \otimes_{\Delta_p} L^p(Z), L^p(W) \otimes_{\Delta_p} L^p(X))$ متعلق است و خاصیت نرمی $\|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|$ برقرار است.

با استفاده از مفاهیم و نتایج قبل، روند نرم مناسبی روی فضای ضرب تانسوری جبری دو QSL_p -فضا ارائه کرده است که کامل شده این فضا نسبت به این نرم مجدداً یک QSL_p -فضا است. این نتیجه را در زیر می‌آوریم و برای روشن شدن مطالب خط مشی اثبات را پس از آن بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۱۸.۲. فرض کنید E و F QSL_p -فضا باشند. آنگاه نرم $\|\cdot\|_p$ روی فضای ضرب تانسوری $E \otimes F$ وجود دارد به طوری که

$$1. \quad \|\cdot\|_\varepsilon \leq \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\wedge$$

۲. نرم $\|\cdot\|_p$ یک نرم صلیبی است.

۳. کامل شده فضای تانسوری جبری $E \otimes F$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_p$ که آن را با $E \tilde{\otimes}_p F$ نشان می‌دهیم یک QSL_p -فضا است.

۴. برای هر عملگر $T \in \mathcal{B}(E)$ و $S \in \mathcal{B}(F)$ ، عملگر $T \otimes S$ به $\mathcal{B}(E \tilde{\otimes}_p F)$ متعلق است و $\|T \otimes S\| \leq \|T\| \|S\|$.

لازم به ذکر است که در حالتی که برای فضای اندازه X ، $E = L^p(X)$. آنگاه فضای $L^p(X) \tilde{\otimes}_p F$ همان فضای $L^p(X, F) = L^p(X) \tilde{\otimes}_{\Delta_p} F$ است. در اینجا برای روشن شدن نحوه به دست آمدن نرم $\|\cdot\|_p$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید E و F دو QSL_p -فضا باشند. در نتیجه فضای اندازه X و برای $i = 1, 2$ زیر فضاهای بسته E_i و F_i از فضای $L^p(X)$ موجود هستند به طوری که

$$E = E_1/E_2, \quad E_2 \subseteq E_1, \quad F = F_1/F_2, \quad F_2 \subseteq F_1,$$

و نگاشت‌های زیر خارج قسمتی هستند

$$\pi_E : E_1 \rightarrow E, \quad \ker \pi_E = E_2, \quad \pi_F : F_1 \rightarrow F, \quad \ker \pi_F = F_2.$$

فضای $E_\lambda \otimes F_\lambda$ مجهز به نرم $\|\cdot\|_{\Delta_p}$ القایی از فضای $L^p(X) \otimes_{\Delta_p} L^p(X)$ را با $E_\lambda \otimes_{\Delta_p} F_\lambda$ نشان می‌دهیم. به این دلیل که روی فضای $L^p(X) \otimes L^p(X)$ داریم $\|\cdot\|_{\Delta_p} \leq \|\cdot\|_\varepsilon$ آنگاه نگاشت همانی $\text{id}_{E_\lambda \otimes F_\lambda} : E_\lambda \otimes_{\Delta_p} F_\lambda \rightarrow E_\lambda \otimes_\varepsilon F_\lambda$ پیوسته و انقباضی است. حال با توجه به این موضوع که نرم $\|\cdot\|_\varepsilon$ در خاصیت نگاشت متری صدق می‌کند، آنگاه نگاشت پوشای

$$\pi_E \otimes \pi_F : E_\lambda \otimes_{\Delta_p} F_\lambda \rightarrow E_\lambda \otimes_\varepsilon F_\lambda \rightarrow E \otimes_\varepsilon F.$$

انقباضی است. همچنین فضای پوچ نگاشت $\pi_E \otimes \pi_F$ در بالا، یک زیرفضای بسته از $E_\lambda \otimes_{\Delta_p} F_\lambda$ است، که آن را با $\ker \pi_E \otimes_p \pi_F$ نشان می‌دهیم. حال نرم خارج قسمتی تولید شده روی فضای خارج قسمتی $E_\lambda \otimes_{\Delta_p} F_\lambda / \ker \pi_E \otimes_p \pi_F$ را با $\|\cdot\|_p$ و فضای $E \otimes F$ مجهز به این نرم را با $E \otimes_p F$ و کامل شده این فضا با این نرم را با $E \tilde{\otimes}_p F$ نشان می‌دهیم. موارد (۱) و (۲) در قضیه ۱۱۸.۲ واضح است. برای این که نشان دهیم فضای $E \tilde{\otimes}_p F$ یک QSL_p -فضا است به‌طور معادل نشان می‌دهیم که برای هر دو فضای اندازه Y و Z نگاشت

$$\mathcal{T} : \mathcal{B}(L^p(Y), L^p(Z)) \rightarrow \mathcal{B}(L^p(Y) \otimes_{\Delta_p} E \tilde{\otimes}_p F, L^p(Z) \otimes_{\Delta_p} E \tilde{\otimes}_p F),$$

با ضابطه $\mathcal{T}(T) = T \otimes \text{id}_{E \tilde{\otimes}_p F}$ طولپا است. بنا بر توضیحات قبل، نگاشت $\mathcal{T}$ با دامنه $\mathcal{B}(L^p(Y), L^p(Z))$ و برد

$$\mathcal{B}(L^p(Y) \otimes_{\Delta_p} (L^p(X) \otimes_{\Delta_p} L^p(X)), L^p(Z) \otimes_{\Delta_p} (L^p(X) \otimes_{\Delta_p} L^p(X)))$$

با ضابطه $\mathcal{T}(T) = T \otimes \text{id}_{L^p(X) \otimes_{\Delta_p} L^p(X)}$ طولپا است. حال با استفاده از گزاره ۱۱۶.۲ و با جایگزینی $p(X) \otimes_{\Delta_p} L_p(X)$ با زیرفضای $E_\lambda \otimes_{\Delta_p} F_\lambda$ از آن و سپس با جانشانی $E \tilde{\otimes}_p F$ ، نگاشت حاصل همچنان طولپا است و این یعنی فضای $E \tilde{\otimes}_p F$ یک QSL_p -فضا است. نامساوی قسمت (۴) به آسانی حاصل می‌شود. در آخر توجه می‌کنیم که فضای $E \tilde{\otimes}_p F$ به‌صورت‌های زیر قابل بیان است

$$\begin{aligned} E \tilde{\otimes}_p F &= (E_\lambda / E_\gamma) \tilde{\otimes}_p (F_\lambda / F_\gamma) \\ &= (E_\lambda \tilde{\otimes}_{\Delta_p} F_\lambda) / (\ker \pi_E \otimes_p \pi_F) \\ &= (E_\lambda \tilde{\otimes}_{\Delta_p} F) / (E_\gamma \tilde{\otimes}_{\Delta_p} F) \\ &= (E \tilde{\otimes}_{\Delta_p^t} F) / (E \tilde{\otimes}_{\Delta_p^t} F_\gamma). \end{aligned}$$

۴.۲.۲ ضرب تانسوری تصویری فضاهای p -عملگری

تعریف ۱۱۹.۲. برای دو فضای p -عملگری X و Y نرم تانسوری تصویری فضای p -عملگری^۱ به صورت

$$\|\tau\|_{\wedge} = \inf \{ \|a\| \|u\| \|v\| \|b\| : \tau = a(u \otimes v)b \}, \quad \tau \in \mathbb{M}_n(X \otimes Y),$$

تعریف می‌شود، که در اینجا $a \in \mathbb{M}_{n,rs}$, $u \in \mathbb{M}_r$, $v \in \mathbb{M}_s$ و $b \in \mathbb{M}_{rs,n}$ داریم
 $u \otimes v = (u_{ij}v_{kl}) \in \mathbb{M}_{rs}(X \otimes Y)$

گزاره ۱۲۰.۲. فرض کنید X و Y دو فضای p -عملگری باشند. آنگاه نرم $\|\cdot\|_{\wedge}$ یک ساختار فضای p -عملگری به روی فضای $X \otimes Y$ ایجاد می‌کند و کامل شده این فضا با این نرم را که با $X \hat{\otimes}^p Y$ نشان می‌دهیم، یک فضای p -عملگری مجرد است. علاوه بر این، این نرم بزرگترین نرم فضای p -عملگری است که برای $u \in \mathbb{M}_s(X)$ و $v \in \mathbb{M}_r(Y)$ در خاصیت $\|u \otimes v\| \leq \|u\|_s \|v\|_r$ صدق می‌کند.

□

برهان. برای دیدن اثبات به گزاره ۴۰.۸ از [۱۸] مراجعه کنید.

تعریف ۱۲۱.۲. فرض کنید X ، Y و Z فضاهای p -عملگری و $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$ یک نگاشت دوخطی باشد. آنگاه نگاشت دوخطی $\Phi^{(n,m);(r,s)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \Phi^{(n,m);(r,s)} : \mathbb{M}_{n,m}(X) \times \mathbb{M}_{r,s}(Y) &\rightarrow \mathbb{M}_{nr,ms}(Z), \\ \Phi^{(n,m);(r,s)}((u_{ij}), (v_{kl})) &= (\Phi(u_{ij}, v_{kl})); \end{aligned}$$

و در حالتی که $n = m$ و $r = s$ است به جای نماد $\Phi^{(n,n);(r,r)}$ آن را به صورت $\Phi^{(n),(r)}$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\|\Phi\|_{p-cb} = \sup \{ \|\Phi^{(n),(r)}\| : n, r \in \mathbb{N} \}$$

که این امر منجر به تعریف فضای $\mathcal{CB}_p(X \times Y, Z)$ می‌شود که مشابه با $\mathcal{CB}_p(X, Y)$ یک فضای p -عملگری است.

1. p -operator space projective tensor norm

گزاره ۱۲۲.۲. فرض کنید X, Y و Z فضاهای p -عملگری باشند. آنگاه p -کاملاً یکریختی‌های طولپای زیر را داریم

$$CB_p(X \hat{\otimes}^p Y, Z) = CB_p(X \times Y, Z) = CB_p(X, CB_p(Y, Z)).$$

برهان. به گزاره ۴۰۹ از [۱۸] مراجعه کنید. $\square$

تذکره ۱۲۳.۲. نکات زیر حائز اهمیت هستند.

۱. با در نظر گرفتن $Z = \mathbb{C}$ (همچنین $Z = \mathbb{C} = B(l_p^n) = M_n(\mathbb{C}) = M_n$) خواهیم داشت

$$(X \hat{\otimes}^p Y)^* = CB_p(X, Y^*),$$

۲. مشابه با حالت فضاهای عملگری به راحتی دیده می‌شود که عمل $\hat{\otimes}^p$ جابجایی است، یعنی

$$X \hat{\otimes}^p Y = Y \hat{\otimes}^p X$$

۳. برای $i = 1, 2$ اگر $\Phi_i : X_i \rightarrow Y_i$ دو عملگر p -کاملاً انقباضی باشند، آنگاه عملگر $\Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$ قابل توسیع به عملگر p -کاملاً انقباضی از فضای $X_1 \hat{\otimes}^p X_2$ به فضای $Y_1 \hat{\otimes}^p Y_2$ است. این حکم نشان می‌دهد، این ضرب در خاصیت نگاشت متری توصیف شده در زیربخش ۱.۲.۲ صدق می‌کند.

تذکره ۱۲۴.۲. [۵۳، قضیه ۴۰۲] اگر M_* و N_* به ترتیب پیش دوگان‌های جبرهای فون نویمان M و N باشند، آنگاه $(M_* \hat{\otimes} N_*)^* = M \hat{\otimes} N$ ، که در آن سمت چپ ضرب تانسوری 2 -عملگری تصویری (که اختصاراً آن را ضرب تانسوری تصویری عملگری می‌نامیم) از M_* و N_* است.

۳.۲ تمرین‌ها

۱.۳.۲ جبرهای باناخ و فضای هیلبرت

تمرین ۱.۳.۲. نشان دهید که هر جبر باناخ با ضرب پیوسته را می‌توان به یک جبر باناخ با نرم معادل مجهز کرد به طوری که برای هر a, b ، $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$.

تمرین ۲.۳.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. ثابت کنید که هر عملگر فشرده $T \in B(\mathcal{H})$ حدی از عملگرهای با رتبه‌ی متناهی است.

تمرین ۳.۳.۲. اگر A یک جبر باناخ با یکه باشد و $a \in A$ با $\|a\| < 1$ ، نشان دهید $1 - a$ وارون پذیر است و $(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

تمرین ۴.۳.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. ثابت کنید که مجموعه‌ی عملگرهای هیلبرت-اشمیت $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ یک جبر باناخ با ضرب ST $(S, T) \mapsto ST$ است.

تمرین ۵.۳.۲. اگر A یک جبر باناخ باشد و $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ یک همریختی خطی پیوسته، نشان دهید $\|\varphi\| \leq 1$ اگر و فقط اگر برای هر $a \geq 0$ ، $\varphi(a) = 1$ و $\varphi(a) \geq 0$.

۴.۲ L^p - فضاهای و اندازه‌پذیری

تمرین ۱.۴.۲. ثابت کنید که فضای $L^p([0, 1])$ برای $1 \leq p < \infty$ جداپذیر است اما $L^\infty([0, 1])$ چنین نیست.

تمرین ۲.۴.۲. اگر $f \in L^1(\mathbb{R})$ و $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ، نشان دهید $f * g$ یکنواخت پیوسته است.

تمرین ۳.۴.۲. فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه باشد. نشان دهید $L^2(X, \mu)$ یک فضای هیلبرت است و ضرب نقطه‌ای در آن پیوسته است.

تمرین ۴.۴.۲. اگر $1 \leq p < q \leq \infty$ ، آیا $L^p([0, 1]) \subseteq L^q([0, 1])$ برقرار است؟ شرایط درستی این رابطه شمول را در حالت کلی بررسی کنید.

تمرین ۵.۴.۲. فرض کنید $f_n \rightarrow f$ در L^p . آیا می‌توان نتیجه گرفت $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا؟ اگر چنین نیست، شرایط برقراری را بیان کنید.

۵.۲ جبرهای C^* و خواص آنها

تمرین ۱.۵.۲. ثابت کنید که هر همریختی پیوسته‌ی $*$ بین دو جبر C^* ، دارای نرم کمتر یا برابر با ۱ است.

تمرین ۲.۵.۲. اگر A یک جبر C^* باشد و $a \in A$ نرمال باشد ($aa^* = a^*a$)، نشان دهید $\|a^2\| = \|a\|^2$.

تمرین ۳.۵.۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. ثابت کنید که $B(\mathcal{H})$ با نرم عملگری یک جبر C^* است.

تمرین ۴.۵.۲. اگر A یک جبر C^* باشد و $a \in A$ خودالحاق ($a = a^*$)، نشان دهید طیف a حقیقی است.

تمرین ۵.۵.۲. ثابت کنید برای هر جبر C^* جابجایی یک فضای موضعاً فشرده‌ی هاوسدورف X موجود است به طوری که جبر C^* با $C_0(X)$ یکریخت است.

۱.۵.۲ جبرهای فون نویمان

تمرین ۶.۵.۲. فرض کنید M یک جبر فون نویمان روی $\mathcal{H}$ باشد. ثابت کنید که M برابر با دومین جابجاگرش (دوسان آن) است ($M = M''$).

تمرین ۷.۵.۲. اگر $A \subseteq B(\mathcal{H})$ یک C^* -جبر باشد، نشان دهید A'' (دوسان آن) یک جبر فون نویمان است.

تمرین ۸.۵.۲. اگر M یک جبر فون نویمان روی $\mathcal{H}$ و $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع خطی پیوسته باشد، نشان دهید $\xi \in \mathcal{H}$ موجود است به طوری که $\varphi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$.

تمرین ۹.۵.۲. ثابت کنید که مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ یک جبر فون نویمان نیست.

تمرین ۱۰.۵.۲. فرض کنید M و N دو جبر فون نویمان باشند. ثابت کنید $M \otimes N$ (ضرب تانسوری فون نویمان) نیز یک جبر فون نویمان است.

۲.۵.۲ ضرب تانسوری و کاربردها

تمرین ۱۱.۵.۲. فرض کنید A و B دو جبر C^* باشند. ثابت کنید $A \otimes_{\min} B$ (ضرب تانسوری کمینه) یک جبر C^* است.

تمرین ۱۲.۵.۲. اگر $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند، نشان دهید $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ نیز یک فضای هیلبرت است.

تمرین ۱۳.۵.۲. فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند. ثابت کنید $A \hat{\otimes} B$ (ضرب تانسوری تصویری) کامل است.

تمرین ۱۴.۵.۲. اگر M و N دو جبر فون نویمان باشند، رابطه‌ی بین $M \otimes_{\min} N$ و $M \overline{\otimes} N$ را بررسی کنید.

تمرین ۱۵.۵.۲. ثابت کنید برای فضاهای اندازه‌ی مناسب X و Y داریم

$$L^{\vee}(X \times Y) \cong L^{\vee}(X) \otimes L^{\vee}(Y).$$

۶.۲ تمرین‌های ترکیبی

برخی از تمرین‌های این بخش نیاز به مقدمات بیشتری دارند و خواننده می‌تواند برای تعاریف آنها به کتاب‌های مربوطه مراجعه کند.

تمرین ۱.۶.۲. رابطه‌ی بین جبر گروهی $C^*(G)$ و جبر فون نویمان گروهی $W^*(G)$ را بررسی کنید.

تمرین ۲.۶.۲. اگر A یک جبر C^* باشد و $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ یک عمل پیوسته باشد، ثابت کنید $A \rtimes_\alpha G$ یک جبر C^* است.

تمرین ۳.۶.۲. فرض کنید A یک C^* -جبر باشد و $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع خطی مثبت. شرایطی بیان کنید که تحت آن τ یک رد (trace) باشد.

تمرین ۴.۶.۲. ثابت کنید که هر جبر C^* ساده (بدون ایده‌آل‌های بسته‌ی غیربدیهی) دارای یک نمایش وفادار است.

مقدماتی از نظریه گروه‌های توپولوژیکی

۱.۳ گروه‌های موضعاً فشرده و مثال‌هایی از آن

منظور از یک گروه توپولوژیکی G ، یک گروه مجهز به یک توپولوژی است، به طوری که اعمال ضرب و وارون با توپولوژی داده شده پیوسته باشند. حاصل ضرب هر دو عضو x و y متعلق به G را با xy و وارون x را با x^{-1} نمایش می‌دهیم. البته در حالت خاص آبدلی مثلاً زمانی که روی خط حقیقی هستیم، نمادهای متفاوتی را معرفی و استفاده خواهیم کرد.

اگر $y \in G$ ثابت باشد، نگاشت‌های $L_y : x \rightarrow y^{-1}x$ ، $R_y : x \rightarrow xy$ و $x \rightarrow x^{-1}$ روی G همسان‌ریختی هستند. اگر گروه توپولوژیکی G ، دارای توپولوژی هاسدروف و موضعاً فشرده باشد، G را گروه موضعاً فشرده می‌نامیم.

در این بخش مقدماتی از مفاهیم مربوط به گروه‌های موضعاً فشرده را معرفی و مثال‌هایی نیز ارائه خواهیم کرد. برای گروه موضعاً فشرده G و زیرمجموعه‌های A و B از آن قرار می‌دهیم $AB = \{xy | x \in A, y \in B\}$ و $A^{-1} = \{x^{-1} | x \in A\}$. مجموعه A را متقارن می‌نامیم هر گاه $A^{-1} = A$. به جای $A\{x\}$ و $\{x\}A$ از نمادهای Ax و xA بهره خواهیم برد.

گزاره ۱.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده با همانی e و A و B زیرمجموعه‌هایی از آن باشند.

- (الف) اگر $A \subseteq G$ بسته (فشرده) و $B \subseteq G$ فشرده باشد، آنگاه AB بسته (فشرده) است.
- (ب) هر همسایگی U از e ، همانی G ، شامل یک همسایگی متقارن V از e است به طوری که $V^2 \subseteq U$.
- (ج) اگر $U \subseteq G$ باز باشد آنگاه AU و UA برای هر زیرمجموعه دلخواه $A \subseteq G$ ، باز هستند.
- (د) فرض کنید U یک پایه موضعی حول e در G باشد. در این صورت بستار $\bar{A}$ ، $A \subseteq G$ عبارت است از $\bigcap \{AU \mid U \in \mathcal{U}\}$.
- (ه) فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته از G و U یک مجموعه باز شامل C باشد. در این صورت همسایگی V از e چنان یافت می‌شود که $CV \cup VC \subseteq U$.
- برهان. (الف) واضح است که AB تصویر مجموعه $A \times B$ تحت عمل ضرب است و لذا اگر A و B فشرده باشند، با توجه به فشردگی $A \times B$ ، AB نیز فشرده است.
- حال فرض کنید $x \in G \setminus BA$. در این صورت $x \cap A = \emptyset$ و $B^{-1}x$ بسته است. اگر A فشرده باشد همسایگی U از e چنان موجود است که $B^{-1}xU \cap AU = \emptyset$ ، این نتیجه می‌دهد $xUU^{-1} \cap BA = \emptyset$. از آنجا که xUU^{-1} همسایگی از x است که BA را قطع نمی‌کند، پس BA بسته است.
- (ب) با توجه به پیوستگی عمل ضرب، همسایگی‌های W_1 و W_2 از e چنان موجودند که $W_1W_2 \subseteq U$. حال قرار می‌دهیم $V = W_1 \cap W_2 \cap W_1^{-1} \cap W_2^{-1}$.
- (ج) کافی است بنویسیم $AU = \bigcup_{x \in A} xU$ و $UA = \bigcup_{x \in A} Ux$. حال با توجه به باز بودن xU و Ux حکم واضح است.
- (د) ابتدا نشان می‌دهیم $\bigcap \{AU \mid U \in \mathcal{U}\}$ یک مجموعه بسته است. فرض کنید x به این مجموعه تعلق نداشته باشد. در این صورت $V \in \mathcal{U}$ چنان موجود است که $x \notin AV$. اما همسایگی متقارن U از e را می‌توان چنان یافت که $UU^{-1} \subseteq V$. در این حالت $x \notin AU$ همچنین $AU \cap xU = \emptyset$. بنابراین همسایگی ای از x اشتراک فوق را قطع نمی‌کند و حکم ثابت می‌شود.

□

گزاره ۲.۳. فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی باشد.

(الف) اگر H یک زیرگروه G باشد، آنگاه $\bar{H}$ نیز چنین است.

(ب) هر زیرگروه باز G ، بسته است.

(ج) اگر U یک همسایگی متقارن از e باشد، آنگاه $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$ در G یک زیرگروه باز و بسته است.

برهان. (الف) فرض می‌کنیم x, y به $\bar{H}$ متعلق باشند. در این صورت تورهای $\{x_\alpha\}$ و $\{y_\alpha\}$ در H چنان موجود هستند که $x_\alpha \rightarrow x$ و $y_\alpha \rightarrow y$. حال با توجه به پیوستگی اعمال گروه داریم $x_\alpha^{-1} \rightarrow x^{-1}$ و $x_\alpha y_\alpha \rightarrow xy$ و این یعنی x^{-1} و xy به $\bar{H}$ تعلق دارند.

(ب) واضح است که $H = G \setminus \bigcup_{x \neq e} xH$ و این یعنی H متمم یک مجموعه باز است.

(ج) با توجه به همسان‌ریختی عمل ضرب واضح است.

□

تعریف ۳.۳. گوئیم $C \subseteq G$ یک هم‌دسته از گروه G است، هرگاه زیرگروه H از G و عضو $x \in G$ موجود باشند به‌طوری‌که $C = xH$.

برای زیرگروه H از گروه G ، منظور از نماد G/H ، مجموعه همه هم‌دسته‌های چپ H به فرم xH برای $x \in G$ است و $q : G \rightarrow G/H$ معرف تابع طبیعی پوشای خارج قسمت $x \rightarrow xH$ است.

اگر G یک گروه توپولوژیکی باشد، G/H مجهز به توپولوژی خارج قسمتی است. یعنی مجموعه $U \subseteq G/H$ باز است اگر و تنها اگر مجموعه $q^{-1}(U)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از G باز باشد. بررسی درستی گزاره زیر ساده است.

گزاره ۴.۳. فرض کنید N یک زیرگروه نرمال^۱ از گروه توپولوژیکی G باشد. آنگاه G/N یک گروه توپولوژیکی است.

اگر H زیرگروه بسته باشد، G/H ، فضای H -هم‌دسته‌های چپ است و اگر G موضعاً فشرده باشد، G/H نیز چنین است و q باز و پیوسته است.

گزاره ۵.۳. فرض کنید H زیرگروه بسته گروه موضعاً فشرده G و C زیرمجموعه فشرده G/H باشد. در این صورت زیرمجموعه فشرده K از G چنان موجود است که $q(K) = C$.

۱. زیرگروه N از گروه G را نرمال گوئیم هرگاه برای هر $x \in G$ داشته باشیم $xN = Nx$.

برهان. همسایگی باز V از e با بستار فشرده را در نظر بگیرید. چون q یک نگاشت باز است، مجموعه‌های $q(xV)$ برای $x \in G$ پوشش بازی برای C هستند و لذا زیر پوشش متناهی مانند $\{q(x_j V) | j = 1, \dots, n\}$ دارند. قرار می‌دهیم $\bar{V} = \bigcup_{j=1}^n x_j V$. در این صورت چون $q^{-1}(C)$ بسته است، K فشرده است و $q(K) = C$.

□

گزاره ۶.۳. فرض کنید H زیرگروه توپولوژیکی G باشد.

(الف) نگاشت خارج قسمتی باز و پیوسته است.

(ب) اگر H نرمال باشد، G/H گروه توپولوژیکی است.

(ج) اگر H بسته و نرمال و G موضعاً فشرده باشد، در این صورت G/H گروه موضعاً فشرده است.

□

برهان. بنابر گزاره‌های پیشین بدیهی است.

اندیس زیرگروه H در گروه G برابر تعداد اعضای فضای G/H تعریف می‌شود. همچنین اندیس همدسته C (از زیرگروه H) در گروه G همان اندیس زیرگروه H در گروه G تعریف می‌شود.

در آخر اگر H و K دو زیرگروه از گروه G باشند، آنگاه $H \cap K$ یک زیرگروه از H ، K و G است. اندیس زیرگروه H در زیرگروه دیگر K همان اندیس زیرگروه $H \cap K$ در زیرگروه K تعریف می‌شود. به‌طور مشابه برای دو همدسته C و D ، به ترتیب همدسته‌های زیرگروه‌های H و K از گروه G ، اندیس همدسته C در همدسته D ، اندیس زیرگروه $H \cap K$ در زیرگروه K تعریف می‌شود.

برای یک زیرمجموعه $U \subseteq G$ ، همدسته تولید شده توسط U را با $\text{Aff}(U)$ نشان می‌دهیم که برابر است با کوچکترین مجموعه شامل U که نسبت به رابطه آفین که به صورت $(r, s, t) \mapsto rs^{-1}t$ داده می‌شود، بسته است. به وضوح برای هر همدسته C ، $\text{Aff}(C) = C$.

گزاره ۷.۳. زیرمجموعه $C \subseteq G$ یک همدسته است اگر و فقط اگر برای هر سه عضو s, r و t از C داشته باشیم $rs^{-1}t \in C$. علاوه بر این $C^{-1}C$ یک زیرگروه از گروه G است و برای هر $C = sC^{-1}C$ ، $s \in C$.

فرض کنید $\mathcal{R}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. می‌گوییم $\mathcal{R}$ یک حلقه است، هرگاه برای $A, B \in \mathcal{R}$ ، مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \setminus B$ به $\mathcal{R}$ متعلق باشند. حال حلقه خاصی از مجموعه‌ها را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۸.۳. حلقه همدسته ^۱ گروه G کوچکترین حلقه متشکل از زیرمجموعه‌های G است که شامل همه همدسته‌های (باز) آن است. این حلقه را با $\Omega(G)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۹.۳. با استفاده از [۳۹] موارد زیر را خواهیم داشت:

۱. هر مجموعه متعلق به حلقه $\Omega(G)$ برابر با اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های جدا از هم متعلق به حلقه $\Omega_*(G)$ است. حلقه $\Omega_*(G)$ به صورت زیر است

$$W_*(G) = \left\{ C_* \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i : \begin{array}{l} C_* \subseteq G \text{ همدسته باز,} \\ C_1, \dots, C_n \text{ زیرهمدسته‌های باز با اندیس نامتناهی از همدسته } C_* \end{array} \right\}.$$

۲. $\text{Aff}(U) = C_*$ آنگاه $U = C_* \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i$ اگر

در این بخش به طور مختصر به ارائه مفاهیمی از نگاشت‌های آفین و تکه ای آفین روی گروه‌های موضعاً فشرده می‌پردازیم. این مفاهیم در حالت کلی در [۴۰] و [۳۷] مطرح شده اند.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید G و H دو گروه باشند. نگاشت $\alpha : H \rightarrow G$ را یک همریختی گروهی ^۲ گوئیم، هرگاه $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$, $x, y \in G$. همچنین اگر همریختی α دوسویی (یک به یک - پوشا) ^۳ باشد، آن را یکریختی (تکریختی - بروریختی) ^۴ می‌نامیم.

تذکر ۱۱.۳. اگر (G, τ_G) و (H, τ_H) دو گروه توپولوژیکی باشند، آنگاه در تعاریف فوق نگاشت α باید به صورت $\tau_G - \tau_H$ پیوسته باشد. در این حالت α یک یکسانریختی ^۵ است، یعنی یک همریختی وارون پذیر و پیوسته با نگاشت وارون پیوسته است.

تعریف ۱۲.۳. فرض کنید G و H دو گروه توپولوژیکی باشند. نگاشت $\alpha : C \subseteq H \rightarrow G$ را یک نگاشت آفین گوئیم، هرگاه

1. coset ring
2. group homomorphism
3. bijective (injective-surjective)
4. isomorphism (monomorphism-epimorphism)
5. homeomorphism

۱. مجموعه C یک هم‌دسته باشد،

۲. برای اعضای r, s و t متعلق به C داشته باشیم

$$\alpha(rs^{-1}t) = \alpha(r)\alpha(s)^{-1}\alpha(t).$$

تذکر ۱۳.۳. از گزاره ۷.۳ نتیجه می‌شود که مجموعه $\alpha(C)$ ، برد نگاشت آفین α نیز یک هم‌دسته است. حال با استفاده از این گزاره، اگر قرار دهیم $H_0 = C^{-1}C$ ، برای $s \in C$ ، $C = sH_0$. حال اگر تعریف کنیم

$$\beta : H_0 \subseteq H \rightarrow G, \quad \beta(t) = \alpha(s)^{-1}\alpha(st), \quad t \in H_0,$$

آنگاه β یک همریختی بین زیرگروه‌ها است.

تعریف ۱۴.۳. نگاشت $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ را تکه‌ای آفین^۱ می‌نامیم، هرگاه

۱. مجموعه‌های از هم جدا مانند $Y_i \in \Omega(H)$ برای $i = 1, \dots, n$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i.$$

۲. برای $i = 1, \dots, n$ نگاشت‌های آفین $\alpha_i : \text{Aff}(Y_i) \subseteq H \rightarrow G$ موجود باشند به‌طوری‌که $\alpha|_{Y_i} = \alpha_i|_{Y_i}$.

تعریف ۱۵.۳. اگر دو مجموعه X و Y فضاهای موضعاً فشرده باشند آنگاه نگاشت $\alpha : Y \rightarrow X$ را سره^۲ می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه فشرده $K \subseteq X$ مجموعه $\alpha^{-1}(K)$ زیرمجموعه فشرده‌ای از Y باشد.

تذکر ۱۶.۳. فرض کنید نگاشت $\alpha : Y = h_0 H_0 \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت آفین و $\beta : H_0 \subseteq H \rightarrow G$ همریختی متناظر با آن باشد (ملاحظه ۱۳.۳ را ببینید). آنگاه α یک نگاشت سره (پیوسته - باز) است اگر و فقط اگر β سره (پیوسته - باز) باشد.

برای همریختی $\alpha : H \rightarrow G$ قرار دهید $G_0 = \alpha(H)$ و $N = \ker \alpha$. حال همریختی $\tilde{\alpha} : H/N \rightarrow G_0$ را متناظر با α با ضابطه $\tilde{\alpha}(hN) = \alpha(h)$ ، برای $hN \in H/N$ تعریف می‌کنیم.

1. piecewise affine

2. proper

گزاره ۱۷.۳. فرض کنید $\alpha : H \rightarrow G$ یک همریختی پیوسته باشد. آنگاه α نگاشت سره است اگر و فقط اگر همریختی دوسویی $\tilde{\alpha}$ یک یکرختی توپولوژیکی بوده و N فشرده باشد.

□

برهان. برای دیدن اثبات به گزاره ۴ از [۲۱] مراجعه کنید.

تذکر ۱۸.۳. فرض کنید $\alpha : H \rightarrow G$ یک همریختی پیوسته باشد.

۱. گزاره ۱۷.۳ ایجاب می‌کند که هر همریختی پیوسته و سره مانند α خود به خود یک نگاشت بسته است و در نتیجه مجموعه $\alpha(H)$ یک زیرگروه بسته از گروه G است. همچنین $N = \ker \alpha$ زیرگروه نرمال و فشرده از گروه H است.

۲. با استفاده از [۲۱] می‌دانیم که نگاشت $\tilde{\alpha}$ یک یکرختی گروهی است اگر و تنها اگر نگاشت α همریختی باز (با توپولوژی نسبی) به روی $G_0 = \alpha(H)$ باشد.

لم ۱۹.۳. فرض کنید $Y \in \Omega(H)$ و $\alpha : \text{Aff}(Y) \rightarrow G$ یک نگاشت آفین باشد به طوری که نگاشت تحدید $\alpha|_Y$ سره است. آنگاه نگاشت α نیز سره است.

□

برهان. برای دیدن اثبات به لم ۸ از [۳۷] مراجعه کنید.

تذکر ۲۰.۳. نمودار یک نگاشت مانند $\alpha : Y \rightarrow X$ را با Γ_α نشان می‌دهیم که به صورت زیر است

$$\Gamma_\alpha = \{(y, \alpha(y)) : y \in Y\} \subseteq Y \times X.$$

گزاره ۲۱.۳. فرض کنید G و H دو گروه باشند و $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت باشد. آنگاه ویژگی‌های زیر برقرار است

۱. اگر Γ_α یک زیرگروه باشد، آنگاه Y نیز چنین است و نگاشت α یک همریختی روی زیرگروه‌ها است.

۲. اگر Γ_α یک هم‌دسته باشد آنگاه Y نیز چنین است و نگاشت α آفین است.

۳. اگر $\Gamma_\alpha \in \Omega(G \times H)$ ، آنگاه $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ که $Y_i \in \Omega(H)$ و نگاشت α تکه‌ای آفین است.

□

برهان. برای دیدن اثبات به لم ۱۰۲ از [۴۰] مراجعه کنید.

لم ۲۲.۳. فرض کنید G و H دو گروه موضعاً فشرده باشند و $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت پیوسته باشد. آنگاه

۱. اگر نگاشت α آفین باشد، آنگاه قابل گسترش به یک نگاشت آفین و پیوسته مانند $\bar{\alpha} : \bar{Y} \subseteq H \rightarrow G$ است.

۲. اگر α تکه‌ای آفین و Y باز باشد، α قابل گسترش به یک نگاشت تکه‌ای آفین و پیوسته مانند $\bar{\alpha} : \bar{Y} \subseteq H \rightarrow G$ است. علاوه بر این $\bar{Y}$ در H باز و دارای تجزیه ای به صورت $\bar{Y} = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ است به طوری که $\{Y_i\}$ مجموعه‌های جدا از هم و به حلقه $\Omega_0(H)$ تعلق دارند.

برهان. برای دیدن اثبات به لم ۱۰.۳ از [۴۰] مراجعه نمایید. $\square$

از آنجا که در این کتاب با نگاشت‌های آفین و تکه‌ای آفین پیوسته سرو کار داریم، بنابر لم بالا، همواره در حالت آفین فرض می‌کنیم Y هم‌دسته باز و در حالت تکه‌ای آفین قرار می‌دهیم $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ که در آن $Y_i \in \Omega_0(H)$ ، $i = 1, \dots, n$. برای هر گروه توپولوژیکی G ، مولفه همبندی همانی در G را با G_0 نمایش می‌دهیم. در این صورت G_0 زیرگروه نرمال و بسته G است و G/G_0 کلاً ناهمبند است. G را تقریباً همبند می‌نامیم هرگاه G/G_0 فشرده باشد. همچنین اگر G کلاً ناهمبند باشد، آنگاه هر همسایگی همانی شامل یک زیرگروه باز و فشرده است. فرض کنید I یک مجموعه اندیس‌گذار و برای هر $i \in I$ یک گروه توپولوژیکی باشد. در این صورت حاصل ضرب دکارتی $G = \prod_{i \in I} G_i$ ، با توپولوژی حاصل ضربی یک گروه توپولوژیکی است. اگر همه به جز تعداد متناهی از G_i ها فشرده و مابقی موضعاً فشرده باشند، آنگاه G یک گروه موضعاً فشرده است.

۲.۳ گروه‌های محبوب فیزیک‌دانان

در این بخش پس از چند مثال اولیه و شناخته شده، به ارائه تعدادی از گروه‌های توپولوژیکی مورد علاقه فیزیک‌دانان می‌پردازیم. این گروه‌ها کاربردهای گسترده‌ای در فیزیک، معادلات دیفرانسیل و ... دارند.

مثال ۲۳.۳. خط حقیقی $\mathbb{R}$ با اعمال و توپولوژی القا شده از متر طبیعی فاصله یک گروه موضعاً فشرده است. $\mathbb{Z}$ یک زیرگروه بسته $\mathbb{R}$ است و هر زیرگروه بسته و سره $\mathbb{R}$ به فرم

$\mathbb{Z} = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$ است.

برای میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ ، گروه دایره به صورت $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ تعریف می‌شود. $\mathbb{T}$ با عمل ضرب و توپولوژی القایی از $\mathbb{C}$ یک گروه فشرده است. برای $a > 0$ نگاشت $\psi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ با ضابطه $\psi_a(t) = \exp\left(\frac{2\pi it}{a}\right)$ یک همریختی پیوسته است و $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}a} \cong \mathbb{T}$.

مثال ۲۴.۳. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ تبدیل $T_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $T_{a,b}(x) = ax + b$ ، در نظر بگیرید مجموعه تمام چنین تبدیلاتی یک گروه (دو پارامتری) تشکیل می‌دهند. اعمال این گروه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} T_{a_1, b_1} \cdot T_{a_2, b_2} &= T_{a_1, b_1}(a_2 x + b_2) \\ &= a_1 a_2 x + a_1 b_2 + b_1 \end{aligned}$$

در این صورت عنصر همانی $T_{1,0}$ است و معکوس هر عضو با رابطه زیر داده می‌شود:

$$T_{a,b}^{-1} = T_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}.$$

مثال ۲۵.۳. مجموعه تمام جابجایی‌ها در یک فضای برداری حقیقی ۳ بعدی یک گروه سه پارامتری است. برای $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، تبدیلات $T_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را با ضابطه $T_{a,b,c}((x, y, t)) = (x + a, y + b, t + c)$ در نظر بگیرید. در این صورت $T_{0,0,0}$ عنصر همانی و $T_{-a,-b,-c}$ عضو وارون $T_{a,b,c}$ است.

گروه‌های لی^۱ که در قرن نوزدهم توسط سوفوس لی^۲ متولد شدند، گروه‌هایی هستند که هم‌زمان یک خمینه مشتق‌پذیر نیز تشکیل می‌دهند. خمینه مشتق‌پذیر، فضایی است که به طور موضعی شبیه فضاهاى اقلیدسی است. این گروه‌ها مدل طبیعی تقارن را ارائه می‌کنند و به طور گسترده در بخش‌های متعددی از ریاضیات و فیزیک مورد استفاده قرار می‌گیرند. این گروه‌ها اولین بار با مطالعه زیرگروه‌هایی از گروه ماتریس‌های $n \times n$ معکوس‌پذیر $(GL_n(\mathbb{C}), GL_n(\mathbb{R}))$ روی میدان‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ خلق شدند. کارهای لی نظریه‌ای از تقارن‌های معادلات دیفرانسیل را توسعه می‌داد، که همان نقش کارهای گالوا^۳ را برای معادلات جبری را ایفا می‌کرد، یعنی آن‌ها

1. Lie groups
2. Marius Sophus Lie
3. Évariste Galois

را براساس نظریه گروه‌ها رده‌بندی می‌کرد. گروه‌های لی نقش بزرگی را در سطوح مختلف و متعددی از هندسه نوین ایفا می‌کنند. فلیکس کلاین^۱ در برنامه ارلانگن^۲ مدعی شد که می‌توان هندسه‌های مختلفی را با تعیین گروه‌های تبدیلی مناسب که خواص هندسی بخصوصی را ناوردا باقی می‌گذارند، مورد بررسی قرار داد. با این دیدگاه، هندسه اقلیدسی متناظر با انتخاب گروه $E(3)$ از تبدیلات حافظ فاصله روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ است. مثال‌هایی از گروه‌های لی در ادامه می‌آیند:

مثال ۲۶.۳. ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ تحت ضرب، گروهی تشکیل می‌دهند که با $GL(n, \mathbb{R})$ یا $GL_n(\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود. به عبارتی

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$$

گروه فوق یک گروه لی n^2 بعدی نافشرده و همچنین زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^{n^2}$ است. این گروه ناهمبند است مولفه‌های همبندی آن عبارتند از:

$$O_1 = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$$

و

$$O_2 = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$$

مثال ۲۷.۳. گروه‌های خطی خاص روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ ، به ترتیب با $SL(n, \mathbb{R})$ و $SL(n, \mathbb{C})$ نمایش داده می‌شوند و عبارتند از ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی از $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ که دترمینان برابر با ۱ دارند.

مثال ۲۸.۳. گروه ماتریس‌های دوران زیرگروهی از $GL(2, \mathbb{R})$ است که با $SO(2, \mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود. این گروه یک گروه لی یک بعدی فشرده است که با دایره همسان‌ریخت است. با استفاده از زاویه دوران به عنوان یک پارامتر، این گروه را می‌توان به صورت زیر پارامتری کرد.

$$\begin{aligned} SO(2, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid AA^t = A^t A = I \text{ و } \det A = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

1. Felix Christian Klein

2. Erlangen program

مثال ۲۹.۳. گروه‌های متعامد و متعامد خاص به ترتیب با $O(n)$ و $SO(n)$ نمایش داده می‌شوند و شامل ماتریس‌های $n \times n$ هستند که در خاصیت $R^T = R^{-1}$ صدق می‌کنند. همچنین اعضای $SO(n)$ در شرط مضاعف $\det R = 1$ نیز صادق هستند. به عبارتی

$$O(n) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \mid A^T = A^{-1}\}$$

$$SO(n) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \mid A^T = A^{-1}, \det A = 1\}$$

مثال ۳۰.۳. گروه‌های یکانی و گروه‌های یکانی خاص، که به ترتیب با $U(n)$ و $SU(n)$ نمایش داده می‌شوند، شامل ماتریس‌های مختلط $n \times n$ هستند که در اتحاد $U^* = U^{-1}$ صدق می‌کنند. علاوه بر این، ماتریس‌های عضو $SU(n)$ در شرط $\det U = 1$ نیز صدق می‌کنند. $SU(2)$ را می‌توان از لحاظ توپولوژیکی با کره S^3 و از لحاظ گروهی با گروه یکانی کواترنیون‌ها یکریخت دانست.

مثال ۳۱.۳. (گروه آفین ۱ بعدی). این گروه که به عنوان تبدیلات خطی در مثال ۲۶.۳ آورده شده است، یک گروه ماتریسی دو بعدی لی است. این گروه از ماتریس‌های مثلثی 2×2 حقیقی و بالا مثلثی تشکیل شده است، به گونه‌ای که اولین درایه قطری مثبت و دومین درایه قطری برابر با ۱ است.

$$Aff(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

مثال ۳۲.۳. گروه آفین معرفی شده در مثال‌های ۲۶.۳ و ۳۱.۳ را می‌توان از دیدگاه ضرب نیم مستقیم گروه‌ها هم مورد بررسی قرار داد. مجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ را با ضرب جدیدی مجهز می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

$$(b_1, a_1)(b_2, a_2) = (b_1 + a_1 b_2, a_1 a_2), \quad (b_1, a_1), (b_2, a_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

در این حالت

$$(\circ, 1)(b, a) = (b, a), \quad (b, a)(-a^{-1}b, a^{-1}) = (\circ, 1)$$

در این حالت $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ با این ضرب و توپولوژی حاصل ضربی یک گروه توپولوژیکی موضعاً فشرده است. برای (b, a) در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ و هر $x \in \mathbb{R}$ ، تبدیل $(b, a) \cdot x = ax + b$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت تبدیل فوق یک تبدیل آفین روی $\mathbb{R}$ است و هر تبدیل آفین تحت دوران پایا روی $\mathbb{R}$ به فرم فوق است. این تناظر ضرب را نیز حفظ می‌کند. به همین دلیل گروه معرفی شده در بالا را گروه آفین یا $-ax + b$ گروه نیز می‌نامند.

مثال بالا یک نمونه از تکنیک شناخته شده برای ساختن گروه‌های موضعاً فشرده از روی گروه‌های موجود است. آن را تکنیک ضرب نیم‌مستقیم می‌نامند. در ادامه مختصراً آن را شرح می‌دهیم. فرض کنید N و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند و $Aut(N)$ خودریختی‌های گروهی روی N را نمایش دهد. منظور از یک خودریختی، یک یکرختی گروهی پیوسته و باز روی N است. فرض کنید همریختی $\alpha_h : h \rightarrow \alpha_h$ از H به توی $Aut(N)$ موجود باشد به طوری که $(n, h) \rightarrow \alpha_h(n)$ از $N \times H$ به N پیوسته باشد. گروه ضرب نیم‌مستقیم، $N \rtimes_\alpha H$ ، مجموعه $N \times H$ همراه با ضرب

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \alpha_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$$

و توپولوژی حاصلضربی است. در این حالت (e_n, e_h) یک گروه $N \rtimes_\alpha H$ است و

$$(n, h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$$

و اعمال پیوسته هستند. گروه ضرب نیم‌مستقیم N و H یک گروه موضعاً فشرده است. اگر قرار دهیم $\tilde{N} = \{(n, e_h) : n \in N\}$ و $\tilde{H} = \{(e_n, h) : h \in H\}$ در این صورت $\tilde{N}$ و $\tilde{H}$ زیرگروه‌های بسته $N \rtimes H$ هستند و $\tilde{N} \cap \tilde{H} = \{e\}$ و $\tilde{N} \tilde{H} = N \rtimes_\alpha H$ و $\tilde{N}$ در G نرمال است. همچنین برای $n \in N$ و $h \in H$

$$(e_H, h)(n, e_H)(e_H, h)^{-1} = (\alpha_h(n), e_H).$$

در حالت کلی اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، ممکن است موفق شویم تا گروه‌های بسته N و H را طوری بیابیم که N در G نرمال باشد و $N \cap H = \{e\}$. در این حالت می‌توانیم G را به صورت ضرب نیم‌مستقیم N و H بسازیم. این ساختار ساده را به صورت تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال ۳۳.۳. فرض کنید $n \in \mathbb{R}$ و $SO(n)$ نمایشگر گروه ماتریس‌های $n \times n$ متعامد با دترمینان ۱ باشد. با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^n$ ، $SO(n)$ یک گروه فشرده است. قرار می‌دهیم $G_n = \mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ که در آن $SO(n)$ روی $\mathbb{R}^n$ عمل می‌کند. در این صورت G_n را گروه حرکت اقلیدسی می‌نامیم.

مثال ۳۴.۳. (گروه هایزنبرگ). یک گروه لی پوچ‌توان همبند از بعد ۳ است که نقش مهمی در مکانیک کوانتومی بازی می‌کند. برای هر عدد طبیعی n گروه هایزنبرگ H_{2n+1} ، عبارت است

از

$$H_{2n+1} = \left\{ [a_{ij}]_{(n+1) \times (n+1)} \mid [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & I_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

دقت کنید ضرب این گروه عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & I_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & I_n & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+a' & c+c'+a.b' \\ 0 & I_n & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & I_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -a & -c+a.b \\ 0 & I_n & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۳.۳ اندازه هار و جبر گروهی

در این بخش ابتدا خواننده را به مفهوم اندازه بورل و رادون مختلط منظم که در فصل قبل به آن پرداخته شده است (بخش ۳.۱.۲)، ارجاع می‌دهیم. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. وجود یک اندازه رادون تحت انتقال پایا اهمیت ویژه‌ای دارد. اندازه بورل μ روی گروه موضعاً فشرده G را از چپ پایا (از راست پایا) می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in G$ و مجموعه بورل $E \subseteq G$ داشته باشیم $\mu(xE) = \mu(E)$ ($\mu(Ex) = \mu(E)$). اثبات وجود اندازه بورل تحت انتقال پایا سابقه تاریخی شنیدنی دارد.

این داستان در ۱۸۹۷ آغاز شد، زمانی که ادولف هورویتز^۱ ماتریسهای متعامد و یکانی را بر حسب زوایای اوایلر معرفی کرد و حجم گروه مربوط به آن را محاسبه کرد. شور^۲ در سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۲۰ مکرراً از مفهوم میانگین روی گروه‌های متناهی استفاده کرد. هرمان وایل^۳ نیز

1. Adolf HurWitz

2. Issai Schur

3. Hermann Weyl

این روند را برای گروه‌های لی خاص در سال ۱۹۲۷ ادامه داد. در ۱۹۳۳ الفرد هار^۱، دانشجوی دکتری دیوید هیلبرت وجود یک اندازه پایا روی گروه توپولوژیکی فشرده و جدایی پذیر را ثابت کرد. البته یکتایی این وجود در این مرحله ثابت نشد. تلاش‌های او توسط اندرو ویل^۲ تکمیل و به گروه‌های موضعاً فشرده دلخواه تعمیم داده شد. فون نویمان^۳ وجود و یکتایی را برای گروه موضعاً فشرده دلخواه جدایی پذیر ثابت کرد و نتیجه نهایی تلاش‌های ذکر شده در بالا در سال ۱۹۳۳ به قضیه زیر منجر شد.

قضیه ۳۵.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت یک اندازه ناصفر رادون از چپ پایا μ_G روی G موجود است به طوری که برای هر زیرمجموعه باز U از G ، $0 < \mu_G(U)$. اگر v اندازه ناصفر رادون از چپ پایای دیگری روی G باشد، آنگاه ثابت $c > 0$ چنان موجود است که $v = c\mu_G$.

اندازه μ_G معرفی شده در قضیه بالا را اندازه هار چپ روی G می‌نامیم. بنابر قضیه فوق این اندازه در حد یک مضرب مثبت یکتاست.

به طور طبیعی اندازه هار راست روی G را می‌توان به شکل مشابهی یافت. کافی است همریختی $x \rightarrow x^{-1}$ را در نظر بگیریم و برای هر زیرمجموعه بول E از G تعریف کنیم $v(E) = \mu(E^{-1})$.

اغلب با اندازه‌های چپ روی گروه G کار می‌کنیم و کمتر از اندیس G برای μ استفاده می‌کنیم و در صورت استفاده از آن در انتگرال‌ها غالباً از نماد dx استفاده می‌کنیم.

برای گروه موضعاً فشرده G فرض کنید $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع باشد و $p \in (1, \infty)$. فضای همه توابع اندازه پذیر مانند f که برای آن‌ها مقدار $\int_G |f(x)|^p dx$ متناهی است را با $L_p(G)$

نشان می‌دهیم. نرم فضای $L_p(G)$ به صورت $\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ است. لازم به ذکر است که برای $p \in [1, \infty)$ فضای $L_p(G)$ یک فضای باناخ است و برای $p \in (1, \infty)$ ، $L_p(G)^* = L_{p'}(G)$ ، که در آن $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

فضای همه توابع پیوسته مانند f را با $C(G)$ نشان می‌دهیم. برای $f \in C(G)$ مقدار $\|f\|_u = \sup_{x \in G} |f(x)|$ را در نظر بگیرید. تابع پیوسته f را کراندار گوییم هرگاه $\|f\|_u < \infty$.

1. Alfered Haar
2. Andrew Weil
3. John von Neumann

∞ . فضای همه توابع پیوسته و کراندار را با $C_b(G)$ نشان می‌دهیم. تابع $\|\cdot\|_u$ به روی این فضا یک نرم است و فضای $C_b(G)$ مجهز به این نرم، یک فضای باناخ است. گوییم تابع f در بی نهایت صفر می‌شود، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه فشرد K_ε وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \notin K_\varepsilon$ داشته باشیم $|f(x)| < \varepsilon$. این بدان معنی است که برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه $K_\varepsilon = \{x \in G : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ یک مجموعه فشرد باشد. زیر فضای همه توابع پیوسته که در بی نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین فضای $(C_0(G), \|\cdot\|_u)$ یک فضای باناخ است. برای تابع f منظور از $\text{supp}(f)$ بستار مجموعه $\{x \in G : f(x) \neq 0\}$ است. به مجموعه $\text{supp}(f)$ محل f تابع f گفته می‌شود. فضای همه توابع حقیقی مقدار پیوسته مانند f که دارای محل فشرد هستند را با $C_c(G)$ نمایش داده و قرار می‌دهیم $C_c^+(G) = \{f \in C_c(G) : f \geq 0, f \neq 0\}$. اگر $f \in C_c(G)$ ، آنگاه f نسبت به اندازه‌های μ_G انتگرال پذیر است و برای انتگرال آن از نماد $\int_G f(x) d\mu(x)$ یا $\int_G f d\mu$ بهره خواهیم برد. البته از این نوشتار برای نمایش انتگرال توابع از جنس‌های دیگر مانند تابع اندازه‌پذیر هار، انتگرال‌پذیر و ... که روی آن‌ها $\int_G f(x) dx$ معنا دارد، استفاده خواهیم کرد. روابط زیر را داریم

$$C_c(G) \subseteq C_0(G) \subseteq C_b(G) \subseteq C(G), \quad \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_u} = C_0(G), \\ C_c(G) \subseteq L_p(G), \quad \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_p} = L_p(G), \quad p \in (1, \infty).$$

گزاره ۳۶.۳. فرض کنید μ یک اندازه رادون روی گروه موضعاً فشرد G باشد و $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ در این صورت

الف) μ یک اندازه هار چپ است اگر و تنها اگر $\tilde{\mu}$ یک اندازه هار راست باشد.

ب) μ یک اندازه هار چپ است اگر و تنها اگر برای هر $f \in C_c^+(G)$ و برای هر $y \in G$ ، $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$.

برهان. قسمت الف واضح است و قسمت ب با استفاده از توابع پله‌ای به سادگی حاصل می‌شود. $\square$

برای هر $x \in G$ و هر مجموعه بورل E تعریف می‌کنیم

$$\mu_x(E) = \mu(Ex),$$

در این صورت μ_x هم یک اندازهٔ هارچپ روی G است و بنابراین $\Delta(x) > 0$ چنان موجود است که $\mu_x = \Delta(x)\mu$. تابع $(0, +\infty) : G \rightarrow \Delta$ را تابع پیمانه‌ای G می‌نامیم.

گزاره ۳۷.۳. تابع Δ یک همریختی پیوسته بین G و گروه ضربی $\mathbb{R}$ است و همچنین

$$\forall f \in L^1(\mu), \quad \int R_y f d\mu = \Delta(y^{-1}) \int f d\mu$$

برهان. برای هر $x, y \in G$ و $E \subseteq G$

$$\Delta(xy)\mu(E) = \mu(Exy) = \Delta(y)\mu(Ex) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(E),$$

بنابراین Δ یک همریختی بین دو گروه با اعمال مربوطه است. همچنین از آنجاکه $\chi_E(xy) = \chi_{Ey^{-1}}(x)$ داریم

$$\int \chi_E(xy) d\mu(x) = \mu(Ey^{-1}) = \Delta(y^{-1})\mu(E) = \Delta(y^{-1}) \int \chi_E(x) d\mu(x).$$

مرحله پایانی با تقریب مناسب توابع انتگرال‌پذیر با توابع پله‌ای به دست می‌آید. از طرفی چون تابع $R_y f \rightarrow y$ از G به $C_c(G)$ پیوسته است، تابع $y \rightarrow \int R_y f dx$ پیوسته است و لذا پیوستگی Δ از تساوی موجود حاصل می‌شود. $\square$

اگر $\Delta \equiv 1$ ، آنگاه G را تک پیمانه‌ای G می‌نامیم. در این حالت اندازه هارچپ از راست نیز پایاست. واضح است که گروه‌های گسسته، گروه‌های فشرده و گروه‌های آبلی نیز تک پیمانه‌ای هستند. در این موارد از به‌کاربردن کلمه چپ یا راست برای اندازه هارچپ صرف‌نظر می‌کنیم. همان گونه که قبلاً بیان شد، برای $1 \leq p < \infty$ فضای باناخ همه توابع (یا کلاس‌های

هم‌ارزی) اندازه‌پذیر بورل f که برای آن‌ها $\left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$ متناهی است را با $L^p(G, \mu)$ و برای سادگی با $L^p(G)$ نمایش می‌دهیم. $L^\infty(G, \mu)$ یا برای سادگی $L^\infty(G)$ همه توابع اساساً کراندار با نرم زیر است. برای $f \in L^\infty(G, \mu)$ ، تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ N \mid \text{اندازه پذیر و پوچ است } \{ |f(x)|; x \notin N \} \right\}$$

1. modular function

2. unimodular

$$= \inf\{c > 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

در واقع $\|f\|_\infty$ اینفیمم همه $c > 0$ هایی است که تقریباً همه جا $|f(x)| \leq c$. فضای $C_c(G)$ در $L^p(G)$ برای $1 \leq p \leq \infty$ چگال است.

گزاره ۳۸.۳. فرض کنید $1 \leq p \leq \infty$ و $f \in L^1(G)$ و $g \in L^p(G)$. در این صورت انتگرال

$$\int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y) = \int_G f(xy)g(y^{-1})d\mu(y)$$

برای تقریباً هر $x \in G$ ، مطلقاً همگراست. انتگرال فوق را با $f * g$ نمایش می‌دهیم. تابع $f * g$ به $L^p(G)$ متعلق است و $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. اگر $p = \infty$ آنگاه $f * g$ پیوسته است.

برهان. بنابر نامساوی مینکفسکی^۱ برای توابع انتگرال‌پذیر داریم

$$\|f * g\|_p = \left\| \int f(y)L_y g(\cdot) dy \right\|_p \leq \int |f(y)| \|L_y g\|_p dy = \|f\|_1 \|g\|_p$$

اگر $p = \infty$ و $f \in C_c(G)$ ، با توجه به یکنواخت پیوستگی راست و چپ^۲ برای f واضح است که $f * g$ و $g * f$ پیوسته هستند. اما $C_c(G)$ در $L^1(G)$ چگال است و بنابراین هرگاه $f_n \rightarrow f$ در $L^1(G)$ ، آنگاه به صورت یکنواخت همگرایی $f_n * g \rightarrow f * g$ برقرار است. بنابراین $f * g$ برای هر f در $L^1(G)$ پیوسته است. $\square$

قضیه زیر که توسط سائکی^۳ در ۱۹۹۰ در [۶۰] ثابت شده است کمتر در کتب آنالیز هارمونیک دیده می‌شود. به دلیل مفصل و تکنیکی بودن، از ارائه برهان آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزاره ۳۹.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $1 < p < \infty$ ، در این صورت $L^p(G)$ تحت ضرب پیچشی یک جبر باناخ است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

گزاره ۴۰.۳. اگر G تک پیمانه‌ای باشد و برای اسکالرهای مزدوج $1 < p, q < \infty$ ، به این معنی که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، توابع f متعلق به $L^p(G)$ و g متعلق به $L^q(G)$ باشد، آنگاه $f * g \in C_0(G)$ و $\|f * g\|_u \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

1. Hermann Minkowski
2. left and right uniform continuity
3. Sadahiro Saeki

برهان. بنابر نامساوی هولدر که پیش از این شناختیم و پایایی اندازه هار برای هر $x \in G$ داریم $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$. اگر $f, g \in C_c(G)$ ، آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود $f * g \in C_c(G)$ اما $f * g \in C_c(G)$ در $L^p(G)$ چگال است و اگر $f_n \rightarrow f$ در L^p و $g_n \rightarrow g$ در L^q ، آنگاه $f_n * g_n \rightarrow f * g$ و $g_n * f_n \rightarrow g * f$ به‌طور یکنواخت و نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

تابع $f * g$ را پیچش f و g می‌نامیم. واضح است که برای $p = 1$ ضرب فوق $L^1(G)$ را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند. برای $f \in L^1(G)$ و $x \in G$ ، قرار دهید

$$f^*(x) = \Delta_G(x^{-1}) \overline{f(x^{-1})}$$

در این صورت $\|f\|_1 = \|f^*\|_1$. مفهوم پیچش را به کمک تابع‌های خطی روی $C_c(G)$ نیز می‌توان معرفی کرد. فرض کنید μ و ν دو اندازه بورل مختلط باشند، در این صورت نگاشت خطی I روی $C_c(G)$ را با تعریف

$$I(\Phi) = \int_G \int_G \Phi(xy) d\mu(x) d\nu(y)$$

در نظر بگیرید. در این حالت

$$|I(\Phi)| \leq \|\Phi\|_u \|\mu\| \|\nu\|.$$

بنابر قضیه نمایش ریس I بیانگر یک اندازه در $M(G)$ (فضای اندازه‌های بورل منظم مختلط) است که آن را پیچش μ و ν می‌نامیم و داریم

$$\int \Phi d(\mu * \nu) = \int \int \Phi(xy) d\mu(x) d\nu(y)$$

بررسی این حقیقت که پیچش، همواره شرکت‌پذیر است و جابجایی است اگر و تنها اگر G آبله باشد، آسان است. همچنین δ_e ، اندازه دیراک در عضو همانی G ، یک $M(G)$ است. با تعریف

$$\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})} \quad \text{یا} \quad \int \Phi d\mu^* = \int \Phi(x^{-1}) d\bar{\mu}(x)$$

$M(G)$ یک $*$ -جبر باناخ است و $L^1(G)$ یک ایده‌آل بسته آن است. کافی است برای هر f در $L^1(G)$ ، اندازه $f dx$ را به عنوان عضوی در $M(G)$ در نظر بگیریم. که در آن اندازه هار

چپ G است. در این صورت پیشش تعریف شده برای $M(G)$ و همچنین برگردان تعریف شده روی $M(G)$ ، بر اعمال متناظر بر $L^1(G)$ ، منطبق است. لذا $L^1(G)$ نیز یک جبر باناخ مجهز به برگردان است. در واقع باید نشان داد برای هر $\phi \in C_c(G)$ و برای $f, g \in L^1(G)$

$$\int \phi(x) d\mu_{f*g}(x) = \int \phi(x) d\mu_f * \mu_g(x).$$

برای این منظور توجه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int \phi(x) d\mu_{f*g}(x) &= \int f * g(x) \phi(x) dx = \int \int f(y) g(y^{-1}x) dy \phi(x) dx \\ &= \int \int f(y) g(x) dy \phi(yx) dx. \end{aligned}$$

از سوی دیگر داریم

$$\begin{aligned} \int \phi(x) d\mu_f * \mu_g(x) &= \int \int \phi(xy) d\mu_f(x) d\mu_g(y) \\ &= \int \int f(x) g(y) dy \phi(xy) dx. \end{aligned}$$

بنابراین تطابق حاصل می‌شود.

حال فرض کنید H یک گروه موضعاً فشرده باشد. اگر $\alpha : H \rightarrow G$ یک همریختی پوشا و سره باشد، آنگاه برای هر اندازه هار چپ μ_G برای گروه G اندازه هار چپ μ_H روی گروه H وجود دارد به طوری که

$$\int_G f(x) d\mu_G(x) = \int_H f \circ \alpha(h) d\mu_H(h), \quad f \in L_1(G),$$

در نتیجه برای دو اندازه هار چپ دلخواه اما ثابت، با توجه به قضایای قبل، عدد ثابت و مثبت c_α وجود دارد به طوری که

$$\int_G f(x) dx = c_\alpha \int_H f \circ \alpha(h) dh, \quad f \in L_1(G), \quad (۱.۳)$$

اگر G گسسته نباشد، آنگاه $L^1(G)$ یکدار نیست. اما همیشه دارای یک تقریبی چپ (راست) کراندار با اعضایی در $C_c(G)$ است. فرض کنید $\{e_i\}$ از همسایگی‌های e در

G باشد. برای هر $U \in \mathfrak{M}$ تابع f_U را در $C_c(G)$ ، دارای محمل فشرده در U می‌سازیم به طوری که برای هر $x \in G$ ، $f(x^{-1}) = f(x)$ و $\int f(x)dx = 1$. در این صورت برای هر $g \in L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$) وقتی که $U \rightarrow \{e\}$ داریم

$$\|f_U * g - g\|_p \rightarrow 0, \quad \|g * f_U - g\|_p \rightarrow 0.$$

تعریف ۴۱.۳. فرض کنید $(e_i)_{i \in \mathbb{I}} \subseteq L^1(G)$ یک تور کراندار با کران یک باشد. تور $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ را یک تقریبی کراندار^۱ می‌نامیم، هرگاه برای هر $f \in L^1(G)$ داشته باشیم $\|e_i * f - f\|_{L^1(G)} \rightarrow 0$.

تذکر ۴۲.۳. فرض کنید U همسایگی فشرده و متقارن e و روی $\mathcal{K}(e)$ ترتیب شمول برعکس را در نظر بگیرید. قرار دهید $\Psi_U = \frac{1}{|U|} \chi_U$. آنگاه تور $(\Psi_U)_{U \in \mathcal{K}(e)}$ یک تقریبی کراندار برای $L^1(G)$ است.

گزاره ۴۳.۳. فرض کنید I یک زیرفضای بسته از $L^1(G)$ باشد. در این صورت I یک ایده‌آل از $L^1(G)$ است اگر و تنها اگر I تحت انتقال‌های از چپ و راست بسته باشد.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌آل چپ باشد. اگر $f \in I$ و $x \in G$ و $\{f_U\}$ یک تقریبی برای $L^1(G)$ باشد، آنگاه $f = (L_x f_U) * f$ به I تعلق دارد و بنابراین

$$L_x f = \lim L_x(f_U * f)$$

به I متعلق است. از سوی دیگر فرض کنید I تحت انتقال‌های چپ پایا باشد. اگر $f \in I$ و $g \in L^1(G)$ داریم $g * f = \int g(y) L_y f dy$. بنابراین $g * f$ نقطه‌حدی ترکیب خطی توابع از نوع $L_y f$ است و بنابراین در I است. $\square$

تعریف ۴۴.۳. تور $(e_i)_{i \in \mathbb{I}} \subseteq L^1(G)$ را یک تقریبی کراندار شبه-مرکزی^۲ می‌نامیم، هرگاه برای هر $\mu \in M(G)$ داشته باشیم $\|e_i * \mu - \mu * e_i\|_{L^1(G)} \rightarrow 0$.

زمان آن رسیده است که به مفهوم میانگین پذیری^۳ گروه موضعاً فشرده G بپردازیم. این مفهوم در حالت کلی برای جبرهای فون نویمان بیان می‌شود و تفسیرهای متفاوتی به همراه

-
1. bounded approximate identity
 2. quasi-central
 3. amenability

رویکردهای مختلفی از آن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. [۶۱] مرجعی موجز در این زمینه است که خواننده علاقه مند می‌تواند به آن مراجعه کند. بر مبنای این مرجع، در تفسیر میانگین پذیری گروه G ، در اینجا فقط حالت $\mathcal{M} = L^\infty(G)$ را مختصراً بیان می‌کنیم. عمل زیر را در نظر بگیرید

$$x \cdot f = \delta_x * f \quad x \in G, f \in L^1(G),$$

فضای $L_1(G)$ به همراه عمل فوق یک G -مدول چپ باناخ^۱ است. در واقع نگاشت خطی زیر خوش تعریف است

$$G \times L^1(G) \rightarrow L^1(G), \quad (x, f) \mapsto \delta_x * f, \quad x \in G, f \in L^1(G).$$

این عمل برای عضو ثابت $x \in G$ انقباضی و مثبت است. داریم

$$\|x \cdot f\| \leq \|f\|, \quad (x, f) \in G \times L^1(G) \\ x \cdot f \geq 0, \quad f \geq 0, \quad (x, f) \in G \times L^1(G).$$

تعریف ۴۵.۳. گروه موضعاً فشرده G میانگین پذیر را^۲ گوئیم،^۳ هرگاه یک حالت $m \in S(L^\infty(G))$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$m(x \cdot f) = m(f), \quad (x, f) \in G \times L^\infty.$$

در این شرایط به حالت $m \in S(L^\infty(G))$ یک میانگین G -پایا^۴ برای عمل G روی فضای $L^1(G)$ می‌گویند.

در اینجا قضیه مهم زیر را ارائه می‌کنیم

قضیه ۴۶.۳. اگر گروه موضعاً فشرده G میانگین پذیر باشد، آنگاه $L^1(G)$ دارای یک تقریبی مرکزی است.

1. Banach left G -module

2. amenable

۳. یا می‌گوئیم G به‌صورت میانگین پذیر روی $L^1(G)$ عمل می‌کند

4. G -invariant mean

۴.۳ فضاهای همگن

مطالعه فضاهای همگن و فضاهای خارج قسمتی یکی از قسمت‌های همیشه جذاب و مهم در نظریه گروه‌های توپولوژیکی است.

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و S یک فضای موضعاً فشرده هاسدورف باشد. یک عمل (چپ) از G روی S نگاشت پیوسته $S \rightarrow G \times S$ است به‌طوری‌که

الف) برای هر $x \in G$ نگاشت $s \rightarrow xs$ یک همسان‌ریختی از S است.

ب) برای $x, y \in G$ و $s \in S$ $x(y s) = (xy)s$.

فضای S همراه با یک عمل را یک G -فضا می‌نامیم. یک G -فضا را تراپا می‌نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$ ، $t, x \in G$ عضو x چنان موجود باشد که $xs = t$.

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و H زیرگروه بسته آن باشد. در این حالت مشابه با آنچه بالاتر گفته شد، گروه G روی G/H با تعریف نگاشت $G/H \rightarrow G \times G/H$ با ضابطه $(x, yH) \rightarrow xyH$ به شکل پیوسته عمل می‌کند. بنابراین گروه‌های خارج قسمتی یکی از مثالهای استاندارد از G -فضاهای تراپا هستند. در واقع این توضیح بیان می‌کند که این فضاها تنها نمونه از G -فضاهای تراپا هستند. بررسی آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

از عنوان فضاهای همگن برای G -فضاهای تراپا که بنابر تمرین ذکر شده در سطر قبل به فرم G/H برای یک زیرگروه H است، استفاده می‌کنیم.

اندازه μ روی G/H را G -پایا می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه بول E از G/H و $x \in G$ $\mu(xE) = \mu(E)$.

وجود یک اندازه G -پایا روی G/H را در گزاره زیر مطالعه می‌کنیم.

در ادامه dx نمایانگر اندازه‌های G ، $d\xi$ نمایانگر اندازه‌های زیرگروه بسته H و نگاشت $q : G \rightarrow G/H$ نگاشت کانونی طبیعی با تعریف $q(x) = xH$ و Δ_G و Δ_H به ترتیب تابع مدولار G و H هستند.

نگاشت $P : C_c(G) \rightarrow C_c(G/H)$ را به فرم $Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت خوش‌تعریف است. زیرا فرض کنید برای $y = x\eta$ ، $\eta \in H$ در این صورت

$$\int f(y\xi)d\xi = \int f(x\xi)d\xi.$$

به‌وضوح Pf پیوسته است و $\text{supp}(Pf) \subseteq q(\text{supp} f)$. همچنین اگر $Q \in C(G/H)$ داریم $P[(Q \circ q).f] = \phi.Pf$. نشان می‌دهیم P ، $C_c(G)$ را به‌روی $C_c(G/H)$ می‌نگارد.

لم ۴۷.۳. اگر $E \subseteq G/H$ فشرده باشد آنگاه یک مجموعه فشرده $K \subseteq G$ با شرط $q(K) = E$ موجود است.

برهان. همسایگی باز v از e در G که دارای بستار فشرده است، را انتخاب می‌کنیم. از آنجا که q یک نگاشت باز است، $\{q(xv)\}_{x \in G}$ یک پوشش باز برای E است و بنابراین زیرپوشش متناهی به فرم

$$E \subseteq q(x_1 v) \cup \dots \cup q(x_n v)$$

دارد. قرار می‌دهیم $K = q^{-1}(E) \cap \bigcup_{j=1}^n x_j \bar{v}$. $\square$

لم ۴۸.۳. اگر $F \subseteq G/H$ فشرده باشد، تابع $f \geq 0$ در $C_c(G)$ چنان موجود است به‌طوری که روی F ، $Pf = 1$.

برهان. فرض کنید E یک همسایگی فشرده از F در G/H باشد و q را برای یافتن $K \subseteq G$ با شرط $q(K) = E$ به‌کار می‌بریم. تابع مثبت $g \in C_c(G)$ که روی K اکیداً مثبت است را انتخاب می‌کنیم. $\phi \in C_c(G/H)$ با محمول مشمول در E را چنان برمی‌گزینیم که $\phi|_F = 1$ و قرار می‌دهیم

$$f = \frac{\phi \circ q}{Pg \circ q} \cdot g$$

در این حالت $Pf = \phi$. $\square$

گزاره ۴۹.۳. اگر $\phi \in C_c(G/H)$ ، آنگاه $f \in C_c(G)$ چنان موجود است که $\phi f = \phi$ و $q(\text{supp} f) = \text{supp} \phi$ و هرگاه $\phi \geq 0$ داریم $f \geq 0$.

برهان. اگر $\phi \in C_c(G/H)$ بنا بر لم قبل $g \geq 0$ در $C_c(G)$ با شرط $Pg = 1$ روی $\text{supp} \phi$ موجود است. قرار می‌دهیم $f = (\phi \circ q)g$. $\square$

قضیه ۵۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و H زیرگروه بسته آن باشد. اندازه رادون G - پایا μ روی G/H موجود است اگر و تنها اگر

$$\Delta_G|_H = \Delta_H.$$

در این حالت μ در حد یک مضرب یکتاست و اگر این ضریب به شکل مناسب انتخاب شود، داریم

$$\int_G f(x) dx = \int_{G/H} Pf d\mu = \int_{G/H} \int_H f(x\xi) d\xi d\mu(xH) \quad (f \in C_c(G))$$

برهان. فرض کنید اندازه G -پایای μ روی G/H موجود است. در این صورت نگاشت $f \rightarrow \int Pfd\mu$ خوش تعریف است. این نگاشت یک تابعک ناصفر، تحت انتقال چپ پایا و مثبت روی $C_c(G)$ است و بنابراین $c > 0$ چنان موجود است که

$$\int_{G/H} Pfd\mu = c \int f(x)dx \quad (2.3)$$

زیرا اندازه هار چپ یکتاست. حال μ را با $c^{-1}\mu$ جایگزین می‌کنیم و رابطه (2.3) برقرار خواهد بود.

حال اگر H و $f \in C_c(G)$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta_G(\eta) \int_G f(x)dx &= \int_G f(x\eta^{-1})dx = \int_{G/H} \int_H f(x\xi\eta^{-1})d\xi d\mu(xH) \\ &= \Delta_H(\eta) \int f(x)dx \end{aligned}$$

و بنابراین $\Delta_G(\eta) = \Delta_H(\eta)$.

برعکس، فرض کنید $\Delta_G|_H = \Delta_H$. ادعا می‌کنیم اگر برای $f \in C_c(G)$ داشته باشیم $\int f(x)dx = 0$ آنگاه $Pf = 0$. به این منظور با استفاده از لم 4.8.3، $\phi \in C_c(G)$ که روی $q(\text{supp} f)$ در شرط ۱ صدق می‌کند را می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned} 0 &= Pf(xH) = \int f(x\xi)d\xi = \int f(x\xi^{-1})\Delta_H(\xi^{-1})d\xi \\ &= \int f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})d\xi. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \int_H \phi(x)f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})dxd\xi \\ &= \int_H \int_G \phi(x\xi)f(x)dxd\xi \\ &= \int P\phi(xH)f(x)dx = \int f(x)dx \end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد نگاشت $Pf \rightarrow \int f(x)dx$ از $C_c(G/H)$ به $\mathbb{C}$ خوش تعریف است و یک تابعک خطی G -پایا و مثبت روی $C_c(G/H)$ تعریف می‌کند. این تابعک اندازه G -پایای μ روی G/H را به دست می‌دهد. $\square$

مثال ۵۱.۳. گروه ضربی مختلط $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ و نگاشت پیوسته $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ با ضابطه $\psi(t) = \exp(2\pi it)$ را به‌خاطر بیاورید. اندازه هار $\mu_{\mathbb{R}}$ روی $\mathbb{R}$ و $\mu_{\mathbb{T}}([0, 1)) = 1$ اندازه مثبت لبگ است و اندازه هار روی $\mathbb{T}$ با رابطه

$$\mu_{\mathbb{T}}(E) = \mu_{\mathbb{R}}(\psi^{-1}(E) \cap [0, 1))$$

ارائه می‌شود. به عبارتی برای هر تابع اندازه‌پذیر مثبت f روی $\mathbb{T}$ ، داریم

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) dz = \int_{[0, 1)} f(e^{2\pi it}) dt$$

که در آن انتگرال سمت راست، انتگرال نسبت به اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است. در این مثال $\mathbb{T}$ به عنوان خارج قسمتی از $\mathbb{R}$ تلقی شده است.

۵.۳ نمایش‌های یکانی و توابع مثبت معین روی گروه موضعاً فشرده

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ گروه نگاشت‌های یکانی روی $\mathcal{H}$ (متشکل از نگاشت‌های خطی و کراندار T که در شرط $TT^* = T^*T = I$ صدق می‌کنند) باشد. اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، نمایش یکانی پیوسته روی G ، زوج $(\pi, \mathcal{H}_{\pi})$ است که در آن $\mathcal{H}_{\pi}$ یک فضای هیلبرت و π یک همریختی از G به $\mathcal{U}(\mathcal{H}_{\pi})$ است به‌طوری که برای هر $\xi, \eta \in \mathcal{H}_{\pi}$ ، تابع $\Phi_{\xi, \eta}: x \rightarrow \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$ یک تابع پیوسته روی G است. به عبارتی منظور از پیوستگی π ، پیوستگی با توپولوژی اولیه روی G و توپولوژی عملگری ضعیف روی $\mathcal{U}(\mathcal{H}_{\pi})$ است. منظور از بعد نمایش یکانی پیوسته π روی G ، بعد فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{\pi}$ است.

مثال ۵۲.۳. اگر $\mathbb{T}$ را با گروه نگاشت‌های یکانی روی $\mathbb{C}$ یکی در نظر بگیریم، هر همریختی پیوسته مانند $\chi: G \rightarrow \mathbb{T}$ یک نمایش یکانی است و نمایش $\chi = 1$ را نمایش بدیهی از G می‌نامیم.

مثال ۵۳.۳. نمایش منظم چپ از G روی $L^2(G)$ که با λ_G نمایش داده می‌شود، به‌صورت $\lambda_G: G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(G))$ با ضابطه $\lambda_G(x)f(y) = f(y^{-1}x)$ تعریف می‌شود، نمایش منظم راست از G روی $L^2(G)$ با تعریف مشابهی به‌صورت

$$R_G(x)f(y) = \Delta_G(x)^{-1}f(yx)$$

برای هر f در $L^2(G)$ و x در G تعریف می‌شود.

تعریف ۵۴.۳. دو نمایش π و σ یکرخت (یکانی) نامیده می‌شوند، هرگاه نگاشت یکانی $U : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ موجود باشد به طوری که $U\pi(x) = \sigma(x)U$ ، $\forall x \in G$. در این حالت می‌نویسیم $\sigma \cong \pi$ و U را عملگر جابجاگر π و σ می‌نامیم.

مثال ۵۵.۳. نمایش‌های منظم چپ و راست از گروه G یکرخت هستند. در واقع اگر برای هر $f \in L^2(G)$ ، تعریف کنیم

$$Uf(y) = \Delta_G(y^{-1})^{\frac{1}{2}} f(y^{-1})$$

در این صورت نگاشت $U : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ یک نگاشت یکانی است و

$$\forall x \in G, f \in L^2(G) \quad (\lambda_G(x)U)(f) = (Uf_G(x))(f).$$

تعریف ۵۶.۳. زیرفضای V از $\mathcal{H}_\pi$ را π -پایا می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in G$ ، $\pi(x)V \subseteq V$. نمایش π را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم، هرگاه $\mathcal{H}_\pi$ و $\{0\}$ تنها زیرفضای بسته π -پایای $\mathcal{H}_\pi$ باشد. برای زیرمجموعه E از $B(\mathcal{H}_\pi)$ قرار می‌دهیم

$$E' = \left\{ T \in B(\mathcal{H}_\pi) \mid \forall S \in E, TS = ST \right\}.$$

قضیه زیرکه لم شور^۱ نامیده می‌شود، نقش مهمی در شناسایی مشخصه‌های یک گروه موضعا فشرده آبلی دارد.

گزاره ۵۷.۳. فرض کنید π یک نمایش یکانی پیوسته از G باشد. در این صورت احکام زیر معادل هستند:

(الف) π تحویل‌ناپذیر است.

(ب) $\pi(G)' = \mathbb{C}I$ که در آن I عملگر همانی روی $\mathcal{H}_\pi$ است.

(ج) برای $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ ، از شرط $\xi \neq 0$ و $\eta \neq 0$ نتیجه می‌شود، $\Phi_{\xi, \eta} \neq 0$.

1. Schur lemma

برهان. فرض کنید π تحویل‌ناپذیر نباشد، در این حالت $\pi(G)'$ شامل تصویرهای غیربدیهی است.

برعکس، فرض کنید $\tau \in \pi(G)'$ و به‌ازای هر اسکالر c ، $c\tau \neq \tau$. در این صورت

$$A = \frac{1}{4}(\tau + \tau^*), \quad B = \frac{1}{4i}(\tau - \tau^*),$$

در $\pi(G)'$ هستند و حداقل یکی از آن‌ها مثلاً A ، مضرب I نیست. A نرمال است و بنابراین هر عملگری که با A جابه‌جا شود، به‌طور خاص $\pi(x)$ ، با هر تصویر $\chi_E(A)$ (حسابان تابعی تابع مشخصه بر A) برای $E \subseteq \mathbb{R}$ ، نیز جابه‌جا می‌شود. بنابراین $\pi(G)'$ شامل تصویرهای غیربدیهی است و بنابراین π تحویل‌ناپذیر نیست.

حال فرض کنید (ب) برقرار باشد و (ج) برقرار نباشد. در این صورت $\xi \neq 0$ و $\eta \neq 0$ چنان موجود هستند که $\phi_{\xi, \eta} = 0$ و لذا $\langle \pi(x)\xi, \eta \rangle = 0$ ، $\forall x \in G$ و بنابراین $\langle \pi(G)\xi \rangle^\perp$ مخالف صفر است. این فضا تحت $\pi(x)$ پایاست؛ زیرا $\pi(x)\xi$ پایاست. و این با (ب) در تناقض است. اگر (ج) برقرار باشد، نتیجه می‌شود π زیرفضای پایا ندارد و لذا (الف) برقرار است. $\square$

نتیجه ۵۸.۳. اگر G یک گروه آبدی باشد، هر نمایش تحویل‌ناپذیر آن از بعد متناهی است.

برهان. واضح است که در این حالت، برای هر $x \in G$ ، عملگر $\pi(x)$ با سایر عملگرهای به همین فرم جابه‌جا می‌شود و بنابراین به $\pi(G)'$ متعلق است. بنابر لم شور چون π تحویل‌ناپذیر است، لذا برای هر $x \in G$ ، ثابت c_x یافت می‌شود به‌طوری که $\pi(x) = c_x I$. اما در این حالت هر زیرفضای غیر بدهی $\mathcal{H}_\pi$ پایاست که تناقض است، مگر اینکه $\dim H_\pi = 1$. $\square$

قضیه ۵۹.۳. (قضیه گلفند-ریکوف) ^۱ اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، نمایش‌های تحویل‌ناپذیر G نقاط آن را جدا می‌کنند. به این معنا که اگر x و y دو عضو متمایز در G باشند، نمایش تحویل‌ناپذیر π چنان موجود است که $\pi(x) \neq \pi(y)$.

برهان. طرحی از برهان ارائه می‌کنیم. ابتدا با استفاده از لم اورسیون می‌دانیم دو نقطه را می‌توان با تابعی در $C_c(G)$ جدا کرد. سپس با توجه به این‌که این تابع را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی توابع مثبت معین نوشت، با کمک تقریب با توابع مثبت معین خاص ϕ ، نمایش تحویل‌ناپذیر π_ϕ که نقاط را جدا می‌کند، یافت می‌شود. $\square$

1. Gelfand-Raikov theorem

۶.۳ گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

در این بخش به نمادها و برخی نتایج اولیه مربوط به گروه‌های آبلی موضعاً فشرده می‌پردازیم که نقش گسترده‌ای در شناخت مفاهیم طبیعی و فیزیکی ایفا می‌کنند. در سرتاسر این بخش G یک گروه موضعاً فشرده آبلی است. اندازه هار چپ و راست بر هم منطبق هستند و بنابراین

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x) = f(xy^{-1}), \quad R_y f(x) = L_{y^{-1}} f(x) = f(xy) = f(yx).$$

در این حالت G تک پیمانه‌ای و عمل پیچش جابجایی است. به‌عنوان مثال گروه‌های $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{T}$ با اعمال طبیعی خود گروه‌های آبلی موضعاً فشرده هستند. **تعریف ۶.۳.۱.** فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده آبلی باشد. یک مشخصه^۱ از G ، یک همریختی پیوسته از G به گروه دایره $\mathbb{T}$ است.

مجموعه همه مشخصه‌های گروه آبلی G را با $\hat{G}$ نمایش می‌دهیم. به‌وضوح $\hat{G}$ نسبت به ضرب نقطه‌ای و عمل وارون برای $\chi \in \hat{G}$ ، با تعریف $\overline{\chi}(x) = \chi^{-1}(x)$ بسته است. بنابراین $\hat{G}$ خود یک گروه آبلی است. $\hat{G}$ را به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده G ، مجهز می‌کنیم. در این حالت پایه موضعی حول $\chi_0 \in \hat{G}$ توسط مجموعه‌های به فرم زیر تولید می‌شود

$$V(\chi_0, C, \varepsilon) = \left\{ \chi \in \hat{G} \mid |\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon, x \in C \right\}$$

که در آن $\varepsilon > 0$ و C زیرمجموعه فشرده‌ای از G است. با این توپولوژی $\hat{G}$ یک گروه موضعاً فشرده آبلی است که گروه دوگان نامیده می‌شود.

قضیه ۶.۳.۱. گروه دوگان $\hat{G}$ یک گروه موضعاً فشرده است و نقاط G را جدا می‌کند؛ به این معنا که برای هر $x, y \in G$ ، مشخصه $\chi \in \hat{G}$ چنان یافت می‌شود که $\chi(x) \neq \chi(y)$.

برهان. این قضیه نتیجه‌ای از قضیه گلفند-ریکوف (قضیه ۵۹.۳) است، که در حالت کلی برای گروه موضعاً فشرده دلخواه، برقرار است. این قضیه می‌گوید نمایش‌های تحویل‌ناپذیر نقاط گروه را جدا می‌کنند. حال از آنجا که در حالت آبلی نمایش‌های تحویل‌ناپذیر همان مشخصه‌ها هستند، حکم واضح است. $\square$

1. character

جالب است بدانیم هر $x \in G$ نیز می‌تواند مشخصه‌ای روی گروه توپولوژیکی $\hat{G}$ تعریف کند. کافی است قرار دهیم

$$\begin{aligned}\hat{G} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \alpha_x : \chi &\longrightarrow \chi(x).\end{aligned}$$

قضیه زیرکه مهمترین قضیه دوگانی است را با خلاصه‌ای از برهان ارائه می‌کنیم.

قضیه ۶۲.۳. (دوگانی پونتریاگین) ^۱ فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده آبلی باشد. برای هر $x \in G$ قرار می‌دهیم $(\chi \in \hat{G}) \alpha_x(\chi) = \chi(x)$. در این صورت نگاشت $\Phi : x \longrightarrow \alpha_x$ یک یکریختی توپولوژیکی گروهی از G به گروه دوگان $\hat{G}$ ($\hat{\hat{G}}$) است.

برهان. طرحی از برهان را ارائه می‌کنیم. یک به یک بودن نگاشت فوق با استفاده از قضیه گلفند-ریکوف ۵۹.۳، واضح است. حال فرض کنید $\{x_\alpha\}$ یک تور در G باشد و $x \in G$ و $x_\alpha \rightarrow x$. به وضوح در این حالت برای هر $f \in B(G) \cap L^1(G)$ ، $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$. همچنین اگر $x_\alpha \not\rightarrow x$ به کمک قضایای جداسازی می‌توان تابعی مانند f در $B(G) \cap L^1(G)$ یافت به طوری که $f(x_\alpha) \not\rightarrow f(x)$. این نتیجه با کمک قضیه وارونگی فوریه ^۲ نتیجه می‌دهد در توپولوژی ضعیف ستاره القایی از $L^\infty(\hat{G})$ بر $\hat{G}$ ، داریم $\Phi(x_\alpha) \rightarrow \Phi(x)$. با توجه به موضعا فشرده بودن توپولوژی، تصویر G تحت $\hat{G}$ بسته است. برای اثبات پوشایی فرض کنید $x \in \hat{G} \setminus \Phi(G)$ ، در این صورت نمی‌توان تابعی ناصفر در $B(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$ یافت که x را از $\Phi(G)$ جدا کند و پوشایی ثابت می‌شود. $\square$

گزاره ۶۳.۳. اگر G یک گروه آبلی فشرده باشد و اندازه هار λ روی آن به نحوی تعریف شده باشد که $\lambda(G) = 1$ ، در این صورت $\hat{G}$ یک زیرمجموعه متعامد یکه در $L^2(G)$ است.

برهان. فرض کنید $\xi \in \hat{G}$ ، در این صورت $\|\xi\|_2 = 1$ و به وضوح $\|\xi\|_2 = 1$. اگر $\xi \neq \eta$ آنگاه $x_\circ \in G$ یافت می‌شود به طوری که $\xi \eta^{-1}(x_\circ) \neq 1$. بنابراین

$$\int \xi \bar{\eta} = \int \xi \eta^{-1}(x) dx = \xi \eta^{-1}(x_\circ) \int \xi \eta^{-1}(x_\circ^{-1} x) dx$$

-
1. Pontryagin duality
 2. Fourier Inversion Theorem

$$= \xi \eta^{-1}(x_0) \int \xi \eta^{-1}(x) dx$$

□ لذا $\int \xi \eta^{-1} = 0$ و بنابراین ξ و η بر هم عمود هستند.

گزاره ۶۴.۳. اگر G یک گروه آبدی گسسته باشد، آنگاه $\hat{G}$ فشرده است. اگر G گروه آبدی فشرده باشد، آنگاه $\hat{G}$ گسسته است.

برهان. اگر G گسسته باشد، آنگاه $L^1(G)$ یک‌دار است و بنابراین طیف آن $(\hat{G})$ فشرده است. اگر G فشرده باشد، تابع ثابت ۱ به $L^1(G)$ تعلق دارد. بنابراین

$$\left\{ f \in L^\infty(G) \mid \left| \int f \right| > \frac{1}{\epsilon} \right\}$$

یک مجموعه باز با توپولوژی ضعیف-ستاره است. بنابراین $\{1\}$ یک مجموعه باز در $\hat{G}$ است. زیرا برای $\xi \in \hat{G}$ ، اگر $\xi = 1$ ، آنگاه $\int \xi = 1$ ، و اگر $\xi \neq 1$ ، آنگاه $\int \xi = 0$. لذا $\hat{G}$ گسسته است.

□

در ادامه به کمک قضیه پونتریاگین نتایج مهمی را بیان می‌کنیم. برای زیرگروه بسته H از G فرض کنید $H^\perp = \{\chi \in \hat{G} \mid |\chi|_H = 1\}$ پوچساز H در $\hat{G}$ باشد. در این صورت $H^\perp$ زیرگروه بسته $\hat{G}$ است.

قضیه ۶۵.۳. با نمادهای فوق فرض کنید $q : G \rightarrow G/H$ همریختی طبیعی خارج‌قسمتی باشد. در این صورت نگاشت $\omega \rightarrow \omega \circ q$ یکرختی توپولوژیکی بین $\widehat{G/H}$ و $H^\perp$ است.

برهان. نگاشت $\Phi : \widehat{G/H} \rightarrow H^\perp$ را با ضابطه $\omega \rightarrow \omega \circ q$ تعریف می‌کنیم. اگر $\eta_\alpha \rightarrow \eta$ در $\hat{G}/H$ و $K \subseteq G$ فشرده باشد در این صورت η_α به η روی $q(K)$ به صورت یکنواخت همگرا خواهد بود و لذا $\eta_\alpha \circ q \rightarrow \eta \circ q$ به صورت یکنواخت روی K و لذا $\eta_\alpha \circ q \rightarrow \eta \circ q$ در $\hat{G}$. برعکس اگر $\eta_\alpha \circ q \rightarrow \eta \circ q$ در $\hat{G}$ و $F \subseteq G/H$ فشرده باشد، آنگاه با توجه به این که $K \subset G$ فشرده موجود است که $q(K) = F$ ، لذا می‌توان نتیجه گرفت $\eta_\alpha \rightarrow \eta$ در $\hat{G}/H$. بنابراین Φ همسان‌ریختی است.

□

نتیجه ۶۶.۳. $\hat{G}/H^\perp \cong \hat{H}$.

برهان. کافی است در قضیه قبل G را با $\hat{G}$ و H را با $H^\perp$ جایگزین کرده و از قضیه پونتریاگین استفاده کنیم.

□

مثال ۶۷.۳. فرض کنید $G = \mathbb{R}$ برای هر $\gamma \in \mathbb{R}$ تعریف کنید

$$\chi_\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, \quad \chi_\gamma(t) = e^{i\gamma t} \quad t \in \mathbb{R}$$

در این صورت $\gamma \longrightarrow \chi_\gamma$ یک یکرختی توپولوژیکی گروهی از $\mathbb{R}$ به $\hat{\mathbb{R}}$ است. توجه کنید که معمول است که $\mathbb{R}$ را با وزن 2π ، پارامتری کنیم. به این معنا که قرار می‌دهیم $\chi_\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ ، $t \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$.

مثال ۶۸.۳. فرض کنید $G = \mathbb{T}$ ، برای هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف کنید $\psi_n(z) = z^n$ ، $z \in \mathbb{T}$. در این صورت نگاشت $n \longrightarrow \chi_n$ ، $\mathbb{Z}$ را با $\hat{\mathbb{T}}$ یکرخت می‌کند. همچنین اگر قرار دهیم $t \in \mathbb{R}, q(t) = e^{2\pi i t}$ ، در این صورت q یک همریختی پیوسته از $\mathbb{R}$ به روی $\mathbb{T}$ با هسته $\mathbb{Z}$ است و این نشان می‌دهد که $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$. و لذا $\frac{\hat{\mathbb{R}}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$.

در ادامه نشان می‌دهیم فضای ایده‌آل ماکسیمال $L^1(G)$ ، برای گروه موضعاً فشرده آبدی G با $\hat{G}$ یکرخت است. در این حالت، $L^1(G)$ یک جبر باناخ جابجایی است. برای $\chi \in \hat{G}$ ، نگاشت $\gamma_\chi : L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه $\gamma_\chi(f) = \int f(x)\chi(x^{-1})dx$ تعریف می‌کنیم. در این صورت برای هر $f, g \in L^1(G)$ ، $\gamma_\chi(f * g) = \gamma_\chi(f)\gamma_\chi(g)$ و $\gamma_\chi(f^*) = \overline{\gamma_\chi(f)}$.

گزاره ۶۹.۳. نگاشت $\gamma \longrightarrow \gamma_\chi$ یک همسانریختی از $\hat{G}$ به روی $\Delta(L^1(G))$ فضای ایده‌آل ماکسیمال جبر باناخ $L^1(G)$ است. توپولوژی در نظر گرفته شده روی این فضا توپولوژی گلفند، القایی از دوگان $L^1(G)$ است.

برهان. فرض کنید $\phi \in L^1(G)^*$. در این صورت ϕ بر حسب یک انتگرالگیری از یک تابع مانند $\varphi \in L^\infty(G)$ داده می‌شود. به این معنا که برای هر $f \in L^1(G)$ ، $\phi(f) = \int f\varphi$. فرض کنید $f \in L^1(G)$ چنان باشد که $\phi(f) \neq 0$. در این صورت برای هر $g \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} \phi(f) \int \varphi(y)g(y)dy &= \phi(f)\phi(g) = \phi(f * g) \\ &= \int \int \varphi(x)f(xy^{-1})g(y)dydx \\ &= \int \phi(L_y f)g(y)dy. \end{aligned}$$

بنابراین تقریباً همه جا $\varphi(y) = \frac{\phi(L_y f)}{\phi(f)}$ ، لذا بدون کاستن از کلیت مطلب می‌توان $\varphi(y)$ را برای هر $y \in G$ به صورت فوق تعریف کرد. در این صورت φ پیوسته خواهد بود. همچنین

$$\varphi(xy)\phi(f) = \phi(L_{xy}f) = \varphi(x)\varphi(y)\phi(f)$$

و بنابراین $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. واضح است که با توجه به کرانداری و همریختی بودن φ مقادیر آن باید در دایره واحد قرار بگیرند و اثبات تمام است. $\square$

تعریف ۷۰.۳. فرض کنید $f \in L^1(G)$ ، تبدیل فوریه f را به صورت $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\hat{f}(\chi) = \gamma_\chi(f) = \int f(x)\chi(x)dx$ ، $\chi \in \hat{G}$ تعریف می‌کنیم. تبدیل فوریه به اندازه‌های رادون روی گروه آبدی G به صورت زیر گسترش می‌یابد.

$$\mu \in M(G) \quad \hat{\mu}(\chi) = \int \chi(x)d\mu(x), \quad \chi \in \hat{G}$$

در ادامه خواص تبدیل فوریه را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۷۱.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده آبدی باشد. در این صورت

الف) نگاشت $f \rightarrow \hat{f}$ یک $*$ -همریختی یک‌به‌یک از $L^1(G)$ به $C_0(\hat{G})$ است و تصویر $L^1(G)$ تحت این نگاشت در $C_0(\hat{G})$ با نرم یکنواخت چگال است.

ب) برای زیرمجموعه فشرده $\hat{G} \supseteq K$ تابع $f \in L^1(G)$ چنان یافت می‌شود که روی K ، $\hat{f} > 0$ و روی $\hat{G} \setminus U$ ، $\hat{f} \geq 0$.

ج) برای $f \in L^1(G)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده، تابع $g \in L^1(G)$ موجود است به طوری که $\hat{g}$ با $\hat{f}$ محمل فشرده است و $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. بنابراین $L^1(G)$ ، تویرین است.

برهان. الف) بررسی اینکه نگاشت $f \rightarrow \hat{f}$ نرم کاهشی و یک $*$ -همریختی است آسان است. اینکه برد آن یک زیرفضای $C(\hat{G})$ است، نتیجه‌ای از قضایای عمومی جبر باناخ در مورد نگاشت گلفند است. با توجه به اینکه برد این نگاشت یک زیر جبر، مزدوج بسته $(\hat{f} = \hat{f}^*)$ و جداساز از $C(G)$ است. از قضیه استون-وایرستراس حکم حاصل می‌شود.

(ب) $h \in C_c(G)$ را با شرط $\int h = 1$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $g = h^* * h$. در این صورت $\hat{g} = |\hat{h}|^2$ ، در واقع $\hat{g} \geq 0$ و $\hat{g}(1) = 1$. بنابراین همسایگی v از ۱ در $\hat{G}$ چنان موجود است که روی v ، $\hat{g} > 0$. K توسط تعداد متناهی از انتقال‌های v پوشیده می‌شود و می‌توان نوشت $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \xi_j v_j$. فرض کنیم $f = (\sum_{j=1}^n \xi_j)g$. در این صورت $\hat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^n \hat{g}(\xi_j^{-1}\xi)$ و بنابراین $\hat{f} > 0$ روی K و $\hat{f} \geq 0$.

□

اگر $\mu \in M(G)$ ، تبدیل فوریه اشتیلیس آن، تابع پیوسته و کراندار $\hat{\mu}$ روی $\hat{G}$ با تعریف $\hat{\mu}(\xi) = \int \xi(x) d\mu(x)$ در این حالت

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)(\xi) &= \int \int \overline{\xi(xy)} d\mu(x) d\nu(y) = \int \int \overline{\xi(x)} \overline{\xi(y)} d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \hat{\mu}(\xi) \hat{\nu}(\xi) \end{aligned}$$

برای $\mu \in M(\hat{G})$ تابع پیوسته و کراندار ϕ_μ روی G را به صورت $\phi_\mu(x) = \int \xi(x) d\mu(\xi)$ تعریف می‌کنیم.

گزاره ۷۲.۳. نگاشت $\mu \rightarrow \phi_\mu$ یک نگاشت انقباضی، خطی و یک‌به‌یک از $M(\hat{G})$ به $C_b(G)$ است.

برهان. تنها قسمت غیربدیهی، یک‌به‌یک بودن است. فرض کنید $\phi_\mu = 0$ ، در این صورت

$$0 = \int \int f(x) \xi(x) d\mu(\xi) dx = \int \hat{f}(\xi^{-1}) d\mu(\xi), \quad f \in L^1(G)$$

اما با توجه به اینکه $\{\hat{f} \mid f \in L^1(G)\}$ در $C_0(\hat{G})$ چگال است، نتیجه می‌شود $\mu = 0$. □

اگر $\mu \in M(\hat{G})$ مثبت باشد در این حالت می‌توان ϕ_μ را به صورت ترکیب خطی تعمیم‌یافته از مشخصه‌ها با ضرایب مثبت تعبیر کرد و بنابراین آن را یک تابع از نوع مثبت تلقی نمود. در واقع برای $f \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} \int \int f(x) \overline{f(y)} \phi_\mu(y^{-1}x) dx dy &= \int \int \int f(x) \overline{f(y)} \xi(y) \xi(x) d\mu(\xi) dx dy \\ &= \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu(\xi) \geq 0 \end{aligned}$$

عکس حکم بالا یکی از نتایج بنیادین در این نظریه است. در قضیه زیر از نمادگذاری‌های بالا استفاده شده است.

قضیه ۷۳.۳. (قضیه باختر)^۱ اگر $\phi \in \mathcal{P}(G)$ ، آنگاه اندازه یکتای مثبت $\mu \in M(\widehat{G})$ موجود است به طوری که $\phi = \phi_\mu$.

برهان. یکتایی از گزاره قبل نتیجه می‌شود. برای اثبات وجود، کافی است نشان دهیم $\phi \in \mathcal{P}(G)$ و $\phi(1) \leq 1$.

فرض کنید M_0 مجموعه همه اندازه‌های مثبت $\mu \in M(\widehat{G})$ ، با شرط $M(\widehat{G}) \leq 1$ باشد. M_0 در $M(\widehat{G})$ ضعیف ستاره فشرده است. اگر $\{\mu_\alpha\}$ یک تور در M_0 همگرا به μ باشد (در توپولوژی ضعیف-ستاره) برای هر $f \in L^1(G)$ داریم

$$\int f(x) \phi_{\mu_\alpha}(x) = \int \widehat{f}(\xi^{-1}) d\mu_\alpha(\xi) \longrightarrow \int \widehat{f}(\xi^{-1}) d\mu(\xi) = \int f(x) \phi_\mu(x) dx.$$

بنابراین در توپولوژی ضعیف ستاره، $\phi_{\mu_\alpha} \longrightarrow \phi_\mu$. بنابراین نگاشت $\mu \longrightarrow \phi_\mu$ از M_0 به $\mathcal{P}$ و برد آن یک زیرمجموعه محدب و فشرده است که شامل هر مشخصه $\xi \in \widehat{G}$ (کافی است μ را δ بگیریم) و صفر است. بنابر قضیه کراین-میلیم^۲ برد این نگاشت عبارت است از $\mathcal{P}_0 = \{\phi \in \mathcal{P} \mid 0 \leq \phi(1) \leq 1\}$. $\square$

نمادگذاری. قرار می‌دهیم $B(G) = \langle \mathcal{P}(G) \rangle$. بنابراین $B(G)$ شامل همه توابع به فرم $f * g$ برای $f, g \in C_c(G)$ است.

قضیه زیر را بدون برهان ارائه می‌کنیم و خواننده علاقه‌مند را به [۲۸] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۷۴.۳. (قضیه اول وارونگی فوریه)^۳ اگر $f \in B(G) \cap L^1(G)$ ، آنگاه $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ و اندازه هار $d\xi$ روی $\widehat{G}$ را می‌توان چنان برگزید که $d\mu_f(\xi) = \widehat{f}(\xi) d\xi$ و بنابراین $f(x) = \int \xi(x) \widehat{f}(\xi) d\xi$.

قضیه ۷۵.۳. (قضیه دوم وارونگی فوریه)^۴ اگر $f \in L^1(G)$ و $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ ، آنگاه

$$f(x) = (\widehat{\widehat{f}})(x^{-1})$$

1. Bochner theorem
2. Krein–Milman theorem
3. Fourier inversion theorem I
4. Fourier inversion theorem II

$$= \int \xi(x) \hat{f}(\xi) d\xi$$

اگر f پیوسته باشد، تساوی برای هر $x \in G$ برقرار است.

برهان. داریم $\hat{f} \in B^1(\hat{G})$ و $d\mu_{\hat{f}}(x) = f(x^{-1})dx$ زیرا

$$\hat{f}(\xi) = \int \overline{\xi(x)} f(x) dx = \int \xi(x) f(x^{-1}) dx.$$

بنابراین تقریباً برای هر $x \in G$ ، $f(x^{-1}) = (\hat{f})(x)$. اگر f پیوسته باشد، این تساوی در سرتاسر G برقرار است. $\square$

قضیه ۷۶.۳. (قضیه یکتایی فوریه)^۱ اگر μ و ν در $M(G)$ باشند و $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ ، آنگاه $\mu = \nu$. به‌طور خاص برای $f, g \in L^1(G)$ ، تساوی $\hat{f} = \hat{g}$ نتیجه می‌دهد $f = g$.

نتیجه ۷۷.۳. $L^1(G)$ و $M(G)$ جبرهای باناخ نیم‌ساده هستند.

قضیه ۷۸.۳. (قضیه پلانشرل)^۲ فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده آبلی باشد. در این صورت اندازه هار مناسب روی G و $\hat{G}$ را می‌توان به نحوی انتخاب کرد که برای هر $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ، $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. همچنین $\{f \mid f \in L^1(G) \cap L^2(G)\}$ در $L^2(\hat{G})$ چگال است. بنابراین نگاشت یکانی $\mathcal{F}: L^2(G) \rightarrow L^2(\hat{G})$ به نحوی موجود است که برای هر $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ، $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

برهان. فرض کنید $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ در این صورت $|f|^2 = (f^* * f^{\vee})$ و بنابراین

$$\int |f(x)|^2 dx = f * f^{\vee}(1) = \int (f^* * f^{\vee})(\xi) d\xi = \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

بنابراین $f \rightarrow \hat{f}$ یک نگاشت طولیا روی $L^1(G) \cap L^2(G)$ با نرم $L^2(G)$ است. بنابراین به شکل یکتا به $L^2(G)$ گسترش می‌یابد و برد آن کل $L^2(G)$ است. زیرا فرض کنید $\psi \in L^2(G)$ و ψ بر برد نگاشت فوق با ضرب داخلی $L^2(G)$ عمود باشد. در این صورت

$$\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G) \quad \circ = \int \overline{\psi(L_x f)} = \int \langle \xi, x \rangle \psi(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi$$

1. Fourier uniqueness theorem
2. Plancherel theorem

بنابراین $\psi \bar{f}$ به عنوان یک عضو از $\mu(\hat{G})$ صفر است و بنابر قضیه قبل (قسمت ب) ψ تقریباً همه جا صفر است. $\square$

نتیجه ۷۹.۳. (اتحاد پارسوال)^۱ برای هر f و g در $L^2(G)$

$$\int_G f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{g}(\chi)} d\chi.$$

مثال ۸۰.۳. فرض کنید $G = \mathbb{R}$ و $\hat{\mathbb{R}}$ به شکل $\{\chi_\gamma : \gamma \in \mathbb{R}\}$ پارامتری شده باشد، که در آن برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $\chi_\gamma(t) = e^{i\pi\gamma t}$ در این صورت می‌توان نوشت

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\pi\gamma t} dt, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

که در آن γ را با χ_γ جایگزین کرده‌ایم. در این صورت

$$\int_{\hat{\mathbb{R}}} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

بنابراین $\mathbb{R}$ و $\hat{\mathbb{R}}$ هر دو می‌توانند به اندازه لبگ مجهز شوند و اتحاد پارسوال برقرار است.

۷.۳ مهار ضعیف نمایش‌ها

فرض کنید A یک C^* -جبر باشد. مفهوم مهار ضعیف^۲ برای نمایش‌های A را معرفی می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در مورد قضایایی که در این بخش بدون برهان ارائه می‌شوند، [۲۰] پیشنهاد می‌شود.

تعریف ۸۱.۳. فرض کنید A یک C^* -جبر باشد. ایده‌آل I از A اولیه نامیده می‌شود، هرگاه برای یک نمایش تحویل‌ناپذیر π از A ، $I = \ker(\pi)$. خانواده $\text{Prim}(A)$ متشکل از تمام ایده‌آل‌های اولیه، فضای ایده‌آل اولیه از A نامیده می‌شود.

-
1. Parseval identity
 2. weak containment

$Prim(A)$ را می‌توان به توپولوژی هال-کرنل یا جیکوبسن مجهز کرد که به راحتی با تعریف عمل بستارگیری تعریف می‌شود. برای $\mathcal{I} \subseteq Prim(A)$ قرار دهید

$$\bar{\mathcal{I}} = \{P \in Prime(A) : \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I \subseteq P\}$$

در این انتساب نگاشت $\mathcal{I} \rightarrow \bar{\mathcal{I}}$ یک عملیات بستاری است و بنابراین توپولوژی یکتایی روی $Prim(A)$ وجود دارد به طوری که در آن، $\bar{\mathcal{I}}$ با بستار $\mathcal{I}$ برابر است.

تعریف ۸۲.۳. فرض کنید π یک نمایش $(*)$ -نمایش برای A باشد. ایده‌آل

$$Ker(\pi) = \{a \in A : \pi(a) = 0\}$$

هسته π نامیده می‌شود.

فرض کنید $\hat{A}$ نمایشگر مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی نمایش‌های تحویل‌ناپذیر A باشد. اگر π و σ دو نمایش هم‌ارز باشند در این صورت $ker(\pi) = ker(\sigma)$. بنابراین نگاشت

$$\begin{aligned} R : \hat{A} &\rightarrow Prim(A) \\ \pi &\rightarrow ker(\pi) \end{aligned}$$

خوش تعریف است.

تعریف ۸۳.۳. مجموعه $\hat{A}$ مجهز به توپولوژی برگشت هال-کرنل از $Prim(A)$ فضای دوگان A نامیده می‌شود.

بنابراین $U \subseteq \hat{A}$ باز است اگر و تنها اگر برای یک زیرمجموعه باز V از $Prim(A)$ داشته باشیم $U = k^{-1}(V)$. این توپولوژی از $\hat{A}$ ، توپولوژی فضای دوگان یا توپولوژی فل^۱ نامیده می‌شود.

تعریف ۸۴.۳. فرض کنید S و T دو زیرمجموعه از نمایش‌های A باشد. در این صورت S توسط T به طور ضعیف مهار شده نامیده و به صورت $S < T$ نمایش داده می‌شود، هرگاه $ker \tau \subseteq ker \sigma$ اگر $S = \{\pi\}$ تک عضوی باشد، برای راحتی می‌نویسیم $\pi < T$. می‌گوییم S و T به طور ضعیف معادل هستند و می‌نویسیم $S \sim T$ ، هرگاه $S < T$ و $T < S$.

1. Fell topology

برای یک نمایش دلخواه π از A ، محمل π مجموعه همه نمایش‌های σ در $\hat{A}$ است به طوری که $\sigma < \pi$.

اگر π یک نمایش از A روی $\mathcal{H}(\pi)$ باشد، در این صورت برای هر $\xi \in \mathcal{H}(\pi)$ ، تابع φ تعریف شده به صورت $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ ، یک تابع مثبت روی A مرتبط با π است. همچنین گوییم تابع خطی مثبت φ به مجموعه S از نمایش‌های A مرتبط است، هرگاه φ به یک $\pi \in S$ مرتبط باشد. شناسایی مفهوم مهار ضعیف برحسب تابع‌های مثبت دارای اهمیت است.

قضیه ۸۵.۳. فرض کنید $S \subseteq \hat{A}$ و $\pi \in \hat{A}$. در این صورت احکام زیر معادل هستند:

(الف) π به طور ضعیف توسط S مهار می‌شود.

(ب) هر تابع خطی مثبت ناصفر مرتبط با π ، حد ضعیف-ستاره از ترکیبات خطی متناهی از تابع‌های مثبت مرتبط با S است.

(ج) هر تابع خطی مثبت ناصفر متناظر با π ، حد ضعیف-ستاره از مجموع متناهی ψ از تابع‌های مثبت مرتبط با S است که در شرط $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$ صادق هستند.

فرض کنید π و تمام نمایش‌های S تحویل‌پذیر باشند. در این صورت قضیه فوق به شکل زیر قوی‌تر می‌شود.

قضیه ۸۶.۳. فرض کنید $S \subseteq \hat{A}$ و $\pi \in \hat{A}$. در این صورت احکام زیر معادل هستند:

(الف) π به طور ضعیف توسط S مهار می‌شود.

(ب) یک تابع مثبت ناصفر مرتبط با π ، حد ضعیف-ستاره از ترکیبات خطی متناهی از تابع‌های مثبت مرتبط با S است.

(ج) هر تابع مثبت ناصفر مرتبط با π ، حد ضعیف-ستاره از تابع‌های مثبت ψ مرتبط با S است به طوری که $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$.

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $\hat{G}$ نمایشگر مجموعه همه (کلاس‌های هم‌ارزی از) نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر G باشد. توپولوژی دوگان یا فل-توپولوژی روی $\hat{G}$ ، توپولوژی‌ای است که دوسویی $\widehat{C^*(G)} \rightarrow \hat{G}$ را به یک همسان‌ریختی تبدیل می‌کند. با این توپولوژی، فضای دوگان G نامیده می‌شود. مجموعه همه نمایش‌های $\pi \in \hat{G}$ به طوری که $\pi < \lambda_G$ ، دوگان کاهش یافته G نامیده و با $\hat{G}_r$ نمایش داده می‌شود. این مجموعه یک

مجموعه بسته از $\hat{G}$ است.

برای $f \in L^1(G)$ فرض کنید $\|\pi(f)\| = \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi \in \hat{G}\}$. از آنجا که همواره برای هر $\alpha \in \hat{G}$ داریم $\|\alpha(f)\| \leq \|f\|_1$ لذا $\|\alpha(f)\| \leq \|f\|_*$. علاوه بر این

$$\|f^* * f\|_* = \sup\{\|\pi(f)\|^2 : \pi \in \hat{G}\} = \|f\|_*^2$$

و همچنین

$$\|f^* * g\|_* \leq \|f\|_* \|g\|_*, \quad f, g \in L^1(G)$$

و

$$\|f^*\|_* = \|f\|_*$$

بنابراین $\|\cdot\|_*$ یک C^* -نرم روی $L^1(G)$ تعریف می‌کند. کامل‌سازی $(L^1(G), \|\cdot\|_*)$ $C^*(L^1(G))$ جبر گروهی G نامیده و با $C^*(G)$ نمایش داده می‌شود. تناظر دوسویی بین نمایش‌های $L^1(G)$ و $C^*(G)$ وجود دارد و تحت هم‌ارزی و تحویل‌ناپذیری پایاست. برای نمایش π در G ، $\pi(C^*(G))$ ، در توپولوژی حاصل از نرم، زیرجبر بسته $B(H(\pi))$ است. در واقع

$$\pi(C^*(G)) = \overline{\pi(L^1(G))} = \overline{\text{span}(\pi(G))}$$

که در آن بستار در نرم عملگری گرفته می‌شود.

نرم دیگری روی C^* -جبر باناخ $L^1(G)$ موجود است که در خاصیت C^* -نرم صادق است. برای نمایش منظم چپ گروه G با نماد λ_G ، و برای هر عضو $f \in L^1(G)$ ، قرار می‌دهیم $\|f\|_r = \|\lambda_G(f)\|$. کامل‌سازی $L^1(G)$ با این نرم، C^* -جبر گروهی کاهش‌یافته نامیده و با $C_r^*(G)$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنید N زیرگروه نرمال بسته G و همریختی $q: G \rightarrow G/N$ نگاشت خارج‌قسمتی

و

$$T_N: C^*(G) \rightarrow C^*(G/N),$$

همریختی کانونی القایی آن روی C^* -جبرهای متناظر باشد. در این صورت نگاشت $\pi \rightarrow \pi \circ q$ یک دوسویی بین نمایش‌های یکانی G/N و نمایش‌های یکانی G است به‌طوری‌که $\sigma(N) = \{I_{H_\sigma}\}$. به‌طور معادل $\sigma = \pi \circ q$ اگر و تنها اگر $\ker \sigma \supseteq \ker T_N$ است.

۸.۳ نمایش‌های گروه‌ها روی فضاها با باناخ

تعریف ۸۷.۳. یک نمایش برای گروه موضعاً فشرده G ، دوتایی (π, E) است به‌طوری‌که

۱. فضای E یک فضای باناخ باشد.

۲. نگاشت π ، یک همریختی از G به توی $\text{Iso}(E)$ ، مجموعه همه یکرختی‌های طولپای روی فضای E ، بوده که $\tau_G - \tau_{s.o.t}$ پیوسته است.

چنین نمایش‌هایی دارای ترفیع‌هایی به روی $L^1(G)$ و $M(G)$ هستند که به صورت

$$\begin{aligned}\pi(f) &= \int_G \pi(x) f(x) dx, \quad f \in L^1(G), \\ \pi(\mu) &= \int_G \pi(x) d\mu(x), \quad \mu \in M(G),\end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. اثر آن روی اعضای E نیز به صورت

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle &= \int_G f(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx, \quad \xi \in E, \eta \in E^*, \\ \langle \pi(\mu)\xi, \eta \rangle &= \int_G \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle d\mu(x), \quad \xi \in E, \eta \in E^*.\end{aligned}$$

است. این نمایش‌ها برای $L^1(G)$ و $M(G)$ یک همریختی جبری انقباضی^۱ هستند. نمایش به دست آمده برای $L^1(G)$ یک نمایش ناتبگون^۲ (ضروری^۳) است؛ به این معنا که $E = \overline{\pi(L^1(G))E}^{\|\cdot\|_E}$. همچنین، هر نمایش ضروری مانند (θ, F) برای $L^1(G)$ یک نمایش به روی گروه G به صورت زیر تولید می‌کند

$$\theta(x) = \tau_{s.o.t} - \lim_{i \in \mathbb{I}} \theta(xe_i), \quad x \in G.$$

که در آن $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ یک تقریبی کراندار برای $L^1(G)$ است. منظور از بعد یک نمایش (π, E) ، بعد فضای باناخ E است. مجموعه همه نمایش‌ها روی QSL_p - فضاها را با $\text{Rep}_p(G)$ نمایش می‌دهیم. در حالت $p = 2$ نمایش‌های بالا نمایش یکانی روی فضاهای هیلبرت خواهند بود. حائز اهمیت است که

1. contractive algebra homomorphism
2. non degenerate
3. essential representation

چون برای هر $q \in (1, \infty)$ به صورت

$$(3.3) \quad 1 < p \leq q \leq 2, \quad \text{یا} \quad 2 \leq q \leq p$$

هر QSL_q -فضای یک QSL_p -فضا است، در نتیجه برای هر q به صورت (۳.۳) داریم $\text{Rep}_2(G) \subseteq \text{Rep}_q(G) \subseteq \text{Rep}_p(G)$.

تعریف ۸۸.۳. فرض کنید (ρ, F) و (π, E) متعلق به $\text{Rep}_p(G)$ باشند. در این صورت

۱. گوییم نمایش‌های (π, E) و (ρ, F) هم ارز^۱ هستند، هرگاه نگاشت طولیا و وارون پذیر T وجود داشته باشد به طوری که

$$T : E \rightarrow F, \quad T \circ \pi(x)T^{-1} = \rho(x), \quad x \in G.$$

۲. گوییم نمایش (ρ, F) زیرنمایش^۲ (π, E) است، هرگاه F زیرفضای بسته از E باشد و داشته باشیم

$$\pi(x)|_F = \rho(x), \quad x \in G,$$

۳. گوییم نمایش (π, E) شامل (ρ, F) است و می‌نویسیم $(\rho, F) \subseteq (\pi, E)$ ، هرگاه (ρ, F) با زیرنمایشی از (π, E) هم‌ارز باشد.

۴. نمایش (π, E) را تحویل‌پذیر^۳ گوییم، هرگاه زیرفضای بسته غیربدیهی و سره F ($\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$) وجود داشته باشد به طوری که زیرفضای پایایی برای π باشد؛ یعنی برای $\pi(x)F \subseteq F, x \in G$ ، اگر چنین زیرفضایی وجود نداشته باشد، آنگاه نمایش (π, E) را تحویل‌ناپذیر^۴ می‌نامیم.

۵. نمایش (π, E) را دوری^۵ می‌نامیم، هرگاه عضو $\xi \in E$ موجود باشد به طوری که $\overline{\pi(L^1(G))\xi} = E$. مجموعه همه (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های دوری برای G به روی یک QSL_p -فضا را با $Cyc_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

-
1. equivalent
 2. subrepresentation
 3. reducible
 4. irreducible
 5. cyclic

۶. نمایش (π, E) را p -جامع^۱ می‌نامیم، هرگاه

$$(\rho, F) \subseteq (\pi, E), \quad (\rho, F) \in Cyc_p(G).$$

هر نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ یک زیرجبر بسته از جبر باناخ $\mathcal{B}(E)$ تعریف می‌کند که خود نیز یک جبر باناخ است. این جبر را با $PF_{p,\pi}(G)$ نشان می‌دهیم که به صورت

$$PF_{p,\pi}(G) = \overline{\{\pi(f) : f \in L^1(G)\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}(E)}}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۸۹.۳. زیرجبر $PF_{p,\pi}(G) \subseteq \mathcal{B}(E)$ را جبر p -شبه توابع متناظر با نمایش (π, E) ^۲ می‌نامیم. در حالتی که (π, E) یک نمایش p -جامع باشد آن را با $UPF_p(G)$ نشان داده و جبر جامع p -شبه توابع^۳ می‌نامیم. همچنین درحالتی که $(\pi, E) = (\lambda_p, L_p(G))$ آنگاه به جای نماد $PF_{p,\lambda_p}(G)$ از نماد $PF_p(G)$ استفاده می‌کنیم.

در حقیقت نگاشت زیر یک نیم نرم روی $L^1(G)$ است

$$\|\cdot\|_\pi : L^1(G) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad \|f\|_\pi = \|\pi(f)\|_{\mathcal{B}(E)}, \quad f \in L^1(G),$$

و اگر فضای پوچ آن را با N_π نشان دهیم، آنگاه کامل شده فضای خارج قسمتی $L^1(G)/N_\pi$ با این نیم نرم (که روی این فضا یک نرم است) همان فضای $PF_{p,\pi}(G)$ است. لازم به ذکر است که نگاشت زیر انقباضی با برد پوشا است

$$I_\pi : L^1(G) \rightarrow PF_{p,\pi}(G), \quad I_\pi(f) = \pi(f), \quad f \in L^1(G).$$

توجه کنید که فضای $PF_{p,\pi}(G)$ دارای یک تقریبی یکدار است؛ اما لزوماً یکدار نیست. در واقع برای یک تقریبی کراندار $(e_i)_{i \in \mathbb{I}} \subseteq L^1(G)$ بنابراین حقیقت که نگاشت I_π انقباضی با برد پوشا است، تور $(\pi(e_i))_{i \in \mathbb{I}}$ یک تقریبی کراندار برای $PF_{p,\pi}(G)$ است.

-
1. p -universal
 2. algebra of p -pseudo-functions associated with (π, E)
 3. universal algebra of p -pseudo-functions

حال دو نمایش معروف روی گروه G را برای $p \in (1, \infty)$ معرفی می‌کنیم. نمایش منظم چپ^۱ برای گروه G روی فضای $L_p(G)$ را با λ_p یا $\lambda_{G,p}$ نشان داده و در حالتی که $p = 2$ آن را با λ یا λ_G نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda_p : G \rightarrow \mathcal{B}(L_p(G)), \quad \lambda_p(x)f := x^{-1}f, \\ x^{-1}f \in L_p(G), \quad x^{-1}f(y) = f(x^{-1}y), \quad y \in G.$$

همچنین نمایش منظم راست^۲ برای گروه G روی فضای $L_p(G)$ را با ρ_p یا $\rho_{G,p}$ نشان داده و در حالتی که $p = 2$ آن را با ρ یا ρ_G نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho_p : G \rightarrow \mathcal{B}(L_p(G)), \quad \rho_p(x)f := \Delta(x)^{\frac{1}{p}} f_x, \\ \Delta(x)^{\frac{1}{p}} f_x \in L_p(G), \quad \Delta(x)^{\frac{1}{p}} f_x(y) = \Delta(x)^{\frac{1}{p}} f(yx), \quad y \in G.$$

۹.۳ جبرهای از نوع فوریه

در این بخش به معرفی جبرهای فوریه و تعمیم‌های آنها می‌پردازیم. تمامی این جبرها را با نام جبرهای از نوع فوریه معرفی می‌کنیم.

در زیربخش‌های ۱.۹.۳ و ۷.۹.۳ به معرفی جبرهای فوریه و فوریه‌اشتیلیس و ساختار تعمیم یافته آنها، یعنی p -صورت جبر فوریه‌اشتیلیس می‌پردازیم. در اینجا عمده مفاهیم برگرفته شده از [۲۸]، [۲۵] و [۴۰] هستند.

۱.۹.۳ جبرهای فوریه و فوریه‌اشتیلیس

در این بخش به توصیف جبرهای فوریه^۳ و فوریه‌اشتیلیس^۴ که در رساله دکتری پیر ایمارد^۵ در سال ۱۹۶۴ معرفی شدند، می‌پردازیم. مقدماتی از چرایی علاقمندی مان به این جبرهای در

1. left regular representation
2. right regular representation
3. Fourier
4. Fourier-Stieltjes
5. Piere Eymard

پیشگفتار آمده است. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این بخش جبر فوریه اشتیل‌یس $B(G)$ و زیرفضاهای $B_S(G)$ از آن که در آن S مجموعه‌ای از (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی G است، را معرفی و برخی نتایج اولیه را ارائه می‌کنیم. فرض کنید Σ نمایشگر مجموعه (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی پیوسته G باشد. برای $S \subseteq \Sigma$ و $\mu \subseteq M(G)$ ، قرار می‌دهیم

$$\|\mu\|_S = \sup \{ \|\pi(\mu)\| : \pi \in S \}$$

در این صورت انتساب $\mu \rightarrow \|\mu\|_S$ یک نیم‌نرم روی $M(G)$ است و برای μ و ν در $M(G)$ و $f \in L^1(G)$ و $x, y \in G$ داریم

$$\|\mu\|_S \leq \|\mu\|, \|\mu * \nu\|_S \leq \|\mu\|_S \|\nu\|_S \quad (4.3)$$

$$\|\mu^*\|_S = \|\mu\|_S, \|\mu * \mu^*\|_S = \|\mu^*\|_S^2 \quad (5.3)$$

$$\|L_x f\|_S = \|f\|_S, \|R_y f\|_S = \Delta(y^{-1}) \|f\|_S. \quad (6.3)$$

حال فرض کنید

$$N_S = \left\{ f \in L^1(G) \mid \pi(f) = 0, \pi \in S \right\}$$

در این صورت N_S یک $*$ -ایده‌آل بسته از $L^1(G)$ است و اگر $\dot{f} = f + N_S$ به $L^1(G)/N_S$ متعلق باشد، آنگاه $\|\dot{f}\|_S = \|f\|_S$ یک نرم روی $L^1(G)/N_S$ تعریف می‌کند. واضح است که $L^1(G)/N_S$ یک $*$ -نرم جبری است و در خاصیت $\|\dot{f}\|_S^2 = \|\dot{f} * \dot{f}^*\|_S$ صدق می‌کند. در ادامه، $C_S^*(G)$ نمایشگر کامل‌سازی $L^1(G)/N_S$ با این نرم است و برای $S = \Sigma$ از نماد $C^*(G)$ بهره می‌بریم.

لم ۹۰.۳. نگاشت $f \rightarrow \dot{f} = f + N_S$ از $L^1(G)$ به روی $L^1(G)/N_S$ به یک همریختی از $C^*(G)$ به روی $C_S^*(G)$ با هسته N_S گسترش می‌یابد.

برهان. از آنجاکه برای $f \in L^1(G)$ ، $\|\dot{f}\|_S = \|f\|_S \leq \|f\|_{C^*(G)}$ ، نگاشت $f \rightarrow \dot{f}$ به شکل یکتا به یک $*$ -همریختی $\phi : C^*(G) \rightarrow C_S^*(G)$ ، با خاصیت $\|\phi\| \leq 1$ گسترش می‌یابد. همچنین چون $\phi(L^1(G)) \subseteq \phi(C^*(G))$ و ϕ یک همریختی پیوسته بین C^* -جبرها با تصویر چگال پوشاست، بنابراین $\phi(C^*(G)) = C_S^*(G)$. $\square$

مثال ۹۱.۳. برای گروه موضعاً فشرده و آبلی G با گروه دوگان $\hat{G}$ و $S \subseteq \hat{G}$ به‌سادگی دیده می‌شود که $N_S = \{e\}$ اگر و تنها اگر S در $\hat{G}$ چگال باشد. همچنین در این حالت برای $f \in L^1(G)$ ، $\|f\|_S = \|\hat{f}\|_u$. در این حالت $C_S^*(G) = C^*(G) \cong C_0(\hat{G})$ ، در حالت کلی $C_S^*(G) \cong C_0(\bar{S})$ ، که در آن $\bar{S}$ نمایانگر بستار S است.

لم ۹۲.۳. برای $S \subseteq \Sigma$ و $u \in \mathcal{P}(G)$ ، احکام زیر معادل هستند.

(الف) $\pi_u < S$.

(ب) یک تابع خطی مثبت φ روی $C_S^*(G)$ موجود است به‌طوری که برای هر $f \in L^1(G)$ ،

$$\phi(f + N_S) = \int f(x)u(x)dx.$$

برهان. فرض کنید $u(x) = \langle \pi_u(x)\xi, \xi \rangle$ ، که در آن ξ یک بردار دوری برای π_u است. در این صورت شرط $\pi_u < S$ معادل است با اینکه برای هر $g \in N_S$ ، $\langle \pi_u(g)\xi, \xi \rangle = 0$. ادامه حکم با کمک لم قبل حاصل می‌شود. $\square$

در ادامه منظور از $\mathcal{P}_S(G)$ مجموعه توابعی است که در یکی از دو شرط لم (۹۲.۳) صدق می‌کنند.

لم ۹۳.۳. برای مجموعه‌های S و τ از نمایش‌های G ، احکام زیر معادل هستند:

(الف) $S < \tau$.

(ب) برای هر $\mu \in M(G)$ ، $\|\mu\|_S \leq \|\mu\|_\tau$ ،

(ج) برای هر $f \in L^1(G)$ ، $\|f\|_S \leq \|f\|_\tau$.

برهان. فرض کنید (ج) برقرار باشد و $x \in \mathcal{P}_S(G)$ در این صورت برای هر $f \in L^1(G)$ ،

$$\left| \int f(x)u(x)dx \right| \leq \|f\|_S u(e) \leq \|f\|_\tau u(e).$$

بنابراین u یک تابع مثبت معین روی $L^1(G)/N_\tau$ که به $C_\tau^*(u)$ گسترش می‌یابد، تعریف می‌کند. این نشان می‌دهد $u \in \mathcal{P}_S(G)$ و (الف) حاصل می‌شود. حال فرض کنید (الف) برقرار باشد و $N_\tau \subseteq N_S$ ، داریم

$$\|f\|_S = \inf \left\{ \|f + g\|_{C^*(G)}; g \in N(S) \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \|f + g\|_{C^*(G)}; g \in N(\tau) \right\} \\ = \|f\|_{\tau}.$$

حال با کمک این رابطه برای اثبات (ب) تلاش می‌کنیم. فرض کنید $\mu \in M(G)$ و $\{g_v\}_{v \in B}$ یک یکه تقریبی کراندار از توابع با محمل فشرده با نرم ۱ برای $L^1(G)$ باشد. قرار می‌دهیم $f_v = \mu * g_v$. در این صورت با توپولوژی ضعیف $\sigma(M(G), C_b(G))$ داریم $f_v \rightarrow \mu$. فرض کنید π یک نمایش یکانی دلخواه ξ, η در $\mathcal{H}_{\pi}$ باشند. در این صورت

$$\langle \pi(\mu)\xi, \eta \rangle = \int \langle \pi(\mu)\xi, \eta \rangle d\mu(x) = \lim_v \int_G \langle \pi(\mu)\xi, \eta \rangle f_v(x) dx \\ = \lim_v \langle \pi(f_v)\xi, \eta \rangle$$

بنابراین $\pi(f_v) \xrightarrow{w.o.t} \pi(\mu)$ در $B(\mathcal{H}_{\pi})$. و چون $\|\pi(f_v)\| \leq \|\pi(\mu)\|$ بنابراین

$$\|\pi(\mu)\| = \sup_{v \in B} \|\pi(f_v)\|.$$

از آنجا که $\mathcal{S} < \tau$ ، برای $\pi \in \mathcal{S}$ داریم

$$\|\pi(\mu)\| = \sup_{v \in B} \|\pi(f_v)\| \leq \sup_{v \in B} \|\pi(f_v)\|_{\mathcal{S}} \leq \sup_{v \in B} \|\pi(f_v)\|_{\tau} = \|\mu\|_{\tau}.$$

□

و حکم حاصل می‌شود.

لم ۹۴.۳. برای یک تابع دلخواه مانند u و یک خانواده از نمایش‌های یکانی G مانند $\mathcal{S}$ ، احکام زیر معادل هستند:

الف) u ترکیب خطی متناهی از توابع در $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(G)$ است.

ب) نمایش یکانی π از G که به‌طور ضعیف در $\mathcal{S}$ مهار شده است و بردارهای ξ و η در $\mathcal{H}(\pi)$ موجود هستند به‌طوری که برای هر $x \in G$ ، $u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$.

ج) u یک تابع کراندار و پیوسته است و

$$\sup_{f \in L^1(G), \|f\|_{\mathcal{S}} \leq 1} \left| \int f(x) u(x) dx \right| < \infty.$$

برهان. (الف $\leftarrow$ ب) از آنجا که هر تابع در $\mathcal{P}_S(S)$ به فرمی که در (ب) اعلام شده است، نمایش داده می‌شود، کافی است نشان دهیم، توابعی که در (ب) معرفی شده‌اند، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. فرض کنید π_1 و π_2 دو نمایش باشند که به‌طور ضعیف در S مهار شده‌اند و فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، ξ_j و η_j در $\mathcal{H}(\pi_j)$ بردار باشند. در این صورت $\pi_1 \oplus \pi_2$ به‌طور ضعیف در S مهار شده است و

$$\langle (\pi_1 \oplus \pi_2)(\xi_1 \oplus \xi_2), \eta_1 \oplus \eta_2 \rangle = \sum_{j=1}^2 \langle \pi_j(x) \xi_j, \eta_j \rangle.$$

(ب $\leftarrow$ ج) از آنجا که $\pi < S$ ، برای هر $f \in L^1(G)$

$$\left| \int f(x) u(x) dx \right| = |\langle \pi(f) \xi, \eta \rangle| \leq \|\pi(f)\| \|\xi\| \|\eta\| \leq \|f\|_S \|\xi\| \|\eta\|.$$

(ج $\leftarrow$ الف) شرط (ج) نتیجه می‌دهد که u یک تابع خطی کراندار روی $C_S^*(G)$ تعریف می‌کند، که می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی تابع‌های خطی مثبت روی $C_S^*(G)$ نوشته شود. بنابر لم (۹۲.۳) این تابع‌ها با توابع در $\mathcal{P}_S(G)$ در تناظر هستند. $\square$

تعریف ۹۵.۳. توابع معرفی شده در شرایط معادل لم قبل را با $B_S(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای $S = \Sigma(G)$ از نماد $B(G)$ به‌جای $B_{\Sigma(G)}(G)$ بهره می‌بریم. بنابراین $B(G)$ شامل همه ترکیبات خطی متناهی از توابع مثبت معین و لذا شامل همه توابع ضریب به فرم $\langle \pi(\cdot) \xi, \eta \rangle$ است که در آن $\pi \in \Sigma(G)$ و $\xi, \eta \in \mathcal{H}(\pi)$. بنابر لم قبل، $B(G)$ فضای باناخ دوگان $C^*(G)$ است، که طی رابطه

$$\langle f, u \rangle = \int_G f(x) u(x) dx, \quad f \in L^1(G), u \in B(G)$$

جفت‌سازی می‌شوند و نرم $B(G)$ با رابطه

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \int f(x) u(x) dx \right|; f \in L^1(G), \|f\|_{C^*} \leq 1 \right\}$$

داده می‌شود.

تذکر ۹۶.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و Σ_G مجموعه نمایش‌های یکانی آن باشد. در این صورت

(۱) برای هر $\mathcal{S} \subseteq \Sigma_G$ ، C^* -جبر $C_{\mathcal{S}}^*(G)$ به‌طور طولی با یک خارج‌قسمت از $C^*(G)$ یکریخت است و بنابراین $B_{\mathcal{S}}(G) \cong (C_{\mathcal{S}}^*(G))^*$ یک زیرفضای بسته از $B(G)$ است. بنابراین نرم u به‌عنوان عضوی از $C_{\mathcal{S}}^*(G)$ یا $C^*(G)$ برابر است. به‌طور خاص برای $u \in B_{\lambda}(G)$ داریم

$$\|u\| = \sup \left\{ \left| \int f(x)u(x)dx \right|; f \in C_c(G), \|\lambda_G(f)\| \leq 1 \right\}$$

(۲) اگر $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$ ، آنگاه u به‌عنوان عضوی از $B(G)$ تجزیه ژوردان به شکل زیر دارد.

$$u = u^+ - u^-, \quad u^+, u^- \in \mathcal{P}(G), \quad \|u\| = u^+(e) + u^-(e).$$

تجزیه ژوردان u به‌عنوان عضوی از $B_{\mathcal{S}}(G)$ به شکل

$$u = u_{\mathcal{S}}^+ - u_{\mathcal{S}}^-, \quad u_{\mathcal{S}}^+, u_{\mathcal{S}}^- \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(G), \quad \|u\| = u_{\mathcal{S}}^+(e) + u_{\mathcal{S}}^-(e)$$

نیز برقرار است. بنابر یکتایی تجزیه داریم $u_{\mathcal{S}}^+ = u^+$ و $u_{\mathcal{S}}^- = u^-$. به‌طور مشابه $|u|$ مستقل از انتخاب $\mathcal{S}$ است.

لم بعد نتیجه‌ای از مباحث بالاست.

لم ۹۷.۳. فرض کنید $u = \tilde{u}$ عضوی در $B(G)$ باشد. در این صورت توابع u^+ و u^- و $|u|$ حد یکنواخت از ترکیبات خطی متناهی از انتقال‌های راست u هستند.

دو لم که در ادامه می‌آیند توصیف‌های دیگری از نرم توابع در $B_{\mathcal{S}}(G)$ ارائه می‌کنند.

لم ۹۸.۳. فرض کنید $\mathcal{S} \subseteq \Sigma_G$ و $x \in B_{\mathcal{S}}(G)$ در این صورت

$$\|u\| = \sup_{\|\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j}\|_{\mathcal{S}} \leq 1} \left\{ \left| \sum_{j=1}^n c_j u(x_j) \right| : x_i \in G, c_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

برهان. فرض کنید $\mathcal{S} = \Sigma_G$ و A نمایشگر C^* -زیرجبر تولید شده توسط $\omega(G)$ در $C^{**}(G)$ باشد، که در آن ω ، نمایش جامع از G است. در این صورت براساس قضیه چگالی کاپلانسکی^۱، گوی واحد A در گوی واحد $C^{**}(G)$ با توپولوژی اولترا-ضعیف چگال است. این نتیجه می‌دهد که

$$\|u\| = \sup \{ |\langle T, u \rangle| : T \in C^{**}(G), \|T\| \leq 1 \}$$

1. Kaplansky's density theorem

$$\begin{aligned}
&= \sup\{|\langle \mathcal{S}, u \rangle| : \mathcal{S} \in A, \|\mathcal{S}\| \leq 1\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n c_j u(x_j)\right|\right\}
\end{aligned}$$

که در آن سوپریمم روی همه $x_1, \dots, x_n$ در G و $c_1, \dots, c_n$ در $\mathbb{C}$ با شرط مازاد روی اندازه‌های متناظر $1 \leq \|\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j}\|_{\mathcal{S}} \leq$ گرفته می‌شود. اما از قبل می‌دانیم $\|\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j}\|_{\mathcal{S}} = \|\sum c_j \delta_{x_j}\|_{\Sigma_G}$ $\square$

لم ۹۹.۳. فرض کنید $u \in B(G)$ و برای $x \in G$ ، $u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$. در این صورت $\|u\| \leq \|\xi\| \|\eta\|$. برعکس اگر $u \in B_{\mathcal{S}}(G)$ در این صورت نمایش π به‌طور ضعیف مهار شده در $\mathcal{S}$ و $\xi, \eta \in \mathcal{H}(\pi)$ چنان وجود دارد که

$$u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle, \quad x \in G, \quad \|u\| = \|\xi\| \|\eta\|.$$

برهان. درستی قسمت اول حکم واضح است. برای قسمت دوم فرض کنید ξ و η داده شده باشد. در این صورت برای هر $x \in G$

$$u(x) = \langle \omega(x), u \rangle = \langle \omega(x), V|u \rangle = \langle \omega(x)V, |u \rangle = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$$

با توجه به اینکه V یک طولپایی جزئی است و $\|V\| = 1$ ، بنابراین $\|\pi''(V)\| \leq 1$ و $\|\pi''(V)\eta\| = \|\xi\| \leq \|\eta\|$. لذا $\|u\| = \| |u| \| = \|u(e)\| = \|\eta\|^2 \geq \|\xi\| \|\eta\|$ $\square$

تذکر ۱۰۰.۳. نتایج زیر بلافاصله حاصل می‌شوند.

(۱) برای هر $u \in B(G)$ داریم $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|$. در واقع از آنجاکه

$$\|f\|_{C^*} \leq \|f\|_1, \quad f \in L^1(G)$$

داریم

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sup \left\{ \left| \int_G f(x) u(x) dx \right|; f \in L^1(G), \|f\|_{C^*} \leq 1 \right\} \\
&\geq \sup \left\{ \left| \int_G f(x) u(x) dx \right|; f \in L^1(G), \|f\|_1 \leq 1 \right\} \\
&= \|u\|_{\infty}
\end{aligned}$$

(۲) فرض کنید $u \in B(G)$ (به‌ترتیب $B_\lambda(G)$) $u \in B_\lambda(G)$. در این صورت $\tilde{u}$ ، $\bar{u}$ و $\tilde{\tilde{u}}$ هم به $B(G)$ (به‌ترتیب به $B_\lambda(G)$) تعلق دارند و

$$\|u\| = \|\tilde{u}\| = \|\bar{u}\| = \|\tilde{\tilde{u}}\|$$

قسمت اول به این دلیل که در $\mathcal{P}(G)$ (به‌ترتیب در $\mathcal{P}_\lambda(G)$) درست است، برقرار است. برای قسمت دوم فرض کنید

$$u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle, \quad \|u\| = \|\xi\| \|\eta\|$$

در این صورت

$$\tilde{u}(x) = \langle \pi(x)\eta, \xi \rangle, \quad \bar{u}(x) = \langle \eta, \pi(x)\xi \rangle$$

و بنابراین $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ و $\|\bar{u}\| \leq \|\eta\| \|\xi\| = \|u\|$ و چون $\tilde{\tilde{u}} = u = (\bar{\bar{u}})$ ، طرف دیگر نامساوی حاصل می‌شود. همچنین با توجه به اینکه $\tilde{u} = (\tilde{\tilde{u}})$ ، چهار نرم بالا برابر خواهند بود.

قضیه ۱۰۱.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت $B(G)$ با ضرب نقطه‌ای و نرم معرفی شده بالا یک جبر باناخ یک‌دار است، که جبر فوریه اشتیل‌یس نامیده می‌شود. همچنین $B_\lambda(G)$ ، $B(G)$ را به‌عنوان ایده‌آل بسته در بردارد.

برهان. فرض کنید u و v اعضای $B(G)$ باشند. در این صورت می‌توان آن‌ها را به‌صورت

$$u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle, \quad v(x) = \langle \pi'(x)\xi', \eta' \rangle$$

نمایش داد و $\|u\| = \|\xi\| \|\eta\|$ و $\|v\| = \|\xi'\| \|\eta'\|$. بنابراین

$$u(x)v(x) = \langle (\pi \otimes \pi')(x)(\xi \otimes \xi'), \eta \otimes \eta' \rangle$$

و لذا داریم $uv \in B(G)$. همچنین

$$\|uv\| \leq \|\xi \otimes \xi'\| \|\eta \otimes \eta'\| = \|\xi\| \|\eta\| \|\xi'\| \|\eta'\| = \|u\| \|v\|$$

در نهایت $B_\lambda(G)$ زیرفضای بسته $B(G)$ است. برای اینکه نشان دهیم $B_\lambda(G)$ ایده‌آل است، کافی است نشان دهیم $\mathcal{P}(G)\mathcal{P}_\lambda(G) \subseteq \mathcal{P}_\lambda(G)$ ، و این رابطه با توجه به اینکه $\pi \otimes \lambda \sim \lambda$ حاصل می‌شود. $\square$

تذکر ۱۰۲.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده آبلی و $\hat{G}$ گروه دوگان پونتر یاگین آن باشد. نشان می‌دهیم $B(\hat{G})$ به‌طور طولپا با جبر اندازه $M(G)$ یکرخت است. این یکرختی از تبدیل فوریه اشتیل‌یس $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ از $M(G)$ به $B(\hat{G})$ حاصل می‌شود. فرض کنید $u \in B(\hat{G})$. بنابراین قضیه باختر، $\mu \in M(G)$ چنان موجود است که

$$u(\chi) = \hat{\mu}(\chi) = \int_G \chi(x) d\mu(x), \quad \chi \in \hat{G}.$$

بنابراین با استفاده از فرمول وارونگی

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup \left\{ \left| \int_{\hat{G}} u(\chi) f(\chi) d\chi \right|; f \in C_C(\hat{G}), \|f\|_{C^*(\hat{G})} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_{\hat{G}} u(\chi) \hat{g}(\chi) d\chi \right|; g \in C_C(\hat{G}), \|g\|_u \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_G \left(\int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) \chi(x) d\mu(x) \right) d\mu(x) \right|; g \in C_C(G), \|g\|_u \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_G g(x) d\mu(x) \right|; g \in C_C(G), \|g\|_u = 1 \right\} \\ &= \|\mu\| \end{aligned}$$

۲.۹.۳ جبر فوریه، $A(G)$ ، فضای ایده‌آل ماکسیمال و فضای دوگان آن

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این بخش جبر فوریه روی G ، فضای ایده‌آل ماکسیمال و تبدیل گلفند آن به‌عنوان یک جبر باناخ را معرفی می‌کنیم. همچنین به فضای دوگان بسیار مهم آن نیز خواهیم پرداخت.

لم ۱۰۳.۳. فرض کنید $f, g \in L^1(G)$. در این صورت $f * \tilde{g} \in B_\lambda(G)$ و داریم $\|f * \tilde{g}\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

برهان. برای $x \in G$

$$f * \tilde{g}(x) = \int_G f(xy) \overline{g(y)} dy = \langle \lambda_G(x^{-1})f, g \rangle.$$

□

بنابراین u تابع ضریب نمایش منظم چپ است.

گزاره ۱۰۴.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده، C یک زیرمجموعه فشرده در G و U یک مجموعه باز در G با شرط $G \subseteq U$ باشد. در این صورت تابعی مانند u روی G وجود دارد که ترکیب خطی متناهی از توابع در $\mathcal{P}(G) \cap C_c(G)$ است و در شرط

$$0 \leq u \leq 1, \quad u|_C = 1, \quad u|_{G \setminus U} = 0$$

صدق می‌کند.

برهان. از آنجا که C یک مجموعه فشرده است، یک همسایگی متقارن V از e (همانی G) یافت می‌شود که $CV^2 \subseteq U$ فرض کنید

$$u(x) = \frac{1}{|V|} 1_{CV} * 1_V(x) = \frac{1}{|V|} |xV \cap CV|, \quad x \in G.$$

که در آن منظور از تابع 1_W تابع مشخصه مجموعه W است. در این صورت برای هر $x \in G$ ، $0 \leq u(x) \leq 1$. حال اگر $x \in C$ آنگاه $|xV \cap CV| = |xV| = |V|$ و بنابراین $u(x) = 1$. در حالتی که $x \notin CV^2$ آنگاه $u(x) = 0$. در واقع $\text{supp } u \subseteq CV^2$ که یک مجموعه فشرده است.

در پایان با توجه به اتحاد قطبی برای هر $f, g \in L^2(G)$

$$\begin{aligned} 4(f * g^*) &= (f + g) * (f + g)^* - (f - g) * (f - g)^* \\ &\quad + i(f + ig) * (f + ig)^* - i(f - ig) * (f - ig)^* \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که x ترکیب خطی توابعی به فرم $h * h^*$ است که در آن $h \in L^2(G)$ و با محمل فشرده است. بنابراین $h * h^* \in \mathcal{P}(G) \cap C_c(G)$. $\square$

گزاره ۱۰۵.۳. برای $1 \leq j \leq 10$ زیرمجموعه M_j از $B(G)$ را به شکل زیر تعریف کنید

$$M_1 = \{f * \tilde{g} : f, g \in C_c(G)\} \quad (۱)$$

$$M_2 = \{h * \tilde{h} : h \in C_c(G)\} \quad (۲)$$

$$M_3 = \{f * \tilde{g} : f, g \text{ با محمل فشرده} \in L^\infty(G)\} \quad (۳)$$

$$M_4 = \{h * \tilde{h} : h \text{ با محمل فشرده} \in L^\infty(G)\} \quad (۴)$$

$$M_5 = B(G) \cap C_c(G) \quad (۵)$$

$$M_{\mathcal{C}} = \mathcal{P}(G) \cap C_c(G) \quad (۶)$$

$$M_{\vee} = \{u \in \mathcal{P}(G) : \Delta^{-\frac{1}{2}}u \in L^{\vee}(G)\} \quad (۷)$$

$$M_{\wedge} = \mathcal{P}(G) \cap L^{\vee}(G) \quad (۸)$$

$$M_{\mathfrak{A}} = \{h * \tilde{h} : h \in L^{\vee}(G)\} \quad (۹)$$

$$M_{\mathfrak{A}_0} = \{f * \tilde{g} : f, g \in L^{\vee}(G)\} \quad (۱۰)$$

اگر E_j ، نمایشگر فضای برداری تولید شده توسط M_j برای $1 \leq j \leq 10$ باشد، در این صورت

$$E_1 = E_2 \subseteq E_3 = E_4 \subseteq E_5 = E_6 \subseteq E_7 \subseteq E_8 \subseteq E_9 = E_{10} \subseteq B_{\lambda}(G),$$

و تمامی زیرفضاها در $B_{\lambda}(G)$ دارای بستار یکسانی هستند که با $A(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین $A(G)$ در $B(G)$ ایده‌آل است.

برهان. تساوی‌های $E_1 = E_2$ ، $E_3 = E_4$ و $E_9 = E_{10}$ از اتحاد قطبی حاصل می‌شود. شمول $E_2 \subseteq E_3$ و $E_4 \subseteq E_5$ واضح هستند.

برای اثبات $E_5 \subseteq E_6$ ، فرض کنید $v \in B(G) \cap C_c(G)$ و $v = v_1 - v_2 + i(v_3 - v_4)$ که در آن برای $1 \leq k \leq 4$ ، $v_k \in \mathcal{P}(G)$. بنابر گزاره (۱۰۴.۳) تابع u به فرم $u = \sum_{j=1}^n c_j u_j$ برای $c_j \in \mathbb{C}$ و $u_j \in \mathcal{P}(G) \cap C_c(G)$ وجود دارد که u روی محمل v برابر با ۱ است. در این صورت $u = uv = \sum_{j=1}^n c_j u_j (v_1 - v_2 + i(v_3 - v_4))$ که نتیجه می‌دهد $v \in E_6$. برای بررسی شمول $E_7 \subseteq E_8$ به [۳۳] مراجعه کنید و همچنین شمول $E_8 \subseteq E_9$ از این واقعیت حاصل می‌شود که هر $u \in \mathcal{P}(G) \cap L^{\vee}(G)$ به صورت $u = f * \tilde{f}$ برای یک $f \in L^{\vee}(G)$ نوشته می‌شود. [۲۰].

برای اینکه نشان دهیم همگی این فضاها دارای بستار یکسانی در $B_{\lambda}(G)$ هستند، نشان می‌دهیم E_1 در E_{10} چگال است. به این منظور فرض کنید $f, g \in L^{\vee}(G)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده است. در این صورت توابع $h, k \in C_c(G)$ چنان موجودند که $\|f - h\|_2 < \varepsilon$ و $\|g - k\|_2 < \varepsilon$. حال از لم (۱۰۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} \|f * \tilde{g} - h * \tilde{k}\|_{B(G)} &= \|(f - h) * \tilde{g} + h * (\tilde{g} - \tilde{k})\|_{B(G)} \\ &\leq \|(f - h) * \tilde{g}\|_{B(G)} + \|h * (\tilde{g} - \tilde{k})\|_{B(G)} \\ &\leq \|f - h\|_2 \|\tilde{g}\|_2 + \|h\|_2 \|g - k\|_2 \\ &\leq \varepsilon (\|g\|_2 + \|f\|_2 + \varepsilon). \end{aligned}$$

□

بنابراین $M_{\mathfrak{A}_0} \subseteq \overline{M_1}$ و بنابراین $E_{10} \subseteq \overline{E_1}$.

تعریف ۱۰۶.۳. $A(G)$ معرفی شده در گزاره قبل، جبر فوریه روی گروه موضعاً فشرده G نامیده می‌شود.

نتیجه ۱۰۷.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد.

الف) هر $u \in A(G)$ ، در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند ($A(G) \subseteq C_0(G)$).

ب) $A(G)$ ، با نرم یکنواخت در $C_0(G)$ چگال است.

برهان. الف) حکم با توجه به رابطه $\|u\|_u \leq \|u\|$ برای هر $u \in A(G)$ و چگال بودن فضای $B(G) \cap C_c(G) = A(G) \cap C_c(G)$ حاصل می‌شود. ب) $A(G) \cap C_c(G)$ یک زیرجبر خودالحاق از $C_0(G)$ است که با توجه به گزاره (۱۰۴.۳)، نقاط G را جدا می‌کند. حال بنابر قضیه استون-وایرستراس می‌توان نتیجه گرفت، اشتراک $A(G)$ و $C_c(G)$ در $C_0(G)$ چگال است. $\square$

لم ۱۰۸.۳. فرض کنید $u \in A(G)$ و $x, y \in G$. در این صورت توابع $\bar{u}, R_y u, L_x u$ و $\tilde{u}$ به $A(G)$ تعلق دارند.

برهان. با توجه به اینکه این حکم در $B(G) \cap C_c(G)$ برقرار و اعمال نرم پیوسته هستند، حکم حاصل می‌شود. $\square$

در ادامه فضای ایده‌آل ماکسیمال $A(G)$ را معرفی کنیم.

لم ۱۰۹.۳. فرض کنید $a \in G$ ، $f \in A(G)$ و $f(a) = 0$. در این صورت برای $\varepsilon > 0$ داده شده تابع $h \in A(G) \cap C_c(G)$ که در یک همسایگی a صفر می‌شود، وجود دارد که $\|h - f\|_{A(G)} < \varepsilon$.

برهان. با توجه به اینکه $A(G) \cap C_c(G)$ در $A(G)$ چگال است، بدون خلل به کلیت می‌توان فرض کرد $f \neq 0$ و f دارای محمل فشرده است و $\|f\|_\infty < 1$ و $\varepsilon < 1$. قرار می‌دهیم

$$W = \{y \in G \mid \|f - R_y f\|_{A(G)} < \varepsilon\}$$

در این صورت W یک همسایگی با بستار فشرده از e در G است. همسایگی V از e را به گونه‌ای برمی‌گزینیم که $V \subseteq W$ و $\sup\{|f(ay)| \mid y \in V\} < \varepsilon$. با توجه به منظم بودن اندازه‌ها، همسایگی با بستار فشرده U از e موجود است به طوری که $U \subseteq V$ و $|U| \geq |V|(1 - \varepsilon)$. حال

تعریف می‌کنیم $g = \iota_a V f$ ، $u = \frac{1}{|U|} \iota_U$ و $h = (f - g) * \check{u}$ در $A(G)$. در این صورت h با محمل فشرده است و در یک همسایگی a صفر می‌شود. همچنین

$$\|u\|_2 = \frac{1}{|u|} \leq |V|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|g\|_2 \leq \varepsilon |V|^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{و } \|f - f * \check{u}\|_{A(G)} = \sup_{y \in U} \|f - R_y f\|_{A(G)} < \varepsilon$$

$$\|f - h\| < \|f - f * \check{u}\| + \|g\|_2 \|\check{u}\|_2 < \varepsilon + \varepsilon \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

قضیه ۱۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. برای هر $x \in G$ ، قرار می‌دهیم

$$\varphi_x : A(G) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad u \longrightarrow u(x).$$

در این صورت نگاشت $x \longrightarrow \varphi_x$ یک همسان‌ریختی از G به روی $\Delta(A(G))$ (فضای ایده‌آل ماکسیمال $A(G)$) است. علاوه بر این $A(G)$ یک جبر باناخ منظم است.

برهان. واضح است که φ_x به $\Delta(A(G))$ تعلق دارد و نگاشت $x \longrightarrow \varphi_x$ یک به یک است. حال فرض کنید $\varphi \in \Delta(A(G))$ داده شده باشد و فرض کنید برای هر $x \in G$ ، $\varphi \neq \varphi_x$. در این صورت برای هر $x \in G$ تابع f_x در $A(G)$ وجود دارد که $\varphi(f_x) = 1$ و $\varphi_x(f_x) = 0$. بنابر لم (۱۰۹.۳) هر g که در x صفر شود، حد یک دنباله مانند (g_n) در $A(G)$ است که هر g_n در یک همسایگی از x صفر می‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد f_x در یک همسایگی از x صفر می‌شود.

از آنجا که $A(G) \cap C_c(G)$ در $A(G)$ چگال است، $f_\circ$ در $C_c(G) \cap A(G)$ یافت می‌شود، به طوری که $\varphi(f_\circ) = 1$. نقاط $x_1, \dots, x_n$ را در محمل $f_\circ$ طوری انتخاب می‌کنیم که $\text{supp } f_\circ \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{x_j}$. قرار می‌دهیم $f = f_\circ f_{x_1} \cdots f_{x_n} \in A(G)$. در این صورت برای هر $x \in G$ داریم $f(x) = 0$. در حالی که $\varphi(f) = \varphi(f_\circ) \prod_{j=1}^n \varphi(f_{x_j}) = 1$ و این تناقض نشان می‌دهد $\varphi = \varphi_x$.

حال از آنجا که زیرجبر $A(G)$ در $C_\circ(G)$ با نرم یکنواخت چگال است، توپولوژی G با توپولوژی ضعیف حاصل از توابع $x \longrightarrow f(x) = \varphi_x(f)$ برای $f \in A(G)$ معادل است. بنابراین $x \longrightarrow \varphi_x$ یک همسان‌ریختی است.

□

گزاره (۱۰۴.۳) نشان می‌دهد که $A(G)$ منظم است.

قضیه بالا نشان می‌دهد $A(G)$ یک جبر باناخ جابجایی نیم‌ساده است. جبر فون نویمان گروهی $VN(G)$ یک جبر عملگری است که به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. فضای $L^2(G)$ را به عنوان فضای هیلبرت توابع مربع انتگرال‌پذیر روی G در نظر بگیرید. هر عنصر $g \in G$ یک عملگر انتقال چپ $\lambda(g)$ روی $L^2(G)$ تعریف می‌کند. به عبارتی

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad \text{برای هر } \xi \in L^2(G) \text{ و } h \in G.$$

جبر فون نویمان گروهی $VN(G)$ به عنوان بستار نرم عملگری جبر تولیدشده توسط تمام عملگرهای $\lambda(g)$ در فضای $B(L^2(G))$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر

$$VN(G) = \overline{\text{span}\{\lambda(g) \mid g \in G\}}^{w*},$$

که در آن $B(L^2(G))$ مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار روی $L^2(G)$ است. به‌خاطر می‌آوریم اگر G یک گروه موضعاً فشرده آبلی با گروه پونتریاگین $\hat{G}$ باشد، در این صورت $VN(G) = L^\infty(\hat{G})$ و $A(G)^* = L^1(\hat{G})^* = L^\infty(\hat{G})$. در ادامه می‌بینیم برای هر گروه موضعاً فشرده دلخواه، $VN(G)$ فضای دوگان $A(G)$ است.

۳.۹.۳ معرفی فضای دوگان جبر فوریه؛ $VN(G)$

در این فصل به معرفی فضای باناخ دوگان $A(G)$ خواهیم پرداخت و در انتها نشان خواهیم داد که این فضا یک جبر باناخ و بیش از آن یک جبر فون-نویمان (زیر جبر ضعیف-ستاره بسته یکدار یک $B(H)$) است.

قضیه ۱۱۱.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. برای هر $\varphi \in A(G)^*$ ، عملگر یکتای $T_\varphi \in VN(G)$ موجود است به‌طوری که برای هر $f, g \in L^2(G)$

$$\langle T_\varphi(f), g \rangle = \langle \varphi, \bar{g} * \check{f} \rangle = \langle \varphi, (f * \bar{g})^\sim \rangle.$$

نگاشت $\varphi \rightarrow T_\varphi$ از $A(G)^*$ به $VN(G)$ یک طولپای خطی و پوشا است و خواص زیر را دارد.

الف) اگر $u = \sum_{j=1}^{\infty} (g_j * \check{f}_j)$ ، که در آن g_j و f_j به $L^2(G)$ متعلق هستند و $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_2 \|g_j\|_2 < \infty$ ، آنگاه $\langle \varphi, u \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_\varphi(f_j), \bar{g}_j \rangle$.

ب) اگر $\mu \in M(G)$ و φ_μ عضوی در $A(G)^*$ باشد که توسط

$$\langle \varphi_\mu, u \rangle = \int_G u(x) d\mu(x), \quad u \in A(G)$$

تعریف می‌شود، آنگاه $T_{\varphi_\mu} = \lambda_G(\mu)$.

ج) نگاشت انتساب $T_\varphi : \varphi \rightarrow$ یک همسان‌ریختی از $(A(G)^*, w^*)$ به $VN(G)$ با توپولوژی اولترا-ضعیف است.

برهان. اگر $\varphi \in A(G)^*$ ، آنگاه برای هر $f, g \in L^\vee(G)$

$$|\langle \varphi, \bar{g} * \check{f} \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\bar{g} * \check{f}\|_{A(G)} \leq \|\varphi\| \cdot \|g\|_2 \|f\|_2.$$

بنابراین، برای هر $f \in L^\vee(G)$ ، انتساب $\varphi \rightarrow \langle \varphi, \bar{g} * \check{f} \rangle$ یک نگاشت مزدوج خطی روی $L^\vee(G)$ تعریف می‌کند. بنابراین f_φ چنان یافت می‌شود که

$$\langle \varphi, \bar{g} * \check{f} \rangle = \langle f_\varphi, g \rangle, \quad g \in L^\vee(G).$$

تعریف می‌کنیم $T_\varphi : L^\vee(G) \rightarrow L^\vee(G)$ در این صورت T_φ خطی است و

$$\|T_\varphi(f)\| \leq \|\varphi\| \|f\|_2.$$

بنابراین $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|$. برای هر $f, g \in L^\vee(G)$ و $h \in L^\vee(G)$

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi(\lambda_G(h)f), g \rangle &= \langle T_\varphi(f * h), g \rangle = \langle \varphi, \bar{g} * (f * h)^\vee \rangle \\ &= \langle \varphi, \bar{g} * \check{h} * \check{f} \rangle = \langle \varphi, \overline{g * h^*} * \check{f} \rangle \\ &= \langle T_\varphi(f), g * h^* \rangle = \langle T_\varphi(f), \lambda_G(h)^* g \rangle \\ &= \langle \lambda_G(h) T_\varphi(f), g \rangle \end{aligned}$$

بنابراین T_φ با عملگرهای وابسته به نمایش منظم راست جابه‌جا می‌شود و این یعنی $T_\varphi \in VN(G)$. اگر u مانند (الف) تعریف شده باشد، سری $\sum_{j=1}^\infty (g_j * \check{f}_j)$ به‌طور مطلق همگراست و بنابراین

$$\langle \varphi, u \rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle \varphi, g_j * \check{f}_j \rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle T_\varphi(f_j), \bar{g}_j \rangle$$

و

$$|\langle \varphi, u \rangle| \leq \|T_\varphi\| \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\| \|g_j\|.$$

بنابراین $|\langle \varphi, u \rangle| \leq \|T_\varphi\| \|u\|$ بنابراین $\varphi \rightarrow T_\varphi$ طولیایی است.

پیوستگی ذکر شده در قسمت (ج) هم از همین روابط حاصل می‌شود.
اگر $\mu \in M(G)$ ، آنگاه برای هر $f, g \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} \langle T_{\varphi_\mu}(f), g \rangle &= \langle \varphi_\mu, \bar{g} * \check{f} \rangle = \int_G \int_G \overline{g(xy)} f(y) dy d\mu(x) \\ &= \int_G \int_G \overline{g(y)} f(x^{-1}y) d\mu(x) dy \\ &= \int_G (\mu * f)(y) \overline{g(y)} dy \\ &= \langle \lambda_G(\mu) f, g \rangle. \end{aligned}$$

و این قسمت (ب) را ثابت می‌کند.

حال باید نشان دهیم هر $T \in VN(G)$ ، برای یک $\varphi \in A(G)^*$ به فرم T_φ است. در ابتدا توجه می‌کنیم برای $f, g \in C_c(G)$ تابع $f, g \in C_c(G)$ تابع $T(u) = T(f * \check{g}) = T(f) * \check{g}$ پیوسته است. بنابراین، برای $u \in E_1$ می‌توان قرار داد $\langle \varphi_T, u \rangle = T(\check{u})(e)$ و این تعریف به نمایش u وابسته نیست. برای نشان دادن اینکه φ_T یک تابع خطی کراندار روی E_1 است، بنابر قضیه چگالی کاپلانسکی تور $(h_\alpha)_\alpha$ در $C_c(G)$ موجود است به‌طوری که برای هر α ، $\|\lambda_G(h_\alpha)\| \leq \|T\|$ و

$$\forall g \in L^1(G), \quad \|Tg - \lambda_G(h_\alpha)g\| \rightarrow 0.$$

برای u به فرم $u = \sum_{j=1}^n f_j * g_j^*$ که در آن $f_j, g_j \in C_c(G)$ ، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \langle \varphi_T, u \rangle &= T(u)e = \sum_{j=1}^n \langle T f_j, g_j \rangle = \lim_{\alpha} \sum_{j=1}^n \langle \lambda_G(h_\alpha) f_j, g_j \rangle \\ &= \lim_{\alpha} \langle \varphi_{\lambda_G(h_\alpha)}, u \rangle \end{aligned}$$

و بنابراین $|\langle \varphi_T, u \rangle| \leq \|u\| \|T\|$. از آنجا که E_1 در $A(G)$ چگال است، φ_T به شکل یکتا به یک تابع خطی و پیوسته روی $A(G)$ گسترش می‌یابد و

$$\begin{aligned} \langle T_{\varphi_T}(f), g \rangle &= \langle \varphi_T, \bar{g} * \check{f} \rangle = \langle \varphi_T, (f * \bar{g})^* \rangle = T(f * \bar{g})(e) \\ &= (T(f) * \bar{g})(e) = \langle T(f), g \rangle \end{aligned}$$

□

و بنابراین $T_{\varphi_T} = T$.

در ادامه در یک حالت خاص $VN(G)$ را بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید G یک گروه باشد و $\ell^2(G) = \mathcal{H}$. به عبارتی $\mathcal{H}$ شامل همه توابع $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که $f(a) = 0$ به جز تعداد متناهی $a \in G$ و $\sum_{a \in G} |f(a)|^2 < \infty$. $\ell^2(G)$ جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر G شمارا باشد. برای $a \in G$ ، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} R_a : \ell^2(G) &\longrightarrow \ell^2(G) & L_a : \ell^2(G) &\longrightarrow \ell^2(G) \\ R_a f(x) &= f(xa) & L_a f(x) &= f(a^{-1}x). \end{aligned}$$

به سادگی دیده می‌شود که R_a و L_a طولپایی‌هایی روی $\ell^2(G)$ هستند و $R_a R_b = R_{ab}$ و $L_a L_b = L_{ab}$. بنابراین R_a و L_a عملگرهای یکانی هستند و $R_a^* = R_{a^{-1}}$ و $L_a^* = L_{a^{-1}}$. در واقع نگاشت $a \rightarrow R_a$ و $a \rightarrow L_a$ نمایش‌های یکانی گروه G هستند.

جبرهای فون نویمان $R(G) = \langle \{R_a | a \in G\} \rangle^{-w*}$ و $L(G) = \langle \{L_a | a \in G\} \rangle^{-w*}$ در $B(L^2(G))$ را در نظر بگیرید. همان $VN(G)$ معرفی شده در صفحات قبل است. می‌دانیم توپولوژی ضعیف-ستاره $B(\ell^2(G))$ القائی از $B(\ell^2(G))$ ، فضای عملگرهای از کلاس رد^۱، بر توپولوژی اولترا-ضعیف روی آن منطبق است.

در ادامه به معرفی بیشتر این جبرها می‌پردازیم. اگر e عنصر همانی G باشد، آنگاه δ_e بردار دوری برای $R(G)$ و $L(G)$ است. به این معنا که $L(G) = \overline{\langle L_a(\delta_e) \rangle}$ و $R(G) = \overline{\langle R_a(\delta_e) \rangle}$.

گزاره ۱۱۲.۳. فرض کنید $T \in R(G)'$. در این صورت تابع یکتای $f \in L^2(G)$ یافت می‌شود به طوری که $Th = f * h$ ($h \in L^2(G)$). به طور مشابه اگر $S \in f(G)'$ ، آنگاه $g \in L^2(G)$ به طور یکتا یافت می‌شود که $Sh = h * g$ ($h \in L^2(G)$).

1. Trace class operators

برهان. قسمت اول را نشان می‌دهیم و قسمت دوم مشابه است. فرض کنید $e \in G$ عنصر همانی گروه باشد. قرار می‌دهیم $f = T(\delta_e)$. در این صورت نگاشت $T \rightarrow T(\delta_e)$ یک نگاشت خطی از $R(G)'$ به $L^\vee(G)$ است. اگر $a \in G$

$$T(\delta_a) = TR_{a^{-1}}\delta_e = R_{a^{-1}}f = f * \delta_a.$$

اگر D فضای خطی تولید شده توسط $\{\delta_a | a \in G\}$ باشد، داریم

$$\forall k \in D, \quad Tk = f * k$$

اما هر $h \in L^\vee(G)$ حد در نرم $\|\cdot\|_\vee$ توابعی مانند $\{k_n\}$ در D است. بنابراین

$$\|Th - f * k_n\|_\vee = \|Th - T(k_n)\| \rightarrow 0.$$

به عبارتی برای هر $x \in G$ ، $Tk(x) = \lim f * k_n(x)$ ، اما $f * h$ و $f * k_n \in L^\infty(G)$

$$\|f * h - f * k_n\|_\infty \leq \|f\|_\vee \|h - k_n\|_\vee \rightarrow 0.$$

بنابراین برای هر $x \in G$ ، $(Th)(x) = f * h(x)$. یکتایی نیز از دوری بودن δ_e حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۱۱۳.۳. برای هر گروه G ، $L(G) = R(G)'$ و $R(G) = L(G)'$.

برهان. بنابر قضیه جابجا گر مکرر^۱ کافی است یکی از تساوی‌ها را نشان دهیم. واضح است که $L(G) \subseteq R(G)'$. فرض کنید $T \in R(G)'$ و $S \in L(G)'$. در این صورت کافی است نشان دهیم $TS = ST$. اما بنابر قضیه قبل f و g چنان موجودند که برای هر $h \in L^\vee(G)$ ، $S(h) = h * g$ و $Th = f * h$ در نتیجه

$$T(Sh) = T(h * g) = f * h * g = (f * h) * g = ST(h).$$

$\square$

ویژگی‌ها و احکام دیگر در مورد این جبرها را می‌توانید در [۲۵] ملاحظه کنید.

۴.۹.۳ خواص افکنشی جبر فوریه اشتیلیس و جبر فوریه روی گروه موضعاً فشرده

با توجه به اهمیت خواص افکنشی جبرهای از نوع فوریه در این کتاب، در این فصل به بررسی این خواص روی جبرهای فوریه کلاسیک که توسط ایمارد معرفی شده است، می‌پردازیم. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده و $\varphi: H \rightarrow G$ یک همریختی پیوسته باشد. اگر π یک نمایش یکانی از G باشد، آنگاه $\pi \circ \varphi$ یک نمایش یکانی از H روی همان فضای هیلبرت است. اگر u تابعی مثبت معین و متناظر با π باشد، به این معنا که، برای یک $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ و $x \in G$ آنگاه $u(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle$ ، $u \circ \varphi(y) = \langle \pi \circ \varphi(y)\xi, \xi \rangle$ یک تابع مثبت معین روی H متناظر با $\pi \circ \varphi$ است. همچنین، اگر S یک مجموعه از کلاس‌های هم‌ارزی از نمایش‌های G باشد، آنگاه منظور از $\varphi \circ S$ کلاس‌های هم‌ارزی نمایش‌های $\pi \circ \varphi$ ، برای $\pi \in S$ است. توجه داریم که اگر π و π' نمایش‌هایی هم‌ارز از G باشند، آنگاه $\pi \circ \varphi$ و $\pi' \circ \varphi$ نیز هم‌ارز هستند.

قضیه ۱۱۴.۳. فرض کنید φ یک همریختی پیوسته از گروه موضعاً فشرده H به گروه موضعاً فشرده G باشد. در این صورت

الف) نگاشت $u \rightarrow u \circ \varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ یک همریختی نرم کاهشی از $B(G)$ به $B(H)$ است و برای هر S ، $j(\mathcal{P}_S(G)) \subseteq \mathcal{P}_{S \circ \varphi}(H)$ و $j(B_S(G)) \subseteq B_{S \circ \varphi}(H)$.

ب) فرض کنید $\varphi(H)$ در G چگال باشد، در این صورت j طولپایی است و

$$j(B(G)) = B(H) \cap j(C(G)) = B_{\Sigma(H) \circ \varphi}(H) \cap j(C(G)).$$

علاوه بر این، اگر $u = \tilde{u} \in B(G)$ آنگاه

$$(u \circ \varphi)^+ = u^+ \circ \varphi, \quad (u \circ \varphi)^- = u^- \circ \varphi.$$

ج) فرض کنید φ پوشا و $K \subseteq G$ فشرده داده شده باشند، در این صورت یک مجموعه فشرده C در H یافت می‌شود که $\varphi(C) = K$. همچنین برای هر $S \subseteq \Sigma(G)$ داریم $j(B_S(G)) = B_{S \circ \varphi}(H) \cap j(C(G))$.

برهان. الف) واضح است که اگر u مثبت معین باشد، در این صورت $u \circ \varphi$ نیز مثبت معین است. حال فرض کنید $u \in \mathcal{P}_S(G)$. برای نشان دادن اینکه $u \circ \varphi \in \mathcal{P}_{S \circ \varphi}(H)$ ، فرض کنید $C \subseteq H$ فشرده و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که $K = \varphi(C)$ فشرده است، $u_n, \dots, u_1$

در $\mathcal{P}(G)$ به ترتیب متناظر با $\pi_1, \dots, \pi_n$ در $\mathcal{S}$ موجود هستند به طوری که برای هر $x \in K$ ،
 $|u(x) - \sum_{j=1}^n u_j(x)| < \varepsilon$ بنابراین

$$\left| u \circ \varphi(y) - \sum_{j=1}^n u_j \circ \varphi(y) \right| < \varepsilon, \quad y \in C$$

از آنجا که $u_j \circ \varphi$ با $\pi_j \circ \varphi$ متناظر است، نتیجه می‌شود $u \circ \varphi \in \mathcal{P}_{\mathcal{S} \circ \varphi}(H)$.
 حال با گرفتن $\mathcal{S} = \Sigma(G)$ ، نتیجه می‌گیریم j یک همریختی از $B(G)$ به توی $B(H)$ است.
 برای نشان دادن اینکه j نرم کاهشی است، فرض کنید $u \in B(G)$ به فرم $u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$
 با شرط $\|u\| = \|\xi\| \|\eta\|$ باشد. در این صورت

$$u \circ \varphi(y) = \langle \pi \circ \varphi(y)\xi, \eta \rangle$$

و بنابراین $\|u \circ \varphi\| \leq \|\xi\| \|\eta\| = \|u\|$.
 ب) فرض کنید $\varphi(H)$ در G چگال و ω نمایش جامع G و A زیرجبری از $C^*(a)^{**}$ شامل
 ترکیبات خطی متناهی عملگرهای $\omega(x)$ برای $x \in \varphi(H)$ باشد. از آنجا که $x \rightarrow \omega(x)$ از
 G به توی $B(\mathcal{H}(\omega))$ نسبت به توپولوژی عملگر قوی پیوسته است، A در $C^*(a)^{**}$ با این
 توپولوژی چگال است. بنابراین گوی واحد A در گوی واحد $C^*(a)^{**}$ ، با توپولوژی اولترا-
 ضعیف چگال است.

حال فرض کنید $u \in B(G) = B_\omega(G)$. در این صورت $u \circ \varphi \in B_{\omega \circ \varphi}(H)$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \|u \circ \varphi\| &= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n c_j (u \circ \varphi)(y_j) \right| : y_j \in H, c_j \in \mathbb{C}, \left\| \sum_{j=1}^n c_j (\omega \circ \varphi)(y_j) \right\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n c_j u(x_j) \right| : x_j \in \varphi(H), c_j \in \mathbb{C}, \left\| \sum_{j=1}^n c_j W(x_j) \right\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle T, u \rangle| : T \in A, \|T\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle T, u \rangle| : T \in C^*(G)^{**}, \|T\| \leq 1 \right\} \\ &= \|u\|. \end{aligned}$$

بنابراین j طولپایی است.

فرض کنید $u = \tilde{u} \in B(G)$ در این صورت

$$u \circ \varphi = (u \circ \varphi)^{\sim} = u^+ \circ \varphi - u^- \circ \varphi$$

از سوی دیگر، از آنجا که j طولپایی است

$$\|u \circ \varphi\| = \|u\| = u^+(e_G) + u^-(e_G) = u^+ \circ \varphi(e_H) + u^- \circ \varphi(e_H)$$

این روابط نشان می‌دهند $(u \circ \varphi)^+ = u^+ \circ \varphi$ و $(u \circ \varphi)^- = u^- \circ \varphi$. بنابراین با توجه به اینکه

$$j(B(G)) \subseteq B_{\Sigma(H) \circ \varphi}(H) \cap j(C(G)) \subseteq B(H) \cap j(C(G))$$

برای اتمام اثبات (ب) کافی است نشان دهیم اگر $v = u \circ \varphi$ که در آن $u \in C(G)$ و $v \in B(H)$ ، آنگاه $u \in B(G)$. به‌وضوح می‌توانیم فرض کنیم $v = \tilde{v}$. می‌دانیم v^+ و v^- حد یکنواخت ترکیبات خطی متناهی از انتقال‌های راست $v = u \circ \varphi$ روی H است. بنابراین برای $y \in H$ ، $y_1, \dots, y_n, \dots, c_1, \dots, c_n$ در $\mathbb{C}$ چنان یافت می‌شوند که برای هر $y \in H$

$$\left| v^+(y) - \sum_{j=1}^n c_j R_{y_j}(u \circ \varphi)(y) \right| < \frac{1}{m}.$$

با قراردادن $v_m = \sum_{j=1}^n c_j R_{\varphi(y_j)} u$ و توجه به این نکته که

$$\sum_{j=1}^n c_j R_{y_j}(u \circ \varphi) = \left(\sum_{j=1}^n c_j R_{\varphi(y_j)} u \right) \circ \varphi = v_m \circ \varphi,$$

می‌بینیم که برای هر v_m ، $m \in \mathbb{N}$ به فرم ترکیبات خطی انتقال‌های u یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$\left| v^+(y) - v_m \circ \varphi(y) \right| < \frac{1}{m}, \quad y \in \mathcal{H}.$$

در این صورت v_m به یک تابع پیوسته و مثبت معین مانند W^+ به‌طور یکنواخت همگراست. بنابراین $v^+ = W^+ \circ \varphi$ و $W^+ \in \mathcal{P}(G)$. به طریق مشابه W^- در $\mathcal{P}(G)$ چنان یافت می‌شود که $v^- = W^- \circ \varphi$. چون

$$u \circ \varphi = u = u^+ - u^- = W^+ \circ \varphi - W^- \circ \varphi = (W^+ - W^-) \circ \varphi$$

نتیجه می‌گیریم $u = W^+ - W^-$ به $B(G)$ متعلق است.

(ج) فرض کنید φ پوشاست و در شرایط اعلام شده در (ج) صادق است. فرض کنید $u \in B_{S \circ \varphi}(H)$. در این صورت

$$u^+, u^- \in \mathcal{P}_{S \circ \varphi}(H).$$

بنابراین u^+ و u^- قابل تقریب یکنواخت روی C با ترکیبات خطی توابع مثبت معین متناظر با $\pi \circ \varphi$ برای $\pi \in \mathcal{S}$ در حد ε هستند و W^+ و W^- معرفی شده در قسمت قبل نیز روی K چنین تقریبی را دارند. چون K و $\varepsilon > 0$ دلخواه است، نتیجه می‌شود W^+ و W^- به $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(G)$ متعلق است و بنابراین $u = W^+ - W^- \in B_{\mathcal{S}}(G)$ و لذا $B_{\mathcal{S} \circ \varphi} \cap j(C(H)) \subseteq j(B_{\mathcal{S}}(H))$. $\square$

نتیجه ۱۱۵.۳. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و N زیرگروه نرمال G و $q: G \rightarrow G/N$ نگاشت طبیعی خارج‌قسمتی باشد. در این صورت نگاشت $u \rightarrow u \circ \varphi$ یک یکرختی طولپا از $B(G/N)$ به روی زیرفضایی از $B(G)$ شامل توابعی از $B(G)$ است که روی هم‌دسته‌های N ثابت هستند. برای هر $\mathcal{S} \subseteq \Sigma(G/N)$ تصویر $B_{\mathcal{S}}(G/N)$ تحت این نگاشت $B_{\mathcal{S} \circ q}(G)$ است.

۵.۹.۳ خواص افکنشی جبر فوریه

فرض کنید H یک زیرگروه باز از G و اندازه‌ها H ، القایی از G باشد. منظور از f توسیع بدیهی f از G به H است. برای $T \in VN(G)$ و $f \in L^2(H)$ نگاشت $T_H(f) = T(\dot{f})|_H$ روی H را متناظر می‌کنیم. از آنجا که

$$\int_H |T|_H f(x)|^2 dx \leq \int_G |T(\dot{f})(x)|^2 dx \leq \|T\|^2 \|\dot{f}\|_2^2 = \|T\|^2 \|f\|_2^2$$

نگاشت $T|_H : f \rightarrow T(f)|_H$ یک عملگر روی $L^2(H)$ با شرط $\|T|_H\| \leq \|T\|$ است. علاوه‌براین $T|_H \in VN(G)$ ، زیرا برای هر $g \in C_c(H)$

$$\begin{aligned} T|_H(f * g) &= T(f * q)|_H = T(\dot{f} * \dot{g})|_H = (T(\dot{f}) * \dot{g})|_H = T(\dot{f})|_H * g \\ &= T_H(f) * g. \end{aligned}$$

فرض کنید H یک زیرگروه بسته از G باشد و $VN_H(G)$ نمایشگر بستار ضعیف-ستاره از فضای خطی تولید شده توسط $\{\lambda_G(h) | h \in H\}$ باشد. در این صورت $VN_H(G)$ یک جبر فون نویمان است.

گزاره ۱۱۶.۳. فرض کنید H یک زیرگروه باز از یک گروه موضعاً فشرده G باشد. در این صورت الف) نگاشت $u \rightarrow \dot{u} : \varphi$ یک یکرختی طولپا از $A(H)$ به $A(G)$ است و

$$\varphi(\mathcal{P}(H) \cap A(H)) \subseteq \mathcal{P}(G) \cap A(G).$$

نگاشت $T \rightarrow T|_H$ نگاشت الحاقی φ^* از φ است و

$$\varphi^*(VN(G)) = VN(H), \quad \varphi^*(C_\lambda^*(G)) = C_\lambda^*(H).$$

ب) نگاشت تحدید $r : u \rightarrow u|_H$ ، جبر $A(G)$ را به روی $A(H)$ می‌نگارد. نگاشت الحاقی r^* یک یکریختی از $VN(H)$ به روی جبر فون نویمان تولید شده توسط $\lambda_G(x)$ ، $x \in H$ در $VN(G)$ است. علاوه بر این $C_\lambda^*(G) \subseteq r^*(C_\lambda^*(H))$.

برهان. الف) نگاشت $r : u \rightarrow u|_H$ نگاشت نرم کاهشی از $B(G)$ به $B(H)$ است. از آنجا که

$$r(B(G) \subseteq C_c(G)) \subseteq B(H) \cap C_c(H),$$

پیوستگی r نشان می‌دهد که $r(A(G)) \subseteq A(H)$ فرض کنید $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$ نمایشگر الحاقی

$$r|_{A(G)} : A(G) \rightarrow A(H)$$

باشد. در این صورت φ یک نگاشت خطی نرم کاهشی از $VN(H)$ به $VN(G)$ است و با همگرایی اولترا-ضعیف پیوسته است. برای $f \in C_c(H)$ و $u \in A(G)$ داریم

$$\langle \varphi(\lambda_H(f)), u \rangle = \langle \lambda_H(f), u|_H \rangle = \int_H f(x)u(x)dx = \langle \lambda_G(\dot{f}), u \rangle$$

و بنابراین $\varphi(\lambda_H(f)) = \lambda_G(\dot{f})$. از آنجا که $\lambda_H(C_c(H))$ به طور یکنواخت در $C_\lambda^*(H)$ چگال است، φ ، جبر $C_\lambda^*(H)$ را به $C_\lambda^*(G)$ می‌نگارد. علاوه بر این، از آنجا که $C_\lambda^*(H)$ در $VN(H)$ با توپولوژی اولترا-ضعیف چگال است، برای هر $S, T \in VN(H)$ داریم $\varphi(T^*) = \varphi(T)^*$ و $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$. بنابراین φ یک همریختی جبرهای فون نویمان از $VN(H)$ به $VN(G)$ است. همچنین با دقت بیشتری به ضابطه نگاشت می‌بینیم، برد φ در $VN_H(G)$ قرار می‌گیرد؛ زیرا برای هر $h \in H$ ، $\varphi(\lambda_H(h)) = \lambda_G(h)$. فرض کنید $f, g \in C_c(H)$ قرار می‌دهیم

$$u = f * \tilde{g} \in E_\lambda(H) \subseteq A(H) \subseteq VN(H)^*$$

در این صورت برای هر $T \in VN(G)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_T, \check{u} \rangle &= \langle \varphi_T, \bar{g} * \check{f} \rangle = \langle \varphi_T, \bar{g} * \dot{f} \rangle = \langle T(\dot{f}), \dot{g} \rangle = \langle T(\dot{f})|_H, g \rangle \\ &= \langle T|_H(f), g \rangle = \langle \varphi_{T|_H}, \bar{g} * \check{f} \rangle = \langle \varphi_{T|_H}, \check{u} \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین $R^*(u) = u_G \in E_\lambda(G)$ برای هر $u \in E_\lambda(H)$ لذا $R^*(A(H)) \subseteq A(G)$.

$$\|u_G\| = \|R^*(u)\| \leq \|u\| = \|u_{G|H}\| \leq \|u_G\|.$$

بنابراین $\|u\| = \|u_G\|$ و اگر $u \in \mathcal{P}(H) \cap A(H)$ آنگاه $u \in \mathcal{P}(G) \cap A(G)$ و

$$\|u_G\| = \|u\| = u(e) = u_G(e),$$

و حکم ثابت می‌شود.

ب) چون نگاشت تحدید $u|_H : v \rightarrow u$ پوشاست، از نظریه دوگانی نتیجه می‌شود که r^* یک یکرختی توپولوژیکی با توپولوژی اولترا-ضعیف است. بنابراین $r^*(VN(H))$ در $VN(G)$ با توپولوژی اولترا-ضعیف بسته است و بنابراین با $VN_H(G)$ یکرخت است، زیرا شامل $\lambda_G(h)$ ها برای $h \in H$ است. $\square$

فرض کنید K زیرگروه نرمال فشرده از G و $q_K : G \rightarrow G/K$ نمایشگر همریختی خارج‌قسمتی طبیعی و μ_K اندازه هار نرمال شده روی زیرگروه K باشد. در این صورت نگاشت $j_K : f \rightarrow f \circ q_K$ یکرختی بین فضاهای هیلبرت $L_K^\vee(G)$ ، زیرفضای $L^\vee(G)$ شامل همه توابعی است که تقریباً همه‌جا روی K ثابت هستند، و $L^\vee(G/K)$ است. به عبارت دیگر $g \in L_K^\vee(G)$ اگر و تنها اگر $g \in L^\vee(G)$ و $g = g * \mu_K$. این نتیجه می‌دهد، برای هر $T \in VN(G)$ ، $T(L_K^\vee(G)) \subseteq L_K^\vee(G)$ ، بنابراین برای هر $T \in VN(G)$ ، می‌توان عملگر T_K روی $L^\vee(G/K)$ را به صورت

$$T_K(f) = (j^* \circ T \circ j_K)(f), \quad f \in L^\vee(G/K)$$

تعریف کرد. در این حالت $T_k \in VN(G/K)$. علاوه بر این برای هر S و T در $VN(G)$ ، $(ST)_K = S_K T_K$ و $(T^*)_K = (T_K)^*$.

گزاره ۱۱۷.۳. فرض کنید K زیرگروه نرمال فشرده از گروه موضعاً فشرده G باشد. در این صورت

الف) نگاشت $u \rightarrow u \circ q_K$ یک یکرختی از $A(G/K)$ به روی زیرجبر $A_K(G)$ از $A(G)$ ، شامل همه $u \in A(G)$ ‌هایی که $u(xk) = u(x)$ برای هر $x \in G$ و $k \in K$ ، است.

ب) نگاشت $T \rightarrow T_K$ نگاشت الحاقی نگاشت $u \rightarrow u \circ q_K$ است و یک همریختی اولترا-ضعیف پیوسته از $VN(G)$ به روی $VN(G/K)$ است.

برهان. الف) بنابر نتیجه (۱۱۵.۳) نگاشت $u \rightarrow u \circ q_K : \varphi$ ، جبر باناخ $B(G/K)$ را به‌طور طولی به‌روی $B_K(G)$ ، جبر همه $u \in B(G)$ ‌هایی که روی هم‌دسته‌های K ثابت است، می‌نگارد. به وضوح

$$\varphi(B(G/K)) \cap C_c(B(G/K)) = B_K(G) \cap C_c(G).$$

از آنجا که $A(G/K)$ بستار $B(G/K) \cap C_c(G/K)$ است، کافی است نشان دهیم $B_K(G) \cap C_c(G)$ در $A_K(G)$ چگال است. فرض کنید $u \in A_K(G)$ و $\{\varphi_n\}$ یک دنباله در $B(G) \cap C_c(G)$ همگرا به u باشد. در این صورت $u_n * \mu_k \in B_K(G) \cap C_c(G)$ و

$$\|u_n * \mu_k - u\|_{B(G)} = \|(u_n - u) * \mu_k\|_{B(G)} \leq \|\mu_k\| \|u_n - u\|_{B(G)} \rightarrow 0.$$

بنابراین $u \in \overline{B_K(G) \cap C_c(G)}$.

ب) نگاشت $T \rightarrow T_K$ نگاشت الحاقی $u \rightarrow u \circ q_K$ است. در حقیقت، برای $T \in VN(G)$ و $u \in A(G/K) \cap L^2(G/K)$ داریم

$$\begin{aligned} \langle T, u \circ q_K \rangle &= T((u \circ q_K))^\sim(e) = T(\check{u} \circ q_K)(e) = T(j_K(\check{u}))(e) \\ &= j_K(T_K(\check{u}))(e) = T_K(\check{u})(e) = \langle T_K, u \rangle. \end{aligned}$$

قسمت دوم (ب)، از دوگانی فضای باناخ حاصل می‌شود. $\square$

قضیه بعد که یکی از مهم‌ترین توصیفات جبر فوریه است را بدون برهان ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۱۸.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت

$$A(G) = \{f * \tilde{g} \mid f, g \in L^2(G)\}.$$

قضیه فوق نشان می‌دهد $A(G)$ با مجموعه توابع ضریب نمایش منظم چپ یکریخت است.

نتیجه ۱۱۹.۳. توپولوژی‌های ضعیف و اولترا-ضعیف روی $VN(G)$ معادل هستند.

برهان. فرض کنید (f_n) و (g_n) دنباله‌هایی در $L^2(G)$ باشند به‌طوری که سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 \|g_n\|_2$ متناهی باشد. در این صورت بنابر قضیه ۱۱۸.۳، f و g در $L^2(G)$ موجود هستند به‌طوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_G(x) f_n, g_n \rangle = \langle \lambda_G(x) f, g \rangle, \quad x \in G.$$

بنابراین برای هر $T \in VN(G)$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T f_n, g_n \rangle = \langle T f, g \rangle$ و حکم واضح است. $\square$

۶.۹.۳ $A(G)$ به عنوان جبر باناخ کاملاً انقباضی

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و فرض کنید جبر فوریه $A(G)$ به ساختار عملگری القایی حاصل از تناظر $VN(G)^* \cong A(G)^{**}$ مجهز باشد، که پیش از این در بخش ۷.۱.۲ به آن پرداخته شد. در این بخش به نقش این ساختار عملگری در ارتباط با سایر ابزارهای جبر فوریه خواهیم پرداخت. این نظریه درگاه جدیدی برای مطالعه ساختار کوهومولوژیکی جبرهای از نوع فوریه باز می‌کند.

لم ۱۲۰.۳. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند. در این صورت جبرهای فون نویمان $VN(G) \bar{\otimes} VN(H)$ (ضرب تانسوری فون نویمان) و $VN(G \times H)$ یکرخت هستند. برهان. در ابتدا به این نکته دقت می‌کنیم که یکرختی فضاهای هیلبرت زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}\phi: L^*(G) \bar{\otimes} L^*(H) &\longrightarrow L^*(G \times H) \\ f \otimes g &\longrightarrow f \times g\end{aligned}$$

که در آن برای $s \in G$ و $t \in H$ و $f \in L^*(G)$ و $g \in L^*(H)$ ، $f \times g(s, t) = f(s)g(t)$ ، بنا براین

$$B(L^*(G \times H)) \cong B(L^*(G) \bar{\otimes} L^*(H))$$

که شامل $VN(G) \bar{\otimes} VN(H)$ به عنوان یک $*$ -زیرجبر است. در این صورت ϕ یک هم‌ارزی یکانی بین نمایش‌های $\lambda_G \otimes \lambda_H$ و $\lambda_{G \times H}$ برقرار می‌کند. در واقع

$$\begin{aligned}\lambda_{G \times H}(x, y)(\phi(f \otimes g))(s, t) &= \phi(f \otimes g)(x^{-1}s, y^{-1}t) \\ &= f(x^{-1}s)g(y^{-1}t) \\ &= \lambda_G(x)f(s)\lambda_H(y)g(t) \\ &= \phi(\lambda_G(x)f \otimes \lambda_H(y)g)(s, t).\end{aligned}$$

در نتیجه، ϕ یک یکرختی بین جبرهای فون نویمان

$$VN(G) \bar{\otimes} VN(H) = \lambda_G(G)'' \bar{\otimes} \lambda_H(H)'' = (\lambda_G(G) \otimes \lambda_H(H))''$$

□

و $VN(G \times H) = \lambda_{G \times H}(G \times H)''$ برقرار می‌کند.

لم ۱۲۱.۳. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند. در این صورت یکریختی (کاملاً) طولپایی $A(G) \hat{\otimes}^{op} A(H) \cong A(G \times H)$ برقرار است (ضرب تانسوری سمت چپ، ضرب تانسوری تصویری فضاهای عملگری است).

برهان. بنابر لم قبل $VN(G) \overline{\otimes} VN(H) \cong VN(G \times H)$ و با توجه به اینکه

$$A(G) \hat{\otimes}^{op} A(H) = \left(VN(G) \overline{\otimes} A(H) \right)_*$$

داریم $A(G \times H) \cong VN(G \times H)_* = A(G) \hat{\otimes}^{op} A(H)$. $\square$

تعریف ۱۲۲.۳. جبر باناخ A را که مجهز به ساختار فضای عملگری است، کاملاً انقباضی می‌نامیم هرگاه عمل ضرب آن یک نگاشت کاملاً انقباضی باشد.

در ادامه W نگاشت یکانی روی $L^\vee(G \times G)$ با تعریف

$$Wf(s, t) = f(s, st), \quad f \in L^\vee(G \times G), s, t \in G$$

است.

قضیه ۱۲۳.۳. برای گروه موضعاً فشرده G ، جبر فوریه $A(G)$ یک جبر باناخ کاملاً انقباضی است.

برهان. فرض کنید I نمایشگر همانی روی $L^\vee(G)$ باشد. داریم

$$W^*(\lambda_G(s) \otimes I)W = \lambda_G(s) \otimes \lambda_G(s), \quad s \in G \quad (۷.۳)$$

برای اثبات (۷.۳)، کافی است نشان دهیم

$$\langle W^*(\lambda_G(s) \otimes I)\omega\xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \lambda_G(s) \otimes \lambda_G(s)\xi_1, \xi_2 \rangle$$

که در آن برای $i = 1, 2$ ، $\xi_i = f_i \otimes g_i$ و $f_i, g_i \in L^\vee(G)$ حال با توجه به اینکه

$$(\lambda_G(s) \otimes I)\xi(x, y) = \xi(s^{-1}x, y), \quad \xi \in L^\vee(G \times G)$$

داریم

$$\begin{aligned}
 \langle W^*(\lambda_G(s) \otimes I) \omega \xi_1, \xi_2 \rangle &= \langle (\lambda_G(s) \otimes I) W \xi_1, W \xi_2 \rangle \\
 &= \int_G \int_G W \xi_1(s^{-1}x, y) \overline{W \xi_2(x, y)} dx dy \\
 &= \int_G \int_G \xi_1(s^{-1}x, s^{-1}xy) \overline{\xi_2(x, xy)} dx dy \\
 &= \int_G \int_G f_1(s^{-1}x) g_1(s^{-1}xy) \overline{f_2(x) g_2(xy)} dx dy \\
 &= \int_G \int_G f_1(s^{-1}x) \overline{f_2(x)} g_1(s^{-1}y) \overline{g_2(y)} dy dx \\
 &= \langle \lambda_G(s) \otimes \lambda_G(s) \xi_1, \xi_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد نگاشت

$$\gamma : T \longrightarrow W^*(T \otimes I)W$$

یک یکرختی نرمال از $VN(G)$ به $VN(G) \overline{\otimes} VN(H)$ است. علاوه براین، دیاگرام زیر جابجایی است:

$$\begin{array}{ccc}
 VN(G) & \xrightarrow{\gamma} & VN(G) \overline{\otimes} VN(G) \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \otimes i \\
 VN(G) \overline{\otimes} VN(G) & \xrightarrow{i \otimes \gamma} & VN(G) \overline{\otimes} VN(G) \overline{\otimes} VN(G)
 \end{array}$$

در واقع با توجه به اینکه $\lambda_G(s)$ برای $s \in G$ مولد $VN(G)$ است، کافی است نشان دهیم:

$$[(\gamma \otimes i) \circ \gamma](\lambda_G(s)) = [(i \otimes \gamma) \circ \gamma](\lambda_G(s)) \quad s \in G.$$

رابطه بالا نیز برقرار است، زیرا هر دو طرف با $\lambda_G(s) \otimes \lambda_G(s) \otimes \lambda_G(s)$ برابر هستند. γ یک نگاشت ضعیف-ستاره پیوسته است و با توجه به اینکه

$$\gamma(VN(G)) \subseteq VN(G) \overline{\otimes} VN(G) = VN(G \times G),$$

γ کاملاً انقباضی است، بنابراین نگاشت

$$\gamma^* : VN(G \times G)^* \longrightarrow VN(G)^*$$

نیز کاملاً انقباضی است. چون γ ، ضعیف-ستاره پیوسته است، داریم

$$\gamma_* = \gamma^*|_{A(G \times G)} \longrightarrow A(G)$$

نیز کاملاً انقباضی است. با یکسان گرفتن $A(G) \hat{\otimes}^{op} A(G)$ با $A(G \times G)$ از طریق $u \otimes v \rightarrow u \times v$ داریم

$$\gamma_*(u \otimes v) = uv$$

در واقع

$$\begin{aligned} \langle \gamma_*(u \otimes v), \lambda_G(s) \rangle &= \langle \gamma^*(u \otimes v), \lambda_G(s) \rangle \\ &= \langle u \otimes v, \gamma(\lambda_G(s)) \rangle \\ &= \langle u \otimes v, \lambda_G(s) \otimes \lambda_G(s) \rangle \\ &= u(s)v(s) = \langle uv, \lambda_G(s) \rangle \end{aligned}$$

بنابراین $\gamma_*(u \otimes v) = uv$ و این یعنی عمل ضرب کاملاً انقباضی و جبر فوریه کاملاً انقباضی است. $\square$

این دستاورد که توسط روان در [۵۴] برای مطالعه میانگین‌پذیری جبر فوریه به‌کار رفت، مسیر جدیدی را برای مطالعه میانگین‌پذیری جبرهای از نوع فوریه برای گروه‌های موضعاً فشرده دلخواه گشود.

در بخش پایانی این فصل به توصیف فضاهایی از مقاله [۷] می‌پردازیم.

۷.۹.۳ p -صورت جبرهای فوریه و فوریه اشتیل‌یس

برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ مجموعه همه توابع ضریب این نمایش را با $F_{p,\pi}(G)$ نشان می‌دهیم. طبق انتظار، برای $F_{\mathbb{C},\pi}(G)$ به جای نماد $F_{\mathbb{C},\pi}(G)$ از نماد $F_\pi(G)$ استفاده می‌کنیم. نرم این فضا به صورت

$$\|u\| = \inf \{ \|\xi\| \|\eta\| : u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle, x \in G \}$$

تعریف می‌شود. فرض کنید $(\pi, \mathcal{H}) \in \Sigma$. فضای π -فوریه را با A_π ^۱ نمایش می‌دهیم و به صورت $A_\pi = \overline{\langle F_\pi(G) \rangle}^{\|\cdot\|}$ تعریف می‌کنیم. فضای A_π شامل تمام توابع u به فرم

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi(x) \xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G, \quad (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H} \quad (۸.۳)$$

است که

$$\|u\|_{A_\pi} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| \|\eta_n\| \right\} < \infty.$$

در اینجا اینفیمم روی تمامی نمایش‌های ممکن برای u به شکل (۸.۳) محاسبه می‌شود. نگاشت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \Psi_\pi : E^* \hat{\otimes} E &\rightarrow C_b(G), \\ \Psi_\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \otimes \xi_n \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi(x) \xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \otimes \xi_n \in E^* \hat{\otimes} E. \end{aligned}$$

این نگاشت منجر به یکرختی $A_p = E^* \hat{\otimes} E / \ker \Psi_\pi$ می‌شود و در نتیجه فضای A_π یک فضای باناخ با نرم خارج قسمتی است. همچنین برای چنین نمایشی فضای π -فوریه اشتیلیس ^۲ را با B_π نشان می‌دهیم و داریم $B_\pi = (C_\pi^*(G))^*$. همچنین با توجه به [۷] داریم $B_\pi = \overline{A_\pi}^{w*}$.

در ادامه به تشریح اجمالی جبرهای فیگا-تالامانکا-هرتس $A_p(G)$ و p -صورت جبر فوریه اشتیلیس، $B_p(G)$ ، می‌پردازیم. منبع مطالبی که در این بخش می‌آیند، دستاوردهای روندا است که خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر به [۵۶] و [۵۷] مراجعه کند.

در ابتدای امر زمانی که ایماارد جبرهای فوریه و فوریه اشتیلیس را معرفی کرد، تعمیمی از جبر فوریه $A(G)$ نیز تعریف شد که به جبرهای فیگا-تالامانکا-هرتس ^۳ $A_p(G)$ معروف هستند. در واقع ابتدا در سال ۱۹۶۵، این جبرها برای گروه‌های موضعاً فشرده و آبلی توسط

-
1. π -Fourier
 2. π -Fourier-Stieltjes
 3. Figà-Talamanca-Herz algebra

فیگا-تالامانکا [۲۷] و بعد از آن در سال ۱۹۷۱ توسط هرتس [۳۵] برای همه گروه‌های موضوعاً فشرده تعریف شد. این تعاریف و نتایج در حالت $p = 2$ بر تعریف ایمارد منطبق است. یعنی $A_2(G) = A(G)$.

در این حالت $B_p(G)$ توسط چند محقق در [۱۶]، [۲۹]، [۴۸] و [۵۱] به صورت جبر ضربگر^۱ فضای $A_p(G)$ در نظر گرفته شد.^۲ فضای جبر ضربگر جبر $A_p(G)$ را با $M(A_p(G))$ نشان می‌دهیم. این فضا متشکل از توابع پیوسته و کراندار مانند $u \in C_b(G)$ است به طوری که برای هر $v \in A_p(G)$ داریم $uv \in A_p(G)$. در واقع تابع T_u به عنوان یک عملگر متعلق به فضای $B(A_p(G))$ به صورت

$$T_u : A_p(G) \rightarrow A_p(G), \quad T_u(v) = uv$$

محاسبه می‌شود و نرم روی این فضا به صورت

$$\|u\|_{M(A_p(G))} = \|T_u\|_{op} = \sup \{ \|uv\|_{A_p(G)} : v \in A_p(G), \|v\|_{A_p(G)} \leq 1 \}.$$

در نظر گرفته می‌شود. اما این تعمیم برای جبر فوریه اشتیل‌یس مناسب نبود؛ زیرا در حالتی که $p = 2$ فقط زمانی که G میانگین‌پذیر باشد، داریم $B(G) = M(A_2(G))$ و در غیر این صورت داریم $B(G) \subsetneq M(A_2(G))$. پس از آن در سال ۲۰۰۵ روندا در [۵۶] به تعمیم مناسبی رسید که در ادامه به توضیح آن خواهیم پرداخت.

ابتدا به تعریف جبرهای فیگا-تالامانکا-هرتس می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲۴.۳. برای $p \in (1, \infty)$ ، جبر فیگا-تالامانکا-هرتس به صورت

$$\left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n * \check{\eta}_n : \xi_n \in L_p(G), \eta_n \in L_{p'}(G), \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_p \|\eta_n\|_{p'} < \infty \right\},$$

تعریف و با $A_p(G)$ نمایش داده می‌شود که در آن p' اسکالر مزدوج p است، یعنی $1/p + 1/p' = 1$. همچنین نرم روی $A_p(G)$ به صورت

$$\|u\|_{A_p(G)} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_p \|\eta_n\|_{p'} : u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n * \check{\eta}_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_p \|\eta_n\|_{p'} < \infty \right\}.$$

1. multilplier algebra

۲. در واقع فضای ضربگر یک جبر باناخ مفهومی کلی تر است و در حالتی که جبر باناخ مورد نظر جبر فوریه باشد بنابر ویژگی‌های این جبر ثابت می‌شود که فضای $M(A_p(G))$ را می‌توان به عنوان زیرفضایی از $C_b(G)$ در نظر گرفت اما با نرم عملگری $B(A_p(G))$!

محاسبه می‌شود.

در ارتباط با خواص جبر $A_p(G)$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۲۵.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت

۱. فضای $(A_p(G), \|\cdot\|_{A_p(G)})$ فضای خارج قسمتی از $L_p(G) \widehat{\otimes} L_{p'}(G)$ بوده و در نتیجه یک فضای باناخ است. فضای $(A_p(G), \|\cdot\|_{A_p(G)})$ با عمل ضرب نقطه به نقطه یک جبر باناخ است.

۲. فضای $C_c(G) \cap A_p(G)$ در فضای $A_p(G)$ چگال است. همچنین فضای $A_p(G)$ با نرم یکنواخت در فضای $C_0(G)$ چگال است.

حال به توصیف فضای دوگان $A_p(G)$ می‌پردازیم.

تعریف ۱۲۶.۳. برای $p \in (1, \infty)$ تعریف می‌کنیم

$$PM_p(G) = \overline{\lambda_p(L^1(G))}^{w.o.t} = \overline{\lambda_p(L^1(G))}^{w*} \subseteq \mathcal{B}(L_p(G)) \cong (L_{p'}(G) \widehat{\otimes} L_p(G))^*.$$

در مورد ارتباط بین $PM_{p'}(G)$ و $A_p(G)$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۲۷.۳. فرض کنید $p, p' \in (1, \infty)$ و $1/p + 1/p' = 1$. در این صورت

۱. فضای $PM_{p'}(G)$ فضای دوگان است و داریم

$$\lambda_{p'}(M(G)) \subseteq PM_{p'}(G), \quad A_p(G)^* = PM_{p'}(G).$$

۲. از آنجا که اعضای $A_p(G)$ به صورت

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_p(x) \xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G, \quad (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p(G), \quad (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_{p'}(G)$$

هستند، دوگانی بین $PM_{p'}(G)$ و $A_p(G)$ به صورت زیر است

$$\langle T, \xi * \tilde{\eta} \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad T \in PM_{p'}(G), \quad \xi \in L_p(G), \quad \eta \in L_{p'}(G).$$

توجه کنید که اعضای $A_p(G)$ تابع ضرب نمایش منظم چپ هستند. در واقع محاسبات زیر برای $x \in G$ گویای این امر است. داریم

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x)\xi, \eta \rangle &= \langle x^{-1}\xi, \eta \rangle \\ &= \int_G x^{-1}\xi(y)\eta(y)dy \\ &= \int_G \xi(x^{-1}y)\eta(y)dy \\ &= \int_G \xi(z)\eta(xz)dz \\ &= \int_G \xi(z)\check{\eta}(z^{-1}x^{-1})dz \\ &= \xi * \check{\eta}(x).\end{aligned}$$

تذکر ۱۲۸.۳. با استفاده از مراجع مربوطه نتایج زیر قابل توجه است.

۱. با توجه به [۵۷] برای گروه موضعاً فشرده G و زیرگروه باز H از آن، یکسان‌ریختی

$$A_p(H) \cong \{u \in A_p(G) : \text{supp}(u) \subseteq H\}.$$

برقرار است.

۲. از [۶۱] نتیجه می‌شود که گروه موضعاً فشرده G میانگین پذیر است اگر و فقط اگر فضای $A_p(G)$ دارای یک تقریبی کراندار در توپولوژی ضربگری باشد، یعنی تور انقباضی $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{i \in \mathbb{I}} \|e_i - 1_{M(A_p(G))}\|_{M(A_p(G))} = 0.$$

که در آن، $1_{M(A_p(G))}$ تابع ثابت یک روی گروه G و یا همان عملگر همانی از فضای $B(A_p(G))$ است.

۳. فضای $A_p(G)$ یک فضای باناخ منظم^۱ است و این یعنی برای هر زیرمجموعه فشرده K از G تابع $u \in A_p(G)$ وجود دارد به طوری که $u|_K = 1$ و برای هر زیرمجموعه باز U از G که شامل K باشد، داریم $u|_{U^c} = 0$.

1. regular

حال فضای $B_p(G)$ ، p -صورت جبر فوریه اشتیلیس به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲۹.۳. فرض کنید $p, p' \in (1, \infty)$ مزدوج مختلط یکدیگر باشند. قرار دهید

$$B_p(G) = \{u : G \rightarrow \mathbb{C} : u(\cdot) = \langle \pi(\cdot)\xi, \eta \rangle, (\pi, E) \in \text{Rep}_{p'}(G), \xi \in E, \eta \in E^*\}$$

توجه می‌کنیم که چون l_p -جمع مستقیم دو QSL_p -فضا مجدداً یک QSL_p -فضا است، نتیجه می‌شود که مجموعه $\text{Rep}_p(G)$ نسبت به عمل l_p -جمع مستقیم بسته است و این یعنی فضای $B_p(G)$ یک زیرفضای خطی از $C_b(G)$ است. همچنین در حالتی که دنباله $((\pi_n, E_n))_{n=1}^\infty \subseteq \text{Cyc}_{p'}(G)$ به همراه دنباله‌های برداری $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ و $(\eta_n)_{n=1}^\infty$ طوری باشند که داشته باشیم

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi_n(x)\xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G, \xi_n \in E_n, \eta_n \in E_n^*, n \in \mathbb{N},$$

آنگاه تابع u به فضای $B_p(G)$ متعلق است (لم ۲۰.۳ از [۵۶] را ببینید). همچنین اگر اعداد $p, q \in (1, \infty)$ طوری باشند که $1 \leq p \leq q \leq 2$ یا $2 \leq q \leq p$ ، آنگاه به این دلیل که هر QSL_q -فضا یک QSL_p -فضا است شمول $B_q(G) \subseteq B_p(G)$ را داریم. علاوه بر این شمول‌های زیر به طور ویژه برقرار هستند (گزاره ۲۰.۴ از [۵۶] را ببینید)

$$B(G) \subseteq B_p(G), \quad A_p(G) \subseteq B_p(G).$$

برای نشان دادن جبر بودن فضای $B_p(G)$ روند با تعریف نرم $\|\cdot\|_p$ به روی فضای ضرب تانسوری جبری دو QSL_p -فضا نشان داد که اگر نمایش‌های (π, E) و (ρ, F) از مجموعه $\text{Rep}_p(G)$ باشند، آنگاه نمایش $(\pi \otimes \rho, E \tilde{\otimes}_p F)$ که به صورت

$$\pi \otimes \rho : G \rightarrow B(E \tilde{\otimes}_p F), \quad \pi \otimes \rho(x)(\xi \otimes \xi') = \pi(x)\xi \otimes \rho(x)\xi', \quad x \in G, \xi \in E, \xi' \in F.$$

تعریف می‌شود، به مجموعه $\text{Rep}_p(G)$ متعلق است. اضافه بر این، اگر u و v دو تابع ضرب این نمایش‌ها باشند، آنگاه تابع uv تابع ضرب نمایش $(\pi \otimes \rho, E \tilde{\otimes}_p F)$ است. به طور دقیق تر، برای $x \in G$ داریم

$$\begin{aligned} u(x) &= \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle, \quad \xi \in E, \eta \in E^*, \\ v(x) &= \langle \rho(x)\xi', \eta' \rangle, \quad \xi' \in F, \eta' \in F^*, \end{aligned}$$

$$uv(x) = \langle \pi \otimes \rho(x)(\xi \otimes \xi'), \eta \otimes \eta' \rangle.$$

این یعنی فضای $B_p(G)$ یک جبر است. برای تکمیل تعریف این فضا، روندا نرم $\|\cdot\|_{B_p(G)}$ را به صورت زیر روی این فضا تعریف کرد

$$\|u\|_{B_p(G)} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| \|\eta_n\| : u(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi_n(\cdot) \xi_n, \eta_n \rangle, \xi_n \in E, \eta_n \in E_n^*, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

که در آن اینفیمم رو تمامی دنباله‌های ممکن $\text{Cyc}_{p'}(G) \subseteq ((\pi_n, E_n))_{n=1}^{\infty}$ در نمایش u محاسبه می‌شود. علاوه بر این نشان داد که برای هر $u \in B_p(G)$ چنین دنباله‌ای از نمایش‌های دوری وجود دارد. او نشان داد که به طور معادل، می‌توان نرم به این فضا را با استفاده از یک نمایش p -جامع مانند $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ محاسبه کرد. در واقع در لم ۴۰۶ نشان داده شد که برای هر $\varepsilon > 0$ دنباله‌های برداری $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ و $(\eta_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E^*$ وجود دارند به طوری که داریم

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi(x) \xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G, \quad (9.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| \|\eta_n\| < \|u\|_{B_p(G)} + \varepsilon. \quad (10.3)$$

در ادامه لیستی از ویژگی‌های فضای $B_p(G)$ ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۳۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $p, q \in (1, \infty)$ به طوری که $1 \leq p \leq q \leq 2$ یا $2 \leq q \leq p$ ، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. فضای $B_p(G)$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار است.

۲. فضای $A_p(G)$ یک ایده‌ال انقباضی برای $B_p(G)$ است. یعنی برای $u \in B_p(G)$ و $v \in A_p(G)$ داریم

$$uv \in A_p(G), \quad \|uv\|_{A_p(G)} \leq \|u\|_{B_p(G)} \|v\|_{A_p(G)}.$$

۳. زنجیره شمول انقباضی زیر موجود است

$$B_q(G) \subseteq B_p(G), \\ A_p(G) \subseteq PF_{p'}(G)^* \subseteq B_p(G) \subseteq M(A_p(G)) \subseteq C_b(G).$$

۴. در حالتی که گروه G میانگین پذیر است، شمول و یکرختی‌های طولپای زیر موجود است

$$A_p(G) \subseteq PF_{p'}(G)^* = B_p(G) = M(A_p(G)).$$

همچنین رابطه مهم زیر را داریم

$$\overline{A_p(G)}^{\tau_M} = \overline{A_p(G)}^{w^*} = B_p(G).$$

منظور از τ_M در روابط بالا توپولوژی ضربگری است.

در پایان قضیه کلیدی زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۳۱.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده، $(\pi, E) \in \text{Rep}_{p'}(G)$ یک نمایش و $p, p' \in (1, \infty)$ مزدوج مختلط هم باشند. آنگاه برای هر $\phi \in PF_{p', \pi}(G)^*$ عضو منحصر به فرد $u_\phi \in B_p(G)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\langle \pi(f), \phi \rangle = \int_G f(x) u_\phi(x) dx, \quad f \in L^1(G),$$

$$\|u_\phi\|_{B_p(G)} \leq \|\phi\|_{op}.$$

همچنین، اگر (π, E) نمایش p' -جامع باشد، آنگاه تساوی $\|\phi\|_{op} = \|u_\phi\|_{B_p(G)}$ برقرار است. این یعنی شمول انقباضی و یکرختی طولپای

$$PF_{p', \pi}(G)^* \subseteq B_p(G), \quad U PF_{p'}(G)^* = B_p(G)$$

زیر برقرار است.

تذکر ۱۳۲.۳. برای نمایش p' -جامع $(\pi, E) \in \text{Rep}_{p'}(G)$ رابطه دوگانی برای $u(\cdot) = \langle \pi(\cdot) \xi_u, \eta_u \rangle$ در $B_p(G)$ و $\pi(f) \in U PF_{p'}(G)$ به‌صورت

$$\langle \pi(f), u \rangle = \langle \pi(f) \xi_u, \eta_u \rangle, \quad \xi_u \in E, \eta_u \in E^*, f \in L^1(G),$$

است. این رابطه دوگانی، نرم معادل

$$\|u\|_{B_p(G)} = \sup \{ |\langle \pi(f) \xi_u, \eta_u \rangle| : \|\pi(f)\|_{op} \leq 1, f \in L^1(G) \},$$

$$\|\pi(f)\|_{op} = \sup \{ \left| \int_G f(x) u(x) dx \right| : \|u\|_{B_p(G)} \leq 1, u \in B_p(G) \},$$

را برای این فضاها به دست می‌دهد.
در سراسر این کتاب هنگام کار با p -صورت جبرهای فوریه اشتیلیس، برای راحتی کار اندیس p' را با p تعویض می‌کنیم. در حقیقت، فرض می‌کنیم که اعضای فضای $B_p(G)$ تابع ضریب نمایش‌های متعلق به $\text{Rep}_p(G)$ هستند، که این امر نتیجه می‌دهد $B_p(G) = UFP_p(G)^*$.

۱۰.۳ تمرین‌ها

۱.۱۰.۳ گروه‌های موضعاً فشرد و اندازه هار

تمرین ۱.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرد باشد. ثابت کنید که اندازه‌ی هار چپ و راست روی G در صورتی یکسان هستند که G یک گروه تک پیمانه‌ای باشد.

تمرین ۲.۱۰.۳. اگر G یک گروه موضعاً فشردی آبدی باشد، نشان دهید که جبر گروهی $L^1(G)$ نیز آبدی است.

تمرین ۳.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه فشرد باشد. ثابت کنید که اندازه‌ی هار روی G متناهی است و می‌توان آن را نرمال‌سازی کرد به‌طوری که $\int_G dg = 1$.

تمرین ۴.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرد باشد. ثابت کنید:

۱. اندازه‌ی هار چپ Δ_G یک هم‌ریختی پیوسته از G به $\mathbb{R}^+$ است.

۲. اگر G فشرد باشد، $\Delta_G \equiv 1$.

تمرین ۵.۱۰.۳. نشان دهید که برای یک گروه موضعاً فشرد G ، احکام زیر معادل هستند:

۱. G یکال است (یعنی $\Delta_G \equiv 1$).

۲. اندازه‌ی هار چپ و راست بر هم منطبق هستند.

۳. $L^1(G)$ یک جبر $*$ -منظم است.

تمرین ۶.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرد و μ اندازه‌ی هار چپ روی آن باشد. ثابت کنید که برای هر $f \in L^1(G)$ و $y \in G$ داریم:

$$\int_G f(xy) d\mu(x) = \Delta_G(y^{-1}) \int_G f(x) d\mu(x).$$

تمرین ۷.۱۰.۳. اگر G یک گروه گسسته باشد، نشان دهید

۱. اندازه هار اندازه شمارشی است.

$$۲. \Delta_G \equiv ۱.$$

۳. $L^1(G)$ دقیقاً همان $\ell^1(G)$ با پیچش است.

تمرین ۸.۱۰.۳. ثابت کنید که برای گروه ضربی $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

۱. اندازه‌ی هار عبارت است از $d\mu(x) = \frac{dx}{|x|}$.

$$۲. \Delta_{\mathbb{R}^*}(x) = |x|^{-1}.$$

تمرین ۹.۱۰.۳. فرض کنید H زیرگروه بسته‌ی یک گروه موضعاً فشرده G باشد. اگر μ_G و μ_H به ترتیب اندازه‌های هار روی G و H باشند، رابطه‌ی بین آنها را بررسی کنید.

تمرین ۱۰.۱۰.۳. نشان دهید که برای گروه $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

۱. G تک پیمانه‌ای نیست.

۲. اندازه‌ی هار آن عبارت است از $d\mu = \frac{dx dy dz}{|y|}$.

تمرین ۱۱.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و K زیرگروه فشرده‌ی آن باشد. ثابت کنید که می‌توان اندازه‌ی هار روی G/K را طوری تعریف کرد که برای $f \in C_c(G)$

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = \int_{G/K} \left(\int_K f(gk) d\mu_K(k) \right) d\mu_{G/K}(gK).$$

تمرین ۱۲.۱۰.۳. اگر G و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند، نشان دهید اندازه‌ی هار روی $G \times H$ حاصلضرب اندازه‌های هار G و H است.

تمرین ۱۳.۱۰.۳. ثابت کنید که برای یک گروه موضعاً فشرده G ، فضای $L^2(G)$ با اندازه‌ی هار یک فضای هیلبرت است و عملگرهای انتقال چپ و راست روی آن یکانی هستند.

۲.۱۰.۳ نمایش‌های یکانی و توابع مثبت معین

تمرین ۱۴.۱۰.۳. فرض کنید π یک نمایش یکانی از گروه موضعاً فشرده‌ی G روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. ثابت کنید که برای هر $\xi \in \mathcal{H}$ ، تابع $\langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ یک تابع مثبت معین روی G است.

تمرین ۱۵.۱۰.۳. اگر φ یک تابع مثبت معین پیوسته روی گروه موضعاً فشرده‌ی G باشد، نشان دهید که یک نمایش یکانی π از G و یک بردار $\xi \in \mathcal{H}$ وجود دارد به‌طوری که $\varphi(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$.

۳.۱۰.۳ جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس

تمرین ۱۶.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. ثابت کنید که جبر فوریه $A(G)$ به عنوان فضای دوگان جبر گروهی $L^1(G)$ تعریف می‌شود.

تمرین ۱۷.۱۰.۳. اگر G یک گروه فشرده باشد، نشان دهید که جبر فوریه $A(G)$ یک جبر باناخ با ضرب نقطه‌ای است.

تمرین ۱۸.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. ثابت کنید که جبر فوریه-اشتیل یس $B(G)$ به عنوان مجموعه‌ی تمام توابع ضربی خطی روی $C^*(G)$ تعریف می‌شود.

۴.۱۰.۳ نمایش‌های گروه‌ها روی فضاهای باناخ

تمرین ۱۹.۱۰.۳. اگر G یک گروه موضعاً فشرده و $\pi : G \rightarrow B(X)$ یک نمایش پیوسته روی فضای باناخ X باشد، نشان دهید که می‌توان π را به یک نمایش از جبر گروهی $L^1(G)$ روی X گسترش داد.

تمرین ۲۰.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه فشرده و π یک نمایش تحویل‌ناپذیر از G روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. ثابت کنید که $\dim \mathcal{H} < \infty$.

۵.۱۰.۳ جبرهای فون نویمان گروهی

تمرین ۲۱.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. ثابت کنید که جبر فون نویمان گروهی $VN(G)$ به عنوان بستار ضعیف عملگرهای چپ روی $L^2(G)$ تعریف می‌شود.

تمرین ۲۲.۱۰.۳. اگر G یک گروه گسسته باشد، نشان دهید که $VN(G)$ شامل تمام عملگرهای کراندار روی $\ell^2(G)$ است که با عملگرهای راست جابجا می‌شوند.

۶.۱۰.۳ تمرین‌های ترکیبی

تمرین ۲۳.۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشردۀ و H زیرگروه بسته‌ی آن باشد. رابطه‌ی بین $VN(H)$ و $VN(G)$ را بررسی کنید.

تمرین ۲۴.۱۰.۳. ثابت کنید که برای یک گروه موضعاً فشردۀ G ، جبر فوریه $A(G)$ با $L^1(\hat{G})$ یکریخت است، که در آن $\hat{G}$ گروه دوگان پونتریاگین G است.

ساختار p -عملگری جبر p -شبه توابع و p -صورت جبرهای فوریه اشتیلیس

این فصل به توصیف ساختار فضای p -عملگری روی جبر جامع p -شبه توابع $UPF_p(G)$ و دوگان آن یعنی p -صورت جبر فوریه اشتیلیس $B_p(G)$ اختصاص داده شده است. در بخش ۱.۴، به معرفی عناصر سازنده فضای $UPF_p(G)$ و محاسبه نرم ماتریسی روی این فضا می پردازیم. سپس در بخش ۲.۴، ساختار فضای p -عملگری فضای $UPF_p(G)$ به طور کامل مطالعه می شود. سرانجام در بخش ۳.۴، ساختار فضای p -عملگری برگرفته شده از جبر $UPF_p(G)$ روی p -صورت جبر فوریه اشتیلیس معرفی می شود که چهارچوب اصلی این فصل و فصل بعدی را معین می کند.

۱.۴ خواص بنیادی جبرهای p -شبه توابع

در سراسر این بخش، دوتایی (π, E) نشان دهنده یک نمایش (مطابق تعریف ۸۷.۳) برای گروه G است. همانطور که در بخش ۸.۳ به آن پرداخته شد، جبر p -شبه توابع متناظر با نمایش (π, E) به عنوان زیرجبر بسته فضای $B(E)$ به صورت

$$PF_{p,\pi}(G) = \overline{\{\pi(f) : f \in L(G)\}}^{\|\cdot\|_{B(E)}}.$$

تعریف می‌شود. با رویکردی دیگر، اگر برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ و هر $f \in L^1(G)$ قرار دهیم $\|f\|_\pi = \|\pi(f)\|_{B(E)}$ ، آنگاه $\|\cdot\|_\pi$ یک نیم نرم روی $L^1(G)$ است. حال فضای پوچ این نیم نرم را با N_π نمایش می‌دهیم، یعنی $N_\pi = \{f \in L^1(G) : \|\pi(f)\| = 0\}$. به سادگی دیده می‌شود که N_π یک ایده‌آل دو طرفه و بسته برای $L^1(G)$ است. با در نظر گرفتن فضای خارج قسمتی $L^1(G)/N_\pi$ و کامل سازی آن، به همان فضای $PF_{p,\pi}(G)$ می‌رسیم. در ادامه به ارائه برخی از ویژگی‌های چنین جبرهایی می‌پردازیم.

لم ۱.۴. اگر برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ مجموعه همه زیرنمایش‌های دوری آن را با $\text{Cyc}_{p,\pi}(G)$ نمایش دهیم، آنگاه برای $f \in L^1(G)$ داریم

$$\|\pi(f)\| = \|f\|_\pi = \sup \{ \|\pi_c(f)\| = \|f\|_{\pi_c} : (\pi_c, E_c) \in \text{Cyc}_{p,\pi}(G) \}.$$

برهان. فرض کنید (π, E) یک نمایش برای گروه G روی QSL_p -فضای E باشد و $f \in L^1(G)$ قرار دهید

$$C = \sup \{ \|\pi_c(f)\| = \|f\|_{\pi_c} : (\pi_c, E_c) \in \text{Cyc}_{p,\pi}(G) \}.$$

آنگاه چون برای هر نمایش $(\pi_c, E_c) \in \text{Cyc}_{p,\pi}(G)$ داریم $(\pi_c, E_c) \subseteq (\pi, E)$ ، لذا

$$\begin{aligned} \pi_c(f) &= \pi(f)|_{E_c}, \quad f \in L^1(G), \\ \|\pi_c(f)\| &\leq \|\pi(f)\|, \end{aligned} \quad (۱.۴)$$

و نامساوی $C \leq \|\pi(f)\|$ نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، برای $\varepsilon > 0$ داده شده، فرض کنید $\xi_\varepsilon \in E$ به صورت زیر باشد

$$\|\xi_\varepsilon\| \leq 1 \quad \text{و} \quad \|\pi(f)\| < \|\pi(f)\xi_\varepsilon\| + \varepsilon. \quad (۲.۴)$$

حال قرار دهید

$$\begin{aligned} E_{\xi_\varepsilon} &= \overline{\{\pi(f)\xi_\varepsilon : f \in L^1(G)\}}^{\|\cdot\|_E}, \\ \pi_{\xi_\varepsilon} : G &\rightarrow B(E_{\xi_\varepsilon}) \quad \pi_{\xi_\varepsilon}(x) = \pi(x)|_{E_{\xi_\varepsilon}}, \quad x \in G. \end{aligned}$$

آنگاه $(\pi_{\xi_\varepsilon}, E_{\xi_\varepsilon})$ به $\text{Cyc}_{p,\pi}(G)$ متعلق است و از نامساوی (۲.۴) و تساوی (۱.۴) نامساوی

$$\|\pi(f)\| < \|\pi_{\xi_\varepsilon}(f)\xi_\varepsilon\| + \varepsilon \leq \|\pi_{\xi_\varepsilon}(f)\| \|\xi_\varepsilon\| + \varepsilon \leq \|\pi_{\xi_\varepsilon}(f)\| + \varepsilon \leq C + \varepsilon,$$

نتیجه می‌شود و بنابر دلخواه بودن $\varepsilon > 0$ ، داریم $\|\pi(f)\| \leq C$ و این اثبات را تمام می‌کند.

□

نتیجه بعد مستقیماً از لم قبل حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۴. فرض کنید دو نمایش (π, E) و (ρ, F) طوری باشند که نمایش (π, E) شامل تمامی زیرنمایش‌های دوری نمایش (ρ, F) باشد. آنگاه برای هر تابع دلخواه $f \in L^1(G)$ ، $\|f\|_\rho \leq \|f\|_\pi$.

برهان. بنابر لم ۱.۴ حکم به آسانی نتیجه می‌شود. بنابر این لم، فرض کنید برای $\varepsilon > 0$ داده شده و دلخواه، زیرنمایش دوری (ρ_c, F_c) از نمایش (ρ, F) چنان باشد که

$$\|\rho(f)\| < \|\rho_c(f)\| + \varepsilon. \quad (۳.۴)$$

بنابر فرض نمایش (π, E) شامل نمایش دوری (ρ_c, F_c) است، در نتیجه نگاشت طولپا و وارون پذیر $T : F_c \rightarrow E \subseteq E$ موجود است که در آن E یک زیرفضای بسته از E است و برای هر $f \in L^1(G)$ داریم $f|_E \circ T = \rho_c(f)|_{F_c} \circ T^{-1}$. از طولپایی نگاشت T ، نامساوی $\|\rho_c(f)\| \leq \|\pi(f)|_E\| \leq \|\pi(f)\|$ نتیجه می‌شود. حال با استفاده از نامساوی اخیر و نامساوی (۳.۴) و به دلیل دلخواه بودن ε حکم نتیجه می‌شود. $\square$

این بخش را با بیان نکته‌های زیر به پایان می‌رسانیم.

تذکر ۳.۴. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت

۱. برای تابع $f \in L^1(G)$ با توجه به نتیجه ۲.۴ می‌توان رویکرد زیر را نیز برای محاسبه نرم $\|\pi(f)\|$ اتخاذ کرد:

$$\|\pi(f)\| = \|f\|_\pi = \sup \{ \|\rho(f)\| = \|f\|_\rho : (\rho, F) \subseteq (\pi, E) \}.$$

۲. بنابر نتیجه ۲.۴ و قسمت (۱)، در حالتی که (π, E) و (ρ, F) دو نمایش p -جامع باشند، برای هر $f \in L^1(G)$ داریم $\|\pi(f)\| = \|\rho(f)\|$. بنابراین نرم روی فضای $UPF_p(G)$ مستقل از انتخاب نمایش p -جامع است.

۲.۴ نرم ماتریسی روی جبر p -شبه توابع

هدف اصلی این بخش این است که برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ خانواده‌ای از نرم‌ها مانند $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ را روی جبر p -شبه توابع $PF_{p,\pi}(G)$ تعریف کنیم که در خواص ویژه‌ای

صدق می‌کنند. در ابتدا چهارچوب کار را با بیان دقیق ساختار اعضا و رفتار آنها شروع می‌کنیم که تضمینی برای خوش تعریفی ساختار فضای p -عملگری است. در گام‌های بعدی تعاریفی را ارائه می‌دهیم که به هموار کردن مسیر کمک می‌کند. همچنین در طی این بخش تلاش می‌کنیم، ساختار نظام مندی را بین نمایش‌های یک گروه موضعاً فشرده برقرار کنیم. نخست گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که اثبات آن ساده است و در محاسبات بعدی هنگام کار با l_p -جمع مستقیم نمایش‌ها مفید خواهد بود.

گزاره ۴.۴. برای یک مجموعه اندیس گذار Λ فرض کنید $(T_i)_{i \in \Lambda}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی و کراندار مانند $T_i : E_i \rightarrow E_i$ برای $i \in \Lambda$ باشد. آنگاه برای $p \in (1, \infty)$ نگاشت

$$l_p - \oplus_{i \in \Lambda} T_i : l_p - \oplus_{i \in \Lambda} E_i \rightarrow l_p - \oplus_{i \in \Lambda} E_i,$$

خوش تعریف است و داریم

$$\|T\|^p = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|T_k(x_k)\|^p : (T_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq (T_i)_{i \in \Lambda}, \oplus_k x_k \in \oplus_k E_k, \sum_k \|x_k\|^p \leq 1 \right\}.$$

برای روشن شدن بیشتر مطالب، نمادهایی را معرفی می‌دهیم.

فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ منظور از نماد $(\pi^{(n)}, E^{(n)})$ فضای نرم‌دار $E^{(n)} = l_p^{(n)} \tilde{\otimes}_p E$ و عملگر

$$\pi^{(n)} : M_n(L^1(G)) \rightarrow \mathcal{B}(E^{(n)}), \quad \pi^{(n)}([f_{ij}]) := [\pi(f_{ij})] : E^{(n)} \rightarrow E^{(n)},$$

است، که در اینجا برای $(x_j)_{j=1}^n \in E^{(n)}$ و $[f_{ij}] \in M_n(L^1(G))$ ، اثر $\pi^{(n)}$ به صورت

$$\pi^{(n)}([f_{ij}]) (x_j)_{j=1}^n := [\pi(f_{ij})] (x_j)_{j=1}^n = \left(\sum_{j=1}^n \pi(f_{ij})(x_j) \right)_{i=1}^n \in E^{(n)}.$$

است. علاوه بر این، برای دو فضای باناخ E_1 و E_2 داریم

$$(E_1 \oplus_p E_2)^{(n)} = E_1^{(n)} \oplus_p E_2^{(n)},$$

و در نتیجه برای $T = T_1 \oplus_p T_2 : E_1 \oplus_p E_2 \rightarrow E_1 \oplus_p E_2$ رابطه

$$T^{(n)} = (T_1 \oplus_p T_2)^{(n)} = T_1^{(n)} \oplus_p T_2^{(n)}.$$

برقرار است.

تعریف ۵.۴. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده باشد.

۱. برای یک نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ دوتایی $(\pi^{(n)}, E^{(n)})$ را یک نمایش ماتریسی^۱ برای $L^1(G)$ روی (n) -تاب^۲ QSL_p -فضای E می‌نامیم.

۲. با توجه به نمادهای قبل، دوتایی (Θ, K) را یک نمایش ماتریسی دوری^۳ می‌نامیم، هرگاه زیر فضای بسته $K \subset E^{(n)}$ طوری باشد که عملگر تحدید $\Theta = \pi^{(n)}|_K$ یک نمایش ماتریسی از $(\mathbb{M}_n(L^1(G)))$ به توی $\mathcal{B}(K)$ بوده و برای یک عضو $x \in K$ داشته باشیم $\Theta(\mathbb{M}_n(L^1(G)))x = K$.

لم بعدی رابطه بین (n) -تاب نمایش‌های دوری و یک نمایش ماتریسی دوری را نشان می‌دهد.

لم ۶.۴. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده باشد و $1 < p < \infty$.

۱. اگر $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ نمایشی باشد که از l_p -جمع مستقیم نمایش‌های (π_1, E_1) و (π_2, E_2) به دست آمده است. آنگاه زیرنمایش‌های دوری نمایش (π, E) همان l_p -جمع مستقیم زیرنمایش‌های دوری (π_1, E_1) و (π_2, E_2) هستند و برعکس.

۲. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. اگر (ρ, F) یک زیرنمایش دوری از (π, E) باشد، آنگاه $(\rho^{(n)}, F^{(n)})$ یک زیرنمایش ماتریسی دوری از $(\pi^{(n)}, E^{(n)})$ است. علاوه بر این، اگر (Θ, K) یک نمایش ماتریسی دوری مشمول در $(\pi^{(n)}, E^{(n)})$ باشد، آنگاه زیرنمایش‌های دوری $(\rho_k, F_k)_{k=1}^n$ از نمایش (π, E) موجود هستند به طوری که $((\oplus_k \rho_k)^{(n)}, (\oplus_k F_k)^{(n)}) = (\Theta, K)$.

برهان. ۱. برای $k = 1, 2$ فرض کنید $(\rho_k, F_k) \subseteq (\pi_k, E_k)$ زیرنمایش دوری با بردار دوری x_k باشد. واضح است که $(\rho_1 \oplus \rho_2, F_1 \oplus F_2)$ یک زیرنمایش دوری از (π, E) با برداری دوری $x_1 \oplus x_2$ است. برای دیدن جزئیات، فرض کنید $y \in F_1 \oplus F_2$ به شکل $y_1 \oplus y_2$ باشد. آنگاه به دلیل دوری بودن نمایش (ρ_k, F_k) برای $k = 1, 2$

1. matrix representation
2. amplification
3. cyclic matrix representation

برای $\varepsilon > 0$ دلخواه، عضو $f_k \in L^1(G)$ موجود است به‌طوری‌که برای $k = 1, 2$ ،
 $\|\pi_k(f_k)x_k - y_k\| \leq \varepsilon$ در نتیجه داریم

$$\|\rho_1(f_1)x_1 \oplus \rho_2(f_2)x_2 - (y_1 \oplus y_2)\|^p = \|\pi_1(f_1)x_1 - y_1\|^p + \|\pi_2(f_2)x_2 - y_2\|^p$$

$$\leq 2\varepsilon^p.$$

از طرف دیگر،

$$\rho_1(f_1)x_1 \oplus \rho_2(f_2)x_2 \in \rho_1 \oplus \rho_2(L^1(G))(x_1 \oplus x_2).$$

در نتیجه فضای $\rho_1 \oplus \rho_2(L^1(G))(x_1 \oplus x_2)$ در فضای $F_1 \oplus F_2$ چگال است.
 حال برعکس، اگر $(\rho, F) \subset (\pi, E)$ یک نمایش دوری با بردار دوری $x = x_1 \oplus x_2$ در $E = E_1 \oplus E_2$ باشد، آنگاه

$$F = \overline{\rho(L^1(G))x} = \overline{\pi_1(L^1(G))x_1 \oplus \pi_2(L^1(G))x_2} \quad \text{و} \quad \rho = \pi|_F.$$

برای $k = 1, 2$ قرار دهید

$$F_k = \overline{\pi_k(L^1(G))x_k}, \quad \text{و} \quad \rho_k = \pi_k|_{F_k},$$

آنگاه برای $k = 1, 2$ یک نمایش (ρ_k, F_k) یک زیرنمایش دوری از نمایش (π_k, E_k) است.
 بنابراین نمایش $(\rho_1 \oplus \rho_2, F_1 \oplus F_2)$ یک زیرنمایش دوری از (π, E) است و $\rho_1 \oplus \rho_2 = \pi|_{F_1 \oplus F_2}$ حال محاسبات سراسر است زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} F &= \overline{\rho(L^1(G))(x_1 \oplus x_2)} = \overline{\pi(L^1(G))(x_1 \oplus x_2)} \\ &= \overline{\pi(L^1(G))x_1 \oplus \pi(L^1(G))x_2} \\ &= \overline{\pi_1(L^1(G))x_1 \oplus \pi_2(L^1(G))x_2} \\ &= \overline{\rho_1(L^1(G))x_1 \oplus \rho_2(L^1(G))x_2} \\ &= F_1 \oplus F_2. \end{aligned}$$

از این تساوی فضاها، تساوی $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ حاصل می‌شود.

۲. فرض کنید $(\rho, F) \subseteq (\pi, E)$ یک زیرنمایش دوری با بردار دوری $x \in F$ باشد.
 همچنین فرض کنید $\mathbf{y} \in F^{(n)}$ و $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ یک عضو دلخواه باشد. آنگاه
 برای $\varepsilon > 0$ داده شده، عضو $f_i \in L^1(G)$ برای $i = 1, \dots, n$ موجود است به‌طوری‌که

$$\|\rho(f_i)x - y_i\| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

قرار دهید

$$\mathbf{x} = (x, \circ, \dots, \circ), \quad F_{ij} = \begin{cases} f_i, & \text{if } j = 1 \\ \circ, & \text{if } j \neq 1 \end{cases}.$$

به سادگی مشاهده می شود که

$$\|\pi^{(n)}([F_{ij}])\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^p = \sum_{i=1}^n \|\rho(f_i)x - y_i\|^p \leq n\varepsilon^p,$$

در نتیجه تساوی $\overline{\rho^{(n)}(L^1(G))\mathbf{x}} = F^{(n)}$ حاصل می شود. برعکس فرض کنید (Θ, K) طوری باشد که $K \subset F^{(n)}$ یک زیرفضای بسته باشد و داشته باشیم $\Theta = \pi^{(n)}|_K$. همچنین بردار $\mathbf{x} \in K$ موجود باشد به طوری که

$$\overline{\Theta(\mathbb{M}_n(L^1(G)))\mathbf{x}} = K, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

زیرفضاهای بسته زیر را در نظر بگیرید

$$F_k = \overline{\pi(L^1(G))x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

همچنین برای $k = 1, \dots, n$ قرار دهید $\rho_k = \pi|_{F_k}$. حال ادعا می کنیم که تساوی $\Theta = (\oplus_{k=1}^n F_k)^{(n)}$ برقرار است، که نتیجه می دهد $\Theta = (\oplus_{k=1}^n \rho_k)^{(n)}$. در این مرحله توجه به ساختار فضاهای K و $\oplus_k F_k^{(n)}$ بسیار مهم است. چون فضای $\Theta(\mathbb{M}_n(L^1(G)))\mathbf{x}$ در فضای K چگال است و $\Theta = \pi^{(n)}|_K$ ، لذا فضای همه بردارها به شکل

$$\pi^{(n)}([f_{ij}])\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_j \pi(f_{1j})x_j \\ \vdots \\ \sum_j \pi(f_{ij})x_j \\ \vdots \\ \sum_j \pi(f_{nj})x_j \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

در فضای K چگال است. از طرف دیگر اگر برای $k = 1, \dots, n$ قرار دهیم

$$\mathbf{x}_k = (\circ, \dots, \circ, \underbrace{x_k}_{\text{م}-k}, \circ, \dots, \circ),$$

آنگاه داریم $\oplus_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. با توجه به این امر که فضای $\oplus_k F_k^{(n)}$ که فضای متناظر با نمایش دوری $\oplus_k \rho_k^{(n)}$ است، توسط بردار دوری $\oplus_k \mathbf{x}_k$ تولید شده است، در نتیجه این فضا بستار فضای همه بردارها به شکل

$$(\oplus_k \rho_k)^{(n)}([g_{ij}]) \oplus_k \mathbf{x}_k = \oplus_k ([\rho_k(g_{ij})] \mathbf{x}_k),$$

است که نمایش ماتریسی آن به صورت

$$\oplus_k \begin{bmatrix} \rho_k(g_{1k})x_k \\ \vdots \\ \rho_k(g_{ik})x_k \\ \vdots \\ \rho_k(g_{nk})x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \oplus_k \rho_k(g_{1k})x_k \\ \vdots \\ \oplus_k \rho_j(g_{ik})x_k \\ \vdots \\ \oplus_k \rho_k(g_{nk})x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k \pi(g_{1k})x_k \\ \vdots \\ \sum_k \pi(g_{ik})x_k \\ \vdots \\ \sum_k \pi(g_{nk})x_k \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

است.

در استدلال بالا از این حقیقت استفاده کردیم که برای $k = 1, \dots, n$ نمایش ρ_k تحدید نمایش π به فضای F_k است و در نتیجه از شکل ظاهری بردارهای دو فضای (۴.۴) و (۵.۴) تساوی $K = \oplus_k F_k^{(n)}$ برقرار است. در نتیجه

$$\Theta = \pi^{(n)}|_K = \pi^{(n)}|_{\oplus_k F_k^{(n)}} = \oplus_k \rho_k^{(n)}.$$

این اثبات را تمام می‌کند.

□

تذکر ۷.۴. نتیجه لم قبل این است که تناظری دوسویی بین (n) -تاب زیرنمایش‌های دوری و نمایش‌های ماتریسی دوری برقرار است. در نتیجه تعریف جدید ما از نمایش‌های ماتریسی دوری، یعنی تعریف ۵.۴- (۲)، بیان دیگری از (n) -تاب l_p -جمع مستقیم تعداد n زیرنمایش دوری است. در واقع لم ۶.۴ نقش ظریفی در کار با نرم‌های نمایش‌های ماتریسی به طور ضمنی ایفا می‌کند.

لم بعد به این جهت که فضای ماتریسی جبر p -شبه توابع را بهتر معرفی می‌کند، حائز اهمیت است.

لم ۸.۴. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. آنگاه تساوی طولپای زیر برقرار است

$$\overline{\pi^{(n)}(\mathbb{M}_n(L^\lambda(G)))}^{\|\cdot\|_{B(E^{(n)})}} = \mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G)).$$

برهان. فرض کنید $T = [T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G))$. چون که برای هر جفت اندیس (i, j) ، عملگر T_{ij} به فضای $PF_{p,\pi}(G)$ تعلق دارد، لذا برای $\varepsilon > 0$ داده شده یک عملگر $\pi(f_{ij})$ موجود است که برای آن داریم

$$\|T_{ij} - \pi(f_{ij})\| < \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

از طرف دیگر، برای هر ماتریس مانند $[x_{ij}]$ نامساوی $\| [x_{ij}] \|^p \leq \sum_{i,j} \|x_{ij}\|^p$ برقرار است که نتیجه می‌دهد

$$\|[T_{ij}] - [\pi(f_{ij})]\|^p = \| [T_{ij} - \pi(f_{ij})] \|^p \leq \sum_{i,j} \|T_{ij} - \pi(f_{ij})\|^p < \varepsilon.$$

و این یعنی فضای $\pi^{(n)}(\mathbb{M}_n(L^\lambda(G)))$ در فضای $\mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G))$ چگال است.

□

تذکر ۹.۴. برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ ، از لم ۸.۴ حکم

$$\overline{\pi^{(n)}(\mathbb{M}_n(L^\lambda(G)))}^{\|\cdot\|_{B(E^{(n)})}} = \mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G)) = \mathbb{M}_n(\overline{(\pi(L^\lambda(G)))}^{\|\cdot\|_{B(E)}})$$

نتیجه می‌شود، که به معنی عبور بستار با نرم $\|\cdot\|_{B(E)}$ از صورت های ماتریسی است.

در ادامه به تعریف جبرهای QSL_p -عملگری، مشابه جبرهای L^p -عملگری در مرجع [۳۲] می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم که جبر p -شبه توابع، یک جبر QSL_p -عملگری است.

تعریف ۱۰.۴. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد.

۱. یک نمایش برای $\mathcal{A}$ روی QSL_p -فضای E یک نگاشت همریختی انقباضی، به فرم $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow B(E)$ است.

۲. می‌گوییم نمایش $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow B(E)$ ناتبهگون (ضروری) است، هرگاه مجموعه

$$\text{span}\{\Pi(a)\xi : a \in \mathcal{A}, \xi \in E\},$$

در فضای E چگال باشد.

۳. یک نمایش ضروری مانند $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(E)$ روی QSL_p -فضای E را وفادار^۱ گوئیم هرگاه یک‌به‌یک^۲ باشد.

۴. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را یک جبر QSL_p -عملگری گوئیم، هرگاه QSL_p -فضای E و یک همریختی طولی مانند $\Pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(E)$ وجود داشته باشد.

همچنین می‌توان وجود یک نمایش وفادار و طولی روی یک QSL_p -فضا مانند E را با قسمت ۴ تعریف فوق معادل دانست.

گزاره بعدی گام اول به سمت تعریف ساختار فضای p -عملگری برای فضای $B_p(G)$ است. در ابتدا به این امر که جبر $PF_{p,\pi}(G)$ یک جبر QSL_p -عملگری است، می‌پردازیم.

گزاره ۱۱.۴. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ ، در این صورت جبر $PF_{p,\pi}(G)$ ، شامل p -شبه توابع متناظر با نمایش (π, E) از گروه موضعاً فشرده G ، یک جبر QSL_p -عملگری است.

برهان. برای اثبات این ادعا بنابر تعریف ۱۰.۴- (۴) باید وجود یک نمایش طولی برای جبر باناخ $PF_{p,\pi}(G)$ را نشان دهیم. فرض کنید $g \in L^1(G)$ و $r \in \mathbb{N}$. از لم ۱.۴ می‌دانیم که زیرنمایش دوری $(\pi_{g,r}, E_{g,r})$ از نمایش (π, E) با بردار دوری $\xi_{g,r}$ موجود است به‌طوری‌که

$$\|\pi_{g,r}(g)\xi_{g,r}\| > \|\pi(g)\| - \frac{1}{r}, \quad \|\xi_{g,r}\| \leq 1.$$

حال l_p -جمع مستقیم زیرنمایش‌های دوری ذکر شده در بالا را در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{E} = l_p - \oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} E_{g,r} \quad \Pi = l_p - \oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} \pi_{g,r}. \quad (6.4)$$

هر عضو $x \in \mathcal{E}$ دارای نمایش شمارا بوده که به شکل $x = \oplus_{k=1}^{\infty} \oplus_{r=1}^{\infty} x_{g_k,r}$ است. همچنین $\|x\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \|x_{g_k,r}\|^p$. حال برای عضو دلخواه $f \in L^1(G)$ مقدار $\|\Pi(f)\|$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به رابطه (۶.۴) عملگر $\Pi(f)$ به صورت

$$\Pi(f) = \oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} \pi_{g,r}(f).$$

-
1. faithful
 2. injective

است. با استفاده از گزاره ۴.۴ برای محاسبه نرم $\|\Pi(f)\|$ ، رابطه مهم زیر را داریم

$$\|\Pi(f)\|^p = \sup_{\sum_{k,r} \|x_{g_k,r}\|^p \leq 1} \left\{ \sum_{k,r} \|\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r}\|^p : x = \oplus_{k,r} x_{g_k,r} \in \mathcal{E} \right\}. \quad (۷.۴)$$

باید نشان دهیم که $(\Pi, \mathcal{E})$ یک نمایش طولپا برای $PF_{p,\pi}(G)$ به توی یک زیرجبر بسته از $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ است. برای این منظور، کار را با زیرفضای چگال $\pi(L^1(G))$ از فضای $PF_{p,\pi}(G)$ شروع می‌کنیم. فرض کنید $f \in L^1(G)$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند. آنگاه با استفاده از رابطه (۷.۴) بردار $x = \oplus_{k,r} x_{g_k,r} \in \mathcal{E}$ موجود است به‌طوری‌که

$$\|\Pi(f)\|^p - \varepsilon < \sum_{k,r} \|\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r}\|^p, \quad \text{و} \quad \sum_{k,r} \|x_{g_k,r}\|^p \leq 1.$$

همچنین هر $\pi_{g_k,r}$ تحدید π به زیرفضای بسته $E_{g_k,r}$ است و در نتیجه روابط زیر را داریم:

$$\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r} = \pi(f)x_{g_k,r}, \quad \text{و} \quad \|\pi_{g_k,r}(f)\| \leq \|\pi(f)\|.$$

با استفاده از حکم اخیر و محاسبات زیر

$$\begin{aligned} \|\Pi(f)\|^p - \varepsilon &< \sum_{k,r} \|\pi_{g_k,r}(f)x_{g_k,r}\|^p \\ &\leq \sum_{k,r} \|\pi_{g_k,r}(f)\|^p \|x_{g_k,r}\|^p \\ &\leq \sum_{k,r} \|\pi(f)\|^p \|x_{g_k,r}\|^p \\ &\leq \|\pi(f)\|^p \sum_{k,r} \|x_{g_k,r}\|^p \\ &\leq \|\pi(f)\|^p, \end{aligned}$$

و چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است، پس $\|\Pi(f)\| \leq \|\pi(f)\|$.

توجه کنید که چون π یک همریختی انقباضی است، در نتیجه بنابر نامساوی اخیر همریختی Π نیز چنین است.

برعکس، اگر با توجه به (۶.۴) برای $m \in \mathbb{N}$ بردار $x_m = \oplus_{k,r} x_{g_k,r}^{(m)} \in \mathcal{E}$ را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم

$$x_{g_k,r}^{(m)} = \begin{cases} \xi_{f,m}, & \text{اگر } k=1, r=m \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad (۸.۴)$$

آنگاه به سادگی دیده می‌شود که $\|x_m\| \leq 1$ و

$$\|\Pi(f)\| \geq \|\Pi(f)x_m\| = \|\pi_{f,m}(f)\xi_{f,m}\| > \|\pi(f)\| - \frac{1}{m},$$

و بنابراین $\|\Pi(f)\| \geq \|\pi(f)\|$.

در نتیجه نگاشت $\Pi : \pi(L^1(G)) \rightarrow B(\mathcal{E})$ یک نمایش طولپا و قابل توسیع به صورت طولپا از $PFp,\pi(G)$ به توی یک زیرجبر بسته فضای $B(\mathcal{E})$ است و این حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

لم ۱۲.۴. فرض کنید نمایش $(\Pi, \mathcal{E})$ همانند (۶.۴) باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} (\oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} \pi_{g,r})^{(n)} &= \Pi^{(n)} = \oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} \pi_{g,r}^{(n)}, \\ (\oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} E_{g,r})^{(n)} &= \mathcal{E}^{(n)} = \oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} E_{g,r}^{(n)}. \end{aligned}$$

برهان. ادعای مطرح شده روی اندیس‌ها، با استفاده از قسمت (۲) از لم ۶.۴ ابتدا برای تعداد شمارا و سپس برای تعداد دلخواه، حاصل می‌شود. در اینجا ایده کلی کار را بیان می‌کنیم. در ابتدا به بردارهای فضای $\mathcal{E}^{(n)}$ می‌پردازیم. فرض کنید

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}^{(n)} = \left(\oplus_{g \in L^1(G)} \oplus_{r=1}^{\infty} E_{g,r} \right)^{(n)}.$$

حال برای هر $j = 1, \dots, n$ فرض کنید $\oplus_{k,r} x_{g_k,r}^j \in \oplus_{k,r} E_{g_k,r}^j$ ، نمایش شمارا برای x_j باشد. در این صورت با اضافه کردن مولفه‌های صفر در صورت نیاز به این نمایش و با مرتب سازی مجدد آنها، می‌توانیم فرض کنیم $\oplus_{k,r} E_{g_k,r}^j = \oplus_{k,r} E_{g_k,r}$. یعنی می‌توان فرض کرد که همه مولفه‌های x_j برای $j = 1, \dots, n$ به‌طور مشترک از یک جمع مستقیم شمارا از زیرفضاها می‌آیند. در همین راستا، نمایش نظیر آن را می‌توان به‌جای در نظر گرفتن n نمایش متمایز از

l_p -جمع مستقیم شمارای نمایش ها به صورت $\oplus_{k,r} \pi_{g_k,r}^j$ برای $j = 1, \dots, n$ ، به صورت $\oplus_{k,r} \pi_{g_k,r}$ در نظر گرفت. در نتیجه چنین تغییری در ظاهر مولفه های x_j و با کمک تساوی

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\oplus_{k,r} x_{g_k,r}^1, \dots, \oplus_{k,r} x_{g_k,r}^n \right) = \oplus_{k,r} (x_{g_k,r}^1, \dots, x_{g_k,r}^n), \quad (9.4)$$

تساوی $(\oplus_{k,r} E_{g_k,r})^{(n)} = \oplus_{k,r} E_{g_k,r}^{(n)}$ حاصل می شود. بنابراین $\mathcal{E}^{(n)} = \oplus_{g,r} E_{g,r}^{(n)}$ همچنین برای یک نمایش شمارا از بردار $\mathbf{x}$ داریم

$$\Pi^{(n)}([f_{ij}])\mathbf{x} = (\oplus_{k,r} \pi_{g_k,r})^{(n)}([f_{ij}])\mathbf{x} = \oplus_{k,r} \pi_{g_k,r}^{(n)}([f_{ij}])\mathbf{x}, \quad (10.4)$$

و نتیجه می دهد که برای هر تعداد شمارا داریم $(\oplus_{k,r} \pi_{g_k,r})^{(n)} = \oplus_{k,r} \pi_{g_k,r}^{(n)}$. بنابراین $\Pi^{(n)} = \oplus_{g,r} \pi_{g,r}^{(n)}$ به دست می آید. $\square$

تذکر ۱۳.۴. توجه می کنیم که قسمت (۲) از لم ۶.۴ تضمین می کند که برای نمایش $(\Pi^{(n)}, \mathcal{E}^{(n)})$ ، عدد کاردینال فضای $\mathcal{E}^{(n)}$ از عدد کاردینال فضای $\mathcal{E}$ بیشتر نیست.

در مرحله بعد گزاره ای را ارائه می کنیم که در واقع حالت ماتریسی گزاره ۱۱.۴ است.

گزاره ۱۴.۴. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ و $(\Pi, \mathcal{E})$ نمایش طولپای (۶.۴) برای جبر $PF_{p,\pi}(G)$ باشد. آنگاه نمایش ماتریسی $(\Pi^{(n)}, \mathcal{E}^{(n)})$ ، یک نمایش طولپای از $\mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G))$ روی یک زیرفضای بسته از $\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{B}(\mathcal{E}^{(n)})$ است.

برهان. برای $n \in \mathbb{N}$ نگاشت (n) -تا شده زیر، تعریف شده بر زیرفضای $\mathbb{M}_n(L^1(G))$ را در نظر می گیریم. توجه می کنیم که بنابر لم ۸.۴ زیرفضای $\mathbb{M}_n(L^1(G))$ در فضای $\mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G))$ چگال است.

$$\Pi^{(n)} : \pi^{(n)}(\mathbb{M}_n(L^1(G))) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{B}(\mathcal{E}^{(n)}), \quad \Pi^{(n)}([\pi(f_{ij})]) = [\Pi(f_{ij})].$$

باید نشان دهیم $\|[\Pi(f_{ij})]\| = \|[\pi(f_{ij})]\|$. ابتدا توجه می کنیم که برای یک ماتریس $[f_{ij}]$ نرم $\|[\Pi(f_{ij})]\|$ را می توان از طریق توضیحات موجود در اثبات لم ۱۲.۴ و گزاره ۴.۴ و با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد

$$\|[\Pi(f_{ij})]\|^p = \sup \left\{ \sum_{k,r} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi_{g_k,r}(f_{ij}) x_{g_k,r}^j \right\|^p : \sum_{j=1}^n \sum_{k,r} \|x_{g_k,r}^j\|^p \leq 1 \right\}. \quad (11.4)$$

در نتیجه برای عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ ، بردار $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^{(n)}$ همانند (۹.۴) با نرم $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ موجود است به‌طوری‌که داریم

$$\|\mathbf{x}\|^p = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p < \sum_{j=1}^n \sum_{k,r} \|x_{g_k,r}^j\|^p + \varepsilon.$$

همچنین به کمک رابطه (۱۱.۴) نامساوی زیر را داریم

$$\|\Pi(f_{ij})\|^p - \varepsilon < \sum_{k,r} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi_{g_k,r}(f_{ij}) x_{g_k,r}^j \right\|^p.$$

از طرف دیگر به این دلیل که برای هر k, r ، و f_{ij} عملگر $\pi_{g_k,r}(f_{ij})$ تحدید عملگر $\pi(f_{ij})$ به فضای $E_{g_k,r}$ است، لذا $\pi_{g_k,r}(f_{ij}) x_{g_k,r}^j = \pi(f_{ij}) x_{g_k,r}^j$ ، حال اگر برای $j = 1, \dots, n$ قرار دهیم $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ و $y_j = \bigoplus_{k,r} x_{g_k,r}^j$ ، آنگاه

$$\|\mathbf{y}\|^p = \sum_{j=1}^n \|y_j\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \|x_{g_k,r}^j\|^p \leq 1,$$

و مشابه استدلال گزاره ۱۱.۴ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|\Pi(f_{ij})\|^p - \varepsilon &< \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi_{g_k,r}^j(f_{ij}) x_{g_k,r}^j \right\|^p \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi(f_{ij}) y_j \right\|^p \\ &= \|\pi(f_{ij})\mathbf{y}\|^p \\ &\leq \|\pi(f_{ij})\|^p \|\mathbf{y}\|^p \\ &\leq \|\pi(f_{ij})\|^p, \end{aligned}$$

و در نتیجه $\|\Pi(f_{ij})\| \leq \|\pi(f_{ij})\|$.

برای حالت عکس، از تعریف نرم یک عضو مانند $[\pi(f_{ij})]$ استفاده می‌کنیم. برای عدد دلخواه $m \in \mathbb{N}$ ، برداری مانند

$$\mathbf{y}^m = (y_j^m)_{j=1}^n = (y_1^m, \dots, y_n^m) \in E^{(n)},$$

وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|\mathbf{y}^m\|^p = \|(y_j^m)_{j=1}^n\|^p = \|(y_1^m, \dots, y_n^m)\|^p = \sum_{j=1}^n \|y_j^m\|^p \leq 1,$$

و داریم

$$\|[\pi(f_{ij})]\|^p - \frac{1}{m} < \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi(f_{ij}) y_j^m \right\|^p.$$

حال مشابه با آنچه برای $n = 1$ در رابطه (۸.۴) رخ داد، برای عدد دلخواه $m \in \mathbb{N}$ ذکر شده در بالا، بردار $\mathbf{x}^m \in \mathcal{E}^{(n)}$ را به صورت زیر می‌سازیم

$$\mathbf{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) = \left(\oplus_{k,r} x_{g_k,r}^{m,1}, \dots, \oplus_{k,r} x_{g_k,r}^{m,n} \right) = \oplus_{k,r} (x_{g_k,r}^{m,1}, \dots, x_{g_k,r}^{m,n}).$$

برای هر $j = 1, \dots, n$ قرار دهید

$$x_{g_k,r}^{m,j} = \begin{cases} y_j^m, & \text{اگر } k=1, r=m \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

آنگاه

$$\|\mathbf{x}^m\|^p = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \|x_{g_k,r}^{m,j}\|^p = \sum_{j=1}^n \|y_j^m\|^p \leq 1.$$

علاوه بر این، با توجه به رابطه (۱۱.۴) و رابطه اخیر داریم

$$\begin{aligned} \|[\Pi(f_{ij})]\|^p &\geq \sum_{k,r} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi_{g_k,r}^{m,j}(f_{ij}) x_{g_k,r}^{m,j} \right\|^p \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \pi(f_{ij}) y_j^m \right\|^p \\ &> \|[\pi(f_{ij})]\|^p - \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

و چون عدد m دلخواه است، لذا نامساوی عکس به صورت $\|\Pi(f_{ij})\| \geq \|\pi(f_{ij})\|$ نتیجه می‌شود. بنابراین ثابت کردیم که نگاشت $\Pi^{(n)} : \mathbb{M}_n(\pi(L^1(G))) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E}^{(n)})$ یک نمایش طولپا و قابل توسیع به کل $\mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G))$ از طریق لم ۸.۴ و مشابه حالت $n = 1$ در گزاره ۱۱.۴ است. در نتیجه نگاشت

$$\Pi : PF_{p,\pi}(G) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E}), \quad \pi(f) \mapsto \Pi(f),$$

یک نگاشت p -کاملاً طولپا است. $\square$

قضیه ۱۵.۴. برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ جبر p -شبه توابع $PF_{p,\pi}(G)$ یک فضای p -عملگری است.

برهان. از گزاره‌های ۱۱.۴ و ۱۴.۴ می‌دانیم که جبر $PF_{p,\pi}(G)$ با یک زیرجبر بسته از فضای $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ به طور p -کاملاً طولپا یکرخت است. به‌وضوح این همان تعریف یک فضای p -عملگر مجرد^۱ (تعریف ۸۹.۲) است. $\square$

۳.۴ ساختار فضای p -عملگری جبر $B_p(G)$

در این بخش تلاش می‌کنیم که رابطه بین جبرهای p -شبه توابع متناظر با نمایش‌های موجود در $\text{Rep}_p(G)$ را نشان دهیم. سپس ثابت می‌کنیم که نرم‌های ماتریسی از بعد n بدست آمده برای نمایش‌های p -جامع یکسان هستند و این یعنی جبر جامع p -شبه توابع در حالت ماتریسی مستقل از انتخاب نمایش p -جامع است. در آخر نشان می‌دهیم که ساختار فضای p -عملگری روی جبر $B_p(G)$ خوش‌تعریف است. قدم اول به سمت هدف اصلی این بخش گزاره ساده زیر است.

گزاره ۱۶.۴. اگر دو نمایش گروهی (π, E) و (ρ, F) از $\text{Rep}_p(G)$ از طریق نگاشت طولپا و وارون پذیر $T : E \rightarrow F$ هم‌ارز باشند، آنگاه هم ارزی $(\rho^{(n)}, F^{(n)}) \sim (\pi^{(n)}, E^{(n)})$ از طریق نگاشت طولپا و وارون پذیر $T^{(n)} : E^{(n)} \rightarrow F^{(n)}$ که $T^{(n)}$ -تاب نگاشت T است، حاصل می‌شود. در نتیجه جبرهای $PF_{p,\pi}(G)$ و $PF_{p,\rho}(G)$ به طور p -کاملاً طولپا یکرخت هستند.

1. abstract p -operator space

برهان. درستی اینکه نگاشت $T^{(n)} : E^{(n)} \rightarrow F^{(n)}$ یک نگاشت وارون پذیر و طولپا با نگاشت وارون $(T^{(n)})^{-1} = (T^{-1})^{(n)}$ است، امری واضح است و این خواص از طریق نگاشت T به راحتی قابل انتقال است. نگاشت $\Phi : PF_{p,\pi}(G) \rightarrow PF_{p,\rho}(G)$ را با ضابطه $\Phi(\pi(f)) = \rho(f)$ تعریف می‌کنیم. چون نگاشت T یک نگاشت طولپا و وارون پذیر است، نگاشت Φ یک یکرختی طولپا است. حال (n) -تاب این نگاشت یعنی $\Phi^{(n)} : \mathbb{M}_n(PF_{p,\pi}(G)) \rightarrow \mathbb{M}_n(PF_{p,\rho}(G))$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این نگاشت نیز به این دلیل که نگاشت $T^{(n)}$ یک نگاشت وارون پذیر و طولپا است، یک یکرختی طولپا است و این یعنی دو جبر $PF_{p,\pi}(G)$ و $PF_{p,\rho}(G)$ به صورت p -کاملاً طولپا از طریق نگاشت Φ یکرخت هستند. $\square$

لم بعد تضمین می‌کند که اگر نمایشی دوری مشمول در نمایش دیگر باشد، همچنان به عنوان یک زیرنمایش دوری رفتار می‌کند.

لم ۱۷.۴. اگر $(\pi_\xi, E_\xi) \sim (\rho, F)$ نمایش دوری و هم ارزی $(\pi_\xi, E_\xi) \sim (\rho, F)$ برقرار باشد، آنگاه نمایش (ρ, F) نیز دوری است.

برهان. بنابر هم ارزی $(\pi_\xi, E_\xi) \sim (\rho, F)$ ، نگاشت طولپا و وارون پذیر $T : E_\xi \rightarrow F$ موجود است به طوری که برای هر عضو $f \in L^1(G)$ داریم $T \circ \pi_\xi(f) = \rho(f) \circ T$. فرض کنید که تور $(e_i)_{i \in \Lambda}$ یک یکه تقریبی کراندار $L^1(G)$ باشد. قرار دهید

$$\phi = T\xi = T(\lim_{i \in \Lambda} \pi_\xi(e_i)\xi),$$

در نتیجه $\phi \in F$. حال فرض کنید که $\phi' \in F$ یک بردار دلخواه باشد. چون نگاشت T یک طولپایی وارون پذیر است، آنگاه بردار یکتای $\xi' \in E_\xi$ موجود است به طوری که $T\xi' = \phi'$. حال چون $\xi' \in E_\xi$ و نمایش (π_ξ, E_ξ) دوری است، لذا یک تور مانند $(\pi_\xi(f_i)\xi)_{i \in \Lambda}$ موجود است به طوری که $\xi' = \|\cdot\|_{E_\xi} - \lim_{i \in \Lambda} \pi_\xi(f_i)\xi$ داریم.

$$\begin{aligned} \phi' &= T\xi' = T(\lim_{i \in \Lambda} \pi_\xi(f_i)\xi) \\ &= \lim_{i \in \Lambda} T(\pi_\xi(f_i)\xi) \\ &= \lim_{i \in \Lambda} \rho(f_i)T\xi \\ &= \lim_{i \in \Lambda} \rho(f_i)\phi. \end{aligned}$$

روابط بالا به این معنی است که بردار $\phi' \in F$ توسط بردار $\phi = T\xi$ تقریب زده می‌شود و از دلخواه بودن بردار ϕ' داریم $\rho = \rho_\phi$ و $F = F_\phi$. تساوی بالا به معنی دوری بودن نمایش $(\rho, F) = (\rho_\phi, F_\phi)$ توسط ϕ است. $\square$

نتیجه ۱۸.۴. اگر نمایش (π, E) شامل نمایش (ρ, F) باشد، آنگاه نمایش (π, E) شامل همه زیرنمایش‌های دوری نمایش (ρ, F) به عنوان زیرنمایش‌های دوری خود است.

گزاره ۱۹.۴. اگر نمایش (ρ, F) یک زیرنمایش (π, E) باشد، آنگاه نگاشت طبیعی

$$\Psi : PF_{p,\pi}(G) \rightarrow PF_{p,\rho}(G),$$

با ضابطه $\Psi(\pi(f)) = \rho(f)$ برای $f \in L^1(G)$ یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است.

برهان. انقباضی بودن این نگاشت واضح است. فرض کنید دو نمایش $(\Pi, \mathcal{E})$ و $(\Theta, \mathcal{F})$ دو نمایش متناظر با (π, E) و (ρ, F) مشابه با (۶.۴) باشند. آنگاه به وضوح

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E} \quad \text{و} \quad \Theta = \Pi|_{\mathcal{F}}.$$

همچنین بنابر نتیجه ۱۸.۴ نمایش (π, E) شامل تمامی زیرنمایش‌های دوری نمایش (ρ, F) است که در نتیجه حکم حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۲۰.۴. جبر جامع p -شبه توابع $UPF_p(G)$ یک فضای p -عملگری مجرد و مستقل از انتخاب نمایش p -جامع است.

برهان. از قضیه ۱۵.۴ نتیجه می‌شود که فضای $UPF_p(G)$ یک فضای p -عملگری است و گزاره ۱۹.۴ ایجاب می‌کند که این فضا مستقل از انتخاب نمایش p -جامع است. $\square$

در آخر این فصل با استفاده از ساختار p -عملگری جبر $UPF_p(G)$ به یک ساختار p -عملگری برای جبر $B_p(G)$ می‌رسیم. برای این منظور، چند نماد را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ یک نمایش p -جامع باشد. آنگاه از قضیه ۱۳۱.۳ دوگانی بین $UPF_p(G)$ و $B_p(G)$ به صورت زیر است

$$\langle \pi(f), u \rangle = \int_G f(x)u(x)dx = \langle \pi(f)\xi_u, \eta_u \rangle, \quad f \in L^1(G), \quad u \in B_p(G).$$

حال برای ماتریس‌های $U = [u_{ij}]$ در $\mathbb{M}_m(B_p(G))$ و $F = [\pi(f_{st})]$ در $\mathbb{M}_n(UPF_p(G))$ رابطه دوگانی به شرح زیر است

$$\langle\langle[\pi(f_{st})], [u_{ij}]\rangle\rangle = \langle\langle F, U \rangle\rangle := (\langle\pi(f_{st}), u_{ij}\rangle)_{(s,i),(t,j)} \in \mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_n,$$

و نرم عضو $U = [u_{ij}]$ در $\mathbb{M}_m(B_p(G))$ از رابطه

$$\begin{aligned} \|U\| &= \sup_{\|[\pi(f_{st})]\|=1} \left\{ |\langle\langle[\pi(f_{st})], [u_{ij}]\rangle\rangle| : n \in \mathbb{N}, [\pi(f_{st})] \in \mathbb{M}_n(UPF_p(G)) \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle\langle F, U \rangle\rangle| : n \in \mathbb{N}, F \in \mathbb{M}_n(UPF_p(G)), \|F\| = 1 \right\}, \end{aligned}$$

قابل محاسبه است. علاوه بر این، برای $u \in B_p(G)$ منظور از $\mathbf{u}_n$ عملگر زیر است

$$\mathbf{u}_n : \mathbb{M}_n(UPF_p(G)) \rightarrow \mathcal{B}(l_p^n), \quad \mathbf{u}_n([\pi(f_{st})]) = (\langle\pi(f_{st}), u\rangle),$$

تابع u به عنوان یک عملگر p -کاملاً کراندار روی $UPF_p(G)$ عمل می‌کند که آن را با نماد $\mathbf{u}$ نشان می‌دهیم. همچنین، از لم ۹۳.۲ داریم $\|\mathbf{u}\|_{p\text{-cb}} = \|u\|_{B_p(G)}$. همچنین، نرم یک عضو مانند $F = [\pi(f_{st})] \in \mathbb{M}_n(UPF_p(G))$ از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup \left\{ \left(\sum_{s=1}^n \left\| \sum_{t=1}^n \langle\pi(f_{st})\xi_t\rangle^p \right\| \right)^{\frac{1}{p}} : \sum_{t=1}^n \|\xi_t\|^p \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \langle\pi(f_{st})\xi_t, \eta_s\rangle \right| : \sum_{t=1}^n \|\xi_t\|^p \leq 1, \sum_{s=1}^n \|\eta_s\|^{p'} \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

که در آن بردارهای $(\xi_t)_{t=1}^n$ و $(\eta_s)_{s=1}^n$ به ترتیب به فضای $E^{(n)}$ و $E^{*(n)}$ تعلق دارند. علاوه بر این، برای عضو $\pi(f) \in UPF_p(G)$ منظور از نماد $\pi(\mathbf{f})_n$ نگاشت

$$\pi(\mathbf{f})_n : E^{(n)} \rightarrow E^{(n)}, \quad \pi(\mathbf{f})_n((\xi_{j=1})_{j=1}^n) = (\pi(f)\xi_1, \dots, \pi(f)\xi_n),$$

است. همچنین عملگر $\pi_\infty(f) : l_p(\mathbb{N}, E) \rightarrow l_p(\mathbb{N}, E)$ را با نماد $\pi(\mathbf{f})$ نشان می‌دهیم. داریم $\|\pi(\mathbf{f})\|_n \leq \|\pi(f)\|$ و این رابطه نامساوی $\|\pi(\mathbf{f})\| = \|\pi_\infty(f)\|$ را نتیجه می‌دهد.

به عنوان نتیجه ای از قضیه بالا قضیه مهم بعدی را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲۱.۴. برای عدد $p \in (1, \infty)$ جبر باناخ $B_p(G)$ یک فضای p -عملگری است.

برهان. بنابر قضیه ۲۰.۴ جبر $UPF_p(G)$ عملگری است و در نتیجه با استفاده از قضایای ۹۴.۲ و ۱۳۱.۳ حکم ثابت می‌شود. $\square$

گزاره بعدی نتیجه‌ای از همه مفاهیم گفته شده در گذشته است.

گزاره ۲۲.۴. برای گروه موضعاً فشرده G و $p \in (1, \infty)$ یکسانی $B_p(G) = UPF_p(G)^*$ یک یکرختی p -کاملاً طولپا است.

نتایج این فصل را می‌توان سرآغاز راه رویارویی با مسائل مربوط به p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس دانست. به عنوان کاربرد اصلی این مفاهیم، تعمیمی از تحقیقاتی که توسط مونیکا ایلی انجام شده است، در فصل‌های بعدی برای فضای $B_p(G)$ ارائه می‌شوند.

همریختی‌های وزنی p - کاملاً کراندار روی p - صورت جبرهای فوریه اشتیل یس

در این فصل از کتاب برای گروه موضعاً فشرده G برخی از ویژگی‌های بنیادی جبرهای فوریه اشتیل یس $B(G)$ را برای p - صورت جبرهای فوریه اشتیل یس، $B_p(G)$ ، تعمیم می‌دهیم. در گام نخست خودتوان‌های $B(G)$ را به خودتوان‌های $B_p(G)$ مرتبط می‌کنیم. در واقع در قضیه ۲.۵ قضیه خودتوان‌های جبر فوریه اشتیل یس که در کلی‌ترین حالت در [۵۷] آمده است را تعمیم می‌دهیم. سپس در تعریف ۵.۵ با معرفی p - صورت فضاها π - فوریه A_π ، معرفی شده توسط آرساک^۲ در [۷]، اولین قدم اصلی این فصل را برمی‌داریم. در گام بعدی با استفاده از ویژگی‌های ابرفیلترها، ارتباط بین دوگان جبر p - شبه توابع، $PF_{p,\pi}(G)$ ، و p - صورت فضای π - فوریه، $A_{p,\pi}$ ، را به طور کامل مورد بررسی قرار می‌دهیم. سرانجام، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های بنیادی و کاربردی p - صورت جبرهای فوریه اشتیل یس را به اثبات می‌رسانیم. در حقیقت در گزاره ۱۷.۵ توسیع توابع موجود در جبر $B_p(G_0)$ را به اعضای جبر $B_p(G)$ مرتبط می‌کنیم، که در آن زیرگروه G_0 از گروه موضعاً فشرده G باز و میانگین پذیر است. سرانجام به

عنوان کاربردی از این گزاره، قضیه مهم ۱۹.۵ را بیان و اثبات می‌کنیم که گام مهمی در راستای مواجهه با مسائل مربوط به همریختی‌های انقباضی روی p -صورت جبرهای فوریه اشتیلیس است.

۱.۵ قضیه خودتوان

در این بخش به تعمیم قضیه خودتوان‌های جبرهای فوریه اشتیلیس می‌پردازیم. بنابر تحقیقات پیشین می‌دانیم که توابعی مانند $u \in B(G)$ که دارای خاصیت خودتوانی هستند، یعنی $u^2 = u$ همان توابع مشخصه همدسته‌های باز زیرگروه‌های گروه G هستند. در این بخش می‌خواهیم توابع خودتوان جبر $B_p(G)$ را معرفی کنیم. به این منظور از مفاهیم مربوط در بخش ۱.۲ کمک می‌گیریم. در واقع، با استفاده از حقایق یاد شده در مورد فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب و هموار، ادعای زیر را داریم.

نتیجه ۱.۵. هر QSL_p -فضای یک فضای به طور یکنواخت محدب و هموار است.

برهان. می‌دانیم L^p -فضاها به طور یکنواخت محدب هستند. همچنین بنابر قسمت ۲ از ملاحظه ۱۵.۲، نتیجه می‌شود که QSL_p -فضای E به فرم E_1/E_2 است که در آن $E_2 \subseteq E_1 \subseteq L^p(X)$ ، به طور یکنواخت محدب است. چون فضای E فضای خارج قسمتی زیرفضای بسته E_1 از $L^p(X)$ -فضای $L^p(X)$ است، حکم حاصل می‌شود. حال چون فضای E به طور یکنواخت محدب است، لذا از قسمت ۳ از ملاحظه ۱۵.۲ نتیجه می‌شود که فضای E^* ، فضای دوگان فضای E ، یک فضای هموار است. اما فضای E^* خود یک QSL_p -فضا است و در نتیجه بنابر قسمت اول اثبات به طور یکنواخت محدب نیز است. به طور مشابه نتیجه می‌شود که فضای E^{**} ، فضای دوگان E^* یک فضای هموار است. حال به دلیل بازتابی بودن QSL_p -فضاها داریم، $E = E^{**}$ و این یعنی فضای E هموار است. $\square$

حال با استفاده از نتیجه قبل، خودتوان‌های جبر $B_p(G)$ را معرفی می‌کنیم.

قضیه ۲.۵. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. برای یک زیرمجموعه مانند $C \subseteq G$ گزاره‌های زیر معادل هستند.

۱. مجموعه C یک همدسته چپ و باز است.

۲. تابع مشخصه χ_C به فضای $B(G)$ متعلق است و داریم $\|\chi_C\|_{B(G)} = 1$.

۳. تابع مشخصه $\chi_C \neq 0$ نرمال شده یک تابع ضریب از یک نمایش (π, E) است که در آن فضای E و یا دوگان آن E^* یک فضای هموار است.

۴. تابع مشخصه χ_C به فضای $B_p(G)$ متعلق است و داریم $\|\chi_C\|_{B_p(G)} = 1$.

برهان. هم ارز بودن سه گزاره اول در [۵۷] نشان داده شده است. در اینجا ادعای مورد نظر را به ترتیب $(۳) \Rightarrow (۴) \Rightarrow (۲)$. نشان می‌دهیم. فرض کنید گزاره (۲) برقرار باشد. آنگاه از این حقیقت که شمول $B(G) \subseteq B_p(G)$ انقباضی است نتیجه می‌شود که

$$\chi_C \in B_p(G) \quad \text{و} \quad \|\chi_C\|_{B_p(G)} \leq 1.$$

اکنون با استفاده از نامساوی $\|\cdot\|_{C_b(G)} \leq \|\cdot\|_{B_p(G)}$ ، تساوی $\|\chi_C\|_{B_p(G)} = 1$ حاصل می‌شود که به معنی نتیجه شدن قسمت (۴) از (۲) است. حال فرض کنید گزاره (۴) برقرار باشد یعنی $\chi_C \in B_p(G)$ و $\|\chi_C\|_{B_p(G)} = 1$. بنابر تعریف $B_p(G)$ ، تابع مشخصه χ_C نرمال شده تابع ضریب یک نمایش (طولیا) از گروه G به روی یک QSL_p -فضا است که بنابر نتیجه ۱.۵ به معنی برقراری گزاره (۳) است. $\square$

تذکر ۳.۵. با توجه به قضیه قبل، اعضای خودتوان دو جبر $B(G)$ و $B_p(G)$ یکسان هستند.

در ادعای بعدی، نتیجه ای کلیدی در مورد تابع مشخصه یک مجموعه که به حلقه همه همدسته‌های باز از زیرگروه‌های باز از G یعنی

$$\Omega_0(G) = \left\{ Y \setminus \bigcup_{i=1}^n Y_i : \begin{array}{l} Y, \text{ همدسته باز برای } H, \\ Y_1, \dots, Y_n \text{ زیرهمدسته‌های باز } Y \text{ با اندیس نامتناهی} \end{array} \right\}, \quad (۱.۵)$$

تعلق دارد، ارائه می‌کنیم.

نتیجه ۴.۵. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $Y \in \Omega_0(G)$. در این صورت $\chi_Y \in B_p(G)$ و

$$1 \leq \|\chi_Y\|_{B_p(G)} \leq 2^{m_Y} \quad \text{و} \quad m_Y = \inf\{m \in \mathbb{N} : Y = Y_0 \setminus \bigcup_{i=1}^m Y_i\}, \quad (۲.۵)$$

که در آن برای $i = 0, 1, \dots, m$ مجموعه Y_i به صورت بیان شده در رابطه (۱.۵) است.

برهان. چون $Y \in \Omega_*(G)$ ، لذا با توجه به رابطه (۱.۵) همدمسته باز Y و برای $m \in \mathbb{N}$ و $i = 1, \dots, m$ زیرهمدمسته‌های باز $Y_i \subset Y$ موجود هستند به طوری که $Y = Y \setminus \bigcup_{i=1}^m Y_i$. با توجه به قسمت (۴) از قضیه ۲.۵ داریم

$$\chi_{Y_i} \in B_p(G) \quad \text{و} \quad \|\chi_{Y_i}\|_{B_p(G)} = 1 \quad i = 1, \dots, m.$$

از طرف دیگر χ_Y برابر است با

$$\chi_Y = \left(\sum_{i=1}^m \chi_{Y_i} - \sum_{i,j=1} \chi_{Y_i \cap Y_j} + \sum_{i,j,k=1} \chi_{Y_i \cap Y_j \cap Y_k} + \dots + (-1)^{m+1} \chi_{Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_m} \right), \quad (3.5)$$

در نتیجه $\|\chi_Y\|_{B_p(G)} \leq m^Y$. با محاسبه اینفیمم روی تمامی تجزیه‌های ممکن برای Y به صورت (۱.۵) به رابطه (۲.۵) می‌رسیم.

□

۲.۵ - صورت فضاهای π -فوریه

در این بخش بعضی از نتایج موجود در [۷] را تعمیم می‌دهیم. در ابتدای امر به تعمیم تعریف فضاهای π -فوریه A_π و π -فوریه اشتیلیس B_π می‌پردازیم (به زیربخش ۱.۹.۳ از فصل ۲ مراجعه کنید). سپس به توصیف ارتباط بین فضاهای به دست آمده و جبرهای p -شبه توابع خواهیم پرداخت.

تعریف ۵.۵. برای یک نمایش مانند $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ ، p -صورت فضای π -فوریه، $A_{p,\pi}$ را برابر با بستار ترکیب خطی خانواده همه توابع ضریب نمایش (π, E) تعریف می‌کنیم. به طور دقیق تر این فضا، فضای همه توابع به شکل زیر است

$$u(x) = \sum_n \langle \pi(x) \xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E, (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E^*,$$

این فضا را به نرم زیر مجهز می‌کنیم

$$\|u\|_{A_{p,\pi}} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|t_n\| \|s_n\| : u(x) = \sum_n \langle \pi(x) t_n, s_n \rangle, x \in G \right\}.$$

در اینجا اینفیمم روی تمامی نمایش‌های ممکن برای تابع u به عنوان تابع ضریب نمایش (π, E) محاسبه می‌شود.

تذکر ۶.۵. نتایج زیر از تعریف بالا حاصل می‌شوند.

۱. برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ نگاشت $\Psi_{p,\pi} : E^* \hat{\otimes} E \rightarrow C_b(G)$ را با ضابطه

$$\Psi_{p,\pi} \left(\sum_n \eta_n \otimes \xi_n \right) = \sum_n \langle \pi(x) \xi_n, \eta_n \rangle, \quad x \in G$$

 برد این نگاشت فضای $A_{p,\pi}$ است. در نتیجه بنابر پوشایی این نگاشت با این برد، یکسان‌ریختی
 طولپای $A_{p,\pi} \cong E^* \hat{\otimes} E / \ker \Psi_{p,\pi}$ را داریم. این یکسان‌ریختی با تساوی نرمی زیر
 تضمین می‌شود. توجه کنید که در این حالت نرم روی فضای $A_{p,\pi}$ نرم خارج قسمتی
 زیر است

$$\begin{aligned} \left\| \sum_n \xi_n \otimes \eta_n + \ker \Psi_{p,\pi} \right\| &= \inf \left\{ \sum_n \|t_n\| \|s_n\| : \right. \\ &\quad \left. \sum_n \langle \pi(\cdot) t_n, s_n \rangle = \sum_n \langle \pi(\cdot) \xi_n, \eta_n \rangle \right\} \\ &= \left\| \sum_n \langle \pi(\cdot) \xi_n, \eta_n \rangle \right\|_{A_{p,\pi}}. \end{aligned}$$

۲. به دلیل یکریختی $A_{p,\pi} \cong E^* \hat{\otimes} E / \ker \Psi_{p,\pi}$ ، فضای $A_{p,\pi}$ یک فضای باناخ است.
 در گزاره بعدی رابطه‌ای معادل برای محاسبه نرم روی فضای $A_{p,\pi}$ ارائه می‌کنیم. برای این
 منظور مجموعه همه زیرنمایش‌های دوری یک نمایش مانند $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ را با نماد
 $\text{Cyc}_{p,\pi}(G)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۷.۵. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ یک نمایش باشد و $u \in A_{p,\pi}$ آنگاه رابطه زیر
 برقرار است

$$\|u\|_{A_{p,\pi}} = \inf \left\{ \sum_n \|t_n\| \|s_n\| : u(x) = \sum_n \langle \rho_n(x) t_n, s_n \rangle, \quad x \in G \right\}, \quad (۴.۵)$$

و اینفیمم روی همه نمایش‌های ممکن برای u محاسبه می‌شود که در آن

$$\left((\rho_n, F_n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Cyc}_{p,\pi}(G), \quad (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_n \quad \text{و} \quad (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_n^*.$$

برهان. اینفیمم سمت راست موجود در (۴.۵) را با C نشان می‌دهیم. فرض کنید $x \in G$ و
 داشته باشیم

$$u(x) = \sum_n \langle \pi(x) \xi_n, \eta_n \rangle \quad \text{و} \quad \sum_n \|\xi_n\| \|\eta_n\| < \infty.$$

حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، قرار می‌دهیم

$$F_n = \overline{\pi(L^\vee(G))\xi_n}^{\|\cdot\|_E}, \quad \rho_n : G \rightarrow \mathcal{B}(F_n), \quad \rho_n(x) = \pi(x)|_{F_n}, \quad x \in G, \\ t_n = \xi_n, \quad s_n = \eta_n|_{F_n}.$$

آنگاه خانواده نمایش‌های $((\rho_n, F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ مشمول در $\text{Cyc}_{p,\pi}(G)$ هستند. همچنین $C \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|t_n\| \|s_n\| \leq \sum_n \|\xi_n\| \|\eta_n\|$ و برای هر x متعلق به گروه G ، می‌توان نوشت $u(x) = \sum_n \langle \rho_n(x)t_n, s_n \rangle$. چون $(\xi)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ و $(\eta)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$ دو نمایش دلخواه u هستند، داریم $C \leq \|u\|_{A_{p,\pi}}$. برای نامساوی عکس، فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. آنگاه دنباله‌های $((\rho_n, F_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Cyc}_{p,\pi}(G)$ و $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_n$ و $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_n^*$ موجود هستند به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(\rho_n, F_n) \subset (\pi, E)$ و

$$\sum_n \|t_n\| \|s_n\| < C + \epsilon, \quad u(x) = \sum_n \langle \rho_n(x)t_n, s_n \rangle, \quad x \in G.$$

حال با به کار بردن قضیه هان-باناخ برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان تابع $s_n \in F_n^*$ را به تابع $\eta_n \in E^*$ توسعه داد به‌طوری‌که $\|\eta_n\| = \|s_n\|$. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\|u\|_{A_{p,\pi}} \leq \sum_n \|t_n\| \|\eta_n\| = \sum_n \|t_n\| \|s_n\| < C + \epsilon,$$

□

و بنابراین $\|u\|_{A_{p,\pi}} \leq C$.

در مرحله بعدی برخی از مفاهیم موجود در مطالعات گذشته را تعمیم می‌دهیم و برای این هدف نیازمند معرفی چند نماد هستیم.

فرض کنید $\mathcal{U}$ یک ابرفیلتر بوده و G یک گروه موضعاً فشرده باشد. برای یک نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ ، دو نمایش $(\pi^\infty, l^p(E))$ و $(\pi_{\mathcal{U}}, (E)_{\mathcal{U}})$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\pi^\infty : G \rightarrow \mathcal{B}(l^p(E)), \quad \pi^\infty(x)((\xi_n)_n) = (\pi(x)\xi_n)_n, \quad x \in G, (\xi_n)_n \in l^p(E), \quad (5.5)$$

$$\pi_{\mathcal{U}} : G \rightarrow \mathcal{B}((E)_{\mathcal{U}}), \quad \pi_{\mathcal{U}}(x)((\xi_i)_{\mathcal{U}}) = (\pi(x)\xi_i)_{\mathcal{U}}, \quad x \in G, (\xi_i)_{\mathcal{U}} \in (E)_{\mathcal{U}}. \quad (6.5)$$

حال در ارتباط با این دو نمایش، لم کاربردی زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۸.۵. برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ ، نمایش‌های $(\pi^\infty, l^p(E))$ و $(\pi_{\mathcal{U}}, (E)_{\mathcal{U}})$ را در (۵.۵) و (۶.۵) در نظر بگیرید. گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. برد نمایش‌های $\pi_{\mathcal{U}}$ و π^∞ زیرفضای عملگرهای طولپا و وارون پذیر روی QSL_p -فضاهای متناظرشان است، در نتیجه این نمایش‌ها به مجموعه $\text{Rep}_p(G)$ تعلق دارند.

۲. برای یک عضو مانند $f \in L^1(G)$ ، روابط زیر را داریم

$$\pi^\infty(f) = (\pi(f))^\infty \quad \text{و} \quad \pi_{\mathcal{U}}(f) = (\pi(f))_{\mathcal{U}}.$$

۳. نمایش‌های $(\pi_{\mathcal{U}}, (E)_{\mathcal{U}})$ و $(\pi^\infty, l^p(E))$ نمایش‌های اساسی برای $L^1(G)$ هستند.

برهان. گزاره ابتدایی با تحقق روابط زیر حاصل می‌شود

$$\pi^\infty(x)^{-1} = \pi^\infty(x^{-1}) \quad \text{و} \quad \pi_{\mathcal{U}}(x)^{-1} = \pi_{\mathcal{U}}(x^{-1}), \quad x \in G.$$

همچنین گزاره دوم از تعریف نمایش‌ها در (۵.۵) و (۶.۵) مستقیماً نتیجه می‌شود. حال به اثبات گزاره سوم می‌پردازیم. در اینجا هر کدام از دو نمایش را جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نمایش $(\pi^\infty, l^p(E))$:

فرض کنید $(\xi_n)_n \in l^p(E)$. از آنجا که نمایش (π, E) یک نمایش اساسی است، در نتیجه برای هر $\epsilon > 0$ و هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ عضوهای $f_n \in L^1(G)$ و $t_n \in E$ موجود هستند به طوری که $\|\pi(f_n)t_n - \xi_n\| < \frac{\epsilon}{nM}$ و $M = \left(\sum_n \frac{1}{n^p}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. توجه کنید که چون $p > 1$ سری گفته شده در بالا همگرا است. با توجه به محاسبات زیر

$$\|(\pi(f_n)t_n)_n - (\xi_n)_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|\pi(f_n)t_n - \xi_n\|^p < \frac{\epsilon^p}{M^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \epsilon^p,$$

به سادگی نتیجه می‌شود $\|(\pi(f_n)t_n)_n - (\xi_n)_n\| < \epsilon$. توجه کنید که در رابطه فوق بردار دلخواه $(\xi_n)_n$ توسط عضو $(\pi(f_n)t_n)_n$ که در فضای $(l^p(E))(L^1(G))$ قرار دارد، تقریب خورده است و این به معنی اساسی بودن نمایش (۵.۵) است.

نمایش $(\pi_{\mathcal{U}}, (E)_{\mathcal{U}})$:

فرض کنید $(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}} \in (E)_{\mathcal{U}}$ و فرض کنید که $(\xi_i)_{i \in \mathbb{I}} \in L^\infty(\mathbb{I}, E)$ یک نماینده از این کلاس هم ارزی باشد. مجدداً بنابر اساسی بودن نمایش (π, E) برای عدد دلخواه $\epsilon > 0$ و هر اندیس $i \in \mathbb{I}$ عضوهای $f_i \in L^1(G)$ و $t_i \in E$ موجود هستند به طوری که $\|\pi(f_i)t_i - \xi_i\| < \frac{\epsilon}{4}$ ، در نتیجه داریم $\epsilon > \frac{\epsilon}{4} \geq \|\pi(f_i)t_i - \xi_i\|_{(E)_{\mathcal{U}}} \leq \frac{\epsilon}{4}$. حال چون برای هر $(r_i)_i \in l^\infty(\mathbb{I}, E)$ داریم $\|(r_i)_i\|_{(E)_{\mathcal{U}}} \leq \|(r_i)_i\|_\infty$ ، لذا می توان نتیجه گرفت $\|(\pi(f_i)t_i)_{\mathcal{U}} - (\xi_i)_{\mathcal{U}}\|_{(E)_{\mathcal{U}}} < \epsilon$ ، که به طور مشابه به این دلیل که عضو $(\pi(f_i)t_i)_{\mathcal{U}}$ به فضای $\pi_{\mathcal{U}}(L^1(G))((E)_{\mathcal{U}})$ تعلق دارد، نتیجه مطلوب حاصل می شود. $\square$

از لم بالا، نتیجه زیر به آسانی به دست می آید.

نتیجه ۹.۵. برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ نمایش $(\pi_{\mathcal{U}}^\infty, (l^p(E))_{\mathcal{U}})$ یک نمایش اساسی بوده و به فضای $\text{Rep}_p(G)$ متعلق است.

گزاره بعدی را می توان بیان مجددی از لم ۶.۵ موجود در [۵۶] در نظر گرفت. در اینجا تلاش شده است که جزئیات بیشتری ارائه شود که در آینده مفید خواهند بود.

گزاره ۱۰.۵. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. آنگاه گزاره های زیر برقرارند.

۱. یک ابرفیلتر آزاد مانند $\mathcal{U}$ موجود است به طوری که نمایش طبیعی جبر $PF_{p,\pi}(G)$ روی فضای $F = (l^p(E))_{\mathcal{U}}$ یک نمایش اساسی و طولپا بوده و نسبت به توپولوژی ضعیف و ضعیف-ستاره پیوسته است.

۲. یکسان ریختی طولپای $A_{p,\pi_{\mathcal{U}}^\infty}^{w*} = \overline{A_{p,\pi_{\mathcal{U}}^\infty}}^{w*} = PF_{p,\pi}(G)^*$ برقرار است.

برهان. در سراسر این اثبات در برخی از موارد از نماد F به جای نماد $(l^p(E))_{\mathcal{U}}$ به جهت سادگی در بیان روابط استفاده می کنیم. برای اثبات قسمت اول، کافی است جزئیاتی از اثبات گزاره ۵ از [۱۷] را به اثبات از لم ۶.۵ در [۵۶] اضافه کنیم. بنابر قضیه ۴۵.۲ از فصل ۲ ابرفیلتری مانند $\mathcal{U}$ روی مجموعه اندیس گذاری مانند $\mathbb{I}$ موجود است به طوری که نگاشت $\bar{J} : \mathcal{B}(E)^* \rightarrow (E^* \hat{\otimes} E)_{\mathcal{U}}$ ، یک نگاشت طولپا است. توجه کنید که در اینجا چون $(E^* \hat{\otimes} E)^* = \mathcal{B}(E)$ ، یکسان ریختی طولپای $(E^* \hat{\otimes} E)^{**} = \mathcal{B}(E)^*$ نتیجه می شود. همچنین بنابر قضیه ۱ از [۱۷] برای این ابرفیلتر نگاشت $P : F^* \hat{\otimes} F \rightarrow \mathcal{B}(E)^*$ با ضابطه

$$\langle T, P(s \otimes t) \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \sum_n \langle T(t_{i,n}), s_{i,n} \rangle, \quad T \in \mathcal{B}(E), \quad s \otimes t \in F^* \hat{\otimes} F,$$

خارج قسمتی است. در اینجا $t = ((t_{i,n})_n)_U \in F$ و $s = ((s_{i,n})_n)_U \in F^*$. در نتیجه نگاشت دوگان نگاشت P یعنی $P^* : \mathcal{B}(E)^{**} \rightarrow \mathcal{B}(F)$ ، یک همربختی طولپای است. در نتیجه نمایش طبیعی $PF_{p,\pi}(G) \subseteq \mathcal{B}(E)$ روی $F = (l^p(E))_U$ که در واقع نگاشت $P^*|_{PF_{p,\pi}(G)} = P_r^*$ است، نگاشتی است که نسبت به توپولوژی ضعیف و ضعیف-ستاره پیوسته است. به طور دقیق تر، نگاشت زیر دارای خواص گفته شده است

$$P_r^* : PF_{p,\pi}(G) \rightarrow \mathcal{B}(F), \quad P_r^*(\pi(f)) = \pi_U^\infty(f), \quad f \in L^1(G).$$

به عنوان کاربردی از لم ۸.۵- (۳)، بنابر نمودار زیر

$$\begin{array}{ccc} PF_{p,\pi}(G) & \xrightarrow{P_r^*} & \mathcal{B}(l^p(E))_U \\ \pi \uparrow & \nearrow \pi_U^\infty & \\ L^1(G) & & \end{array}$$

نگاشت P_r^* یک نمایش اساسی برای $PF_{p,\pi}(G)$ است. به این دلیل که نگاشت π انقباضی با برد چگال است و چون نگاشت π_U^∞ (بنابر نتیجه ۹.۵) یک نمایش اساسی است، آنگاه به دلیل رابطه $P_r^* \circ \pi = \pi_U^\infty$ ، ادعاهای گفته شده برای P_r^* برقرار است. در نتیجه این نگاشت یک نمایش اساسی و طولپای برای $PF_{p,\pi}(G)$ است به طوری که نسبت به توپولوژی ضعیف و ضعیف-ستاره پیوسته است و در نتیجه داریم $PF_{p,\pi}(G) = PF_{p,\pi_U^\infty}(G)$. برای قسمت دوم، نگاشت $(P_r^*)_r^* : F^* \hat{\otimes} F \rightarrow PF_{p,\pi}(G)^*$ که تحدید نگاشت

$$(P_r^*)_r^* : \mathcal{B}(F)^* \rightarrow PF_{p,\pi}(G)^*$$

به زیرفضای بسته $F^* \hat{\otimes} F$ است را در نظر می‌گیریم. این نگاشت، یک نگاشت خارج قسمتی و پوشا به روی فضای $PF_{p,\pi}(G)^*$ است. بنابراین نگاشت یکسانریختی طولپای

$$PF_{p,\pi}(G)^* = (l^{p'}(E^*))_U \hat{\otimes} (l^p(E))_U / \ker(P_r^*)_r^*$$

حاصل می‌شود. در این حالت برای یک عضو مانند $\phi \in PF_{p,\pi}(G)^*$ عضو منحصر به فرد $\tau \in F^* \hat{\otimes} F / \ker(P_r^*)_r^*$ موجود است به طوری که برای عدد دلخواه $\epsilon > 0$ دنباله‌های $(\xi_k)_k \subseteq F^*$ و $(\eta_k)_k \subseteq F$ یافت می‌شوند به طوری که $\tau = \sum_k \xi_k \otimes \eta_k$ و داریم

$$\|\phi\| \leq \sum_k \|\xi_k\| \|\eta_k\| < \|\phi\| + \epsilon.$$

علاوه بر این، برای هر عضو $f \in L^1(G)$ داریم

$$\langle \pi(f), \phi \rangle = \sum_k \langle P_r^* \circ \pi(f) \xi_k, \eta_k \rangle = \sum_k \langle \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}(f) \xi_k, \eta_k \rangle = \langle \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}(f), u \rangle, \quad (۷.۵)$$

که در آن تابع u به صورت زیر است

$$u(x) = \sum_k \langle \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}(x) \xi_k, \eta_k \rangle \in A_{p, \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}}, \quad x \in G.$$

در روابط بالا نماد $\langle \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}(f), u \rangle$ بیانگر رابطه دوگانی $L^1 - L^{\infty}$ بین دو عضو f و u است. حال متناسب با آنچه که در قسمت (۱) از ملاحظه ۶.۵ دیدیم، نگاشت $\Psi_{p, \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}}$ متناظر با نمایش $(\pi_{\mathcal{U}}^{\infty}, F)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$A_{p, \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}} = (L^{p'}(E^*))_{\mathcal{U}} \hat{\otimes} (L^p(E))_{\mathcal{U}} / \ker \Psi_{\pi, \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}}. \quad (۸.۵)$$

بنابر یکسانریختی $PF_{p, \pi}(G) = PF_{p, \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}}(G)$ و چون رابطه (۷.۵) بیانگر این امر است که فضای پوچ نگاشت‌های $(P_r^*)_r$ و $\Psi_{p, \pi_{\mathcal{U}}^{\infty}}$ یکسان هستند، رابطه (۸.۵) یکسانریختی مطلوب را نتیجه می‌دهد. $\square$

گزاره ۱۱.۵. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. آنگاه یکسانریختی طولپای $A_{p, \pi} = A_{p, \pi^{\infty}}$ موجود است.

برهان. فرض کنید عضو $u \in A_{p, \pi^{\infty}}$ و عدد $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. آنگاه دنباله‌های $((\xi_{n,m})_n)_m \subseteq l^p(E)$ و $((\eta_{n,m})_n)_m \subseteq l^{p'}(E^*)$ موجود هستند به‌طوری‌که

$$u(x) = \sum_m \langle \pi^{\infty}(x) (\xi_{n,m})_n, (\eta_{n,m})_n \rangle = \sum_{m,n} \langle \pi(x) \xi_{n,m}, \eta_{n,m} \rangle \quad (۹.۵)$$

و با استفاده از نامساوی هولدر به رابطه

$$\|u\|_{\pi^{\infty}} + \epsilon > \sum_m \|(\xi_{n,m})_n\| \|(\eta_{n,m})_n\| \geq \sum_{n,m} \|\xi_{n,m}\| \|\eta_{n,m}\| \quad (۱۰.۵)$$

می‌رسیم. از رابطه (۹.۵) نتیجه می‌شود که $u \in A_{p, \pi}$ و بنابر رابطه (۱۰.۵) نامساوی نرمی $\|u\|_{p, \pi} \leq \|u\|_{p, \pi^{\infty}}$ برقرار است و این به معنی برقرار شمول انقباضی $A_{p, \pi^{\infty}} \subseteq A_{p, \pi}$ است.

باید نشان دهیم که شمول برعکس نیز انقباضی است. برای این امر فرض کنید $u \in A_{p,\pi}$ و برای عدد دلخواه $\epsilon > 0$ بردارهای $(t_n)_n \subseteq E$ و $(s_n)_n \subseteq E^*$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $x \in G$ ، $u(x) = \sum_n \langle \pi(x)t_n, s_n \rangle$ و $\|u\| + \epsilon > \sum_n \|t_n\| \|s_n\|$. حال اگر قرار دهیم

$$\xi_n = \|t_n\|^{-1+\frac{1}{p}} \|s_n\|^{\frac{1}{p}} t_n, \quad \eta_n = \|s_n\|^{-1+\frac{1}{p'}} \|t_n\|^{\frac{1}{p'}} s_n$$

آنگاه نتیجه می‌شود که $(\xi_n)_n \in l^p(E)$ و $(\eta_n)_n \in l^{p'}(E^*)$. علاوه بر این داریم

$$\begin{aligned} \left(\sum_n \|\xi_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_n \|t_n\| \|s_n\| \right)^{\frac{1}{p}} < (\|u\|_\pi + \epsilon)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\sum_n \|\eta_n\|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\sum_n \|t_n\| \|s_n\| \right)^{\frac{1}{p'}} < (\|u\|_\pi + \epsilon)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

و

$$u(x) = \langle \pi^\infty(x)(\xi_n)_n, (\eta_n)_n \rangle = \sum_n \langle \pi(x)\xi_n, \eta_n \rangle = \sum_n \langle \pi(x)t_n, s_n \rangle, \quad x \in G.$$

و این ایجاب می‌کند که برای هر $u \in A_{p,\pi^\infty}$ ، $\|u\|_\pi \leq \|(\xi_n)_n\| \|(\eta_n)_n\| < \|u\|_\pi + \epsilon$. $\square$

نتیجه ۱۲.۵. برای نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ از گروه موضعاً فشرده G ، یکسان‌ریختی طولپای $PF_{p,\pi}(G)^* = A_{p,\pi_{\mathcal{U}}}$ برقرار است.

 $\square$

برهان. اثبات واضح است.

تذکر ۱۳.۵. در ادامه برخی نتایج را ارائه می‌کنیم.

۱. نمایش $(\pi_{\mathcal{U}}^\infty, F)$ برای فضای $PF_{p,\pi}(G)$ یک نمایش طولپای، اساسی و نسبت به توپولوژی ضعیف و ضعیف-ستاره پیوسته است، لذا داریم

$$PF_{p,\pi}(G) = PF_{p,\pi_{\mathcal{U}}^\infty}(G).$$

۲. در حالتی که نمایش (π, E) یک نمایش p -جامع باشد، چون نمایش $(\pi_{\mathcal{U}}^{\infty}, (l^p(E))_{\mathcal{U}})$ نیز یک نمایش p -جامع است، نمادگذاری‌های موجود در اینجا با آنچه در [۵۶] است، مطابقت دارد.

۳. ما در نمادگذاری از [۷] پیروی کرده و به جای نماد $A_{p,\pi_{\mathcal{U}}}$ از نماد $B_{p,\pi}$ استفاده می‌کنیم و این فضا را p -صورت فضای π -فوریه اشتیل‌یس می‌نامیم که بنابر گزاره ۱۰.۵ این فضا، فضای دوگان جبر p -شبه توابع متناظر با نمایش (π, E) در $\text{Rep}_p(G)$ ، یعنی فضای $PF_{p,\pi}(G)$ است. بین این دو فضا رابطه دوگانی به صورت زیر است

$$\langle \pi(f), u \rangle = \int_G u(x)f(x)dx, \quad f \in L^1(G), \quad u \in B_{p,\pi},$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|f\|_{\pi} \leq 1} |\langle \pi(f), u \rangle| = \sup_{\|f\|_{\pi} \leq 1} \left| \int_G u(x)f(x)dx \right|, \quad u \in B_{p,\pi}, \\ \|f\|_{\pi} &= \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle \pi(f), u \rangle| = \sup_{\|u\| \leq 1} \left| \int_G u(x)f(x)dx \right|, \quad f \in L^1(G). \end{aligned}$$

در نتیجه $PF_{p,\pi}(G)^* = A_{p,\pi_{\mathcal{U}}} = B_{p,\pi}$ در حالتی که از نمایش منظم چپ $(\pi, E) = (\lambda_{p,G}, L^p(G))$ استفاده می‌کنیم، غالباً نماد $PF_p(G)^*$ را به کار می‌بریم.^۱

۴. واضح است که برای هر نمایش $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ شمول $B_{p,\pi} \subseteq B_p(G)$ انقباضی است و اگر نمایش (π, E) p -جامع باشد، آنگاه این شمول به یکسان‌ریختی طولیا تبدیل می‌شود.

۵. توجه کنید که نحوه انتخاب ابرفیلتر $\mathcal{U}$ به صورتی است که برای این ابرفیلتر، نشانیدن $B(E)^* \subseteq (E^* \hat{\otimes} E)_{\mathcal{U}}$ طولیا است و در نتیجه فضای $A_{p,\pi_{\mathcal{U}}}^{\infty}$ خوش‌تعریف است. علاوه بر این، اگر $\mathcal{V}$ ابرفیلتر دیگری باشد که به‌طور مشابه برای آن نشانیدن $B(E)^* \subseteq (E^* \hat{\otimes} E)_{\mathcal{V}}$ طولیا است، آنگاه $A_{p,\pi_{\mathcal{V}}} = PF_{p,\pi}(G)^* = A_{p,\pi_{\mathcal{U}}}$. تساوی بالا بیانگر

۱. از نماد $PF_p(G) := PF_{p,\lambda_{p,G}}$ در تمامی مراجع گذشته استفاده شده است.

این حقیقت است که تعریف ما از این فضای خاص، مستقل از انتخاب ابرفیلتر آزاد با ویژگی ذکر شده در بالا بوده و خوش تعریف است.

۶. برای گروه موضعاً فشرده G شمول‌های انقباضی زیر برقرار هستند

$$PF_p(G)^* = B_{p,\lambda_p} \subseteq B_p(G) \subseteq M(A_p(G)).$$

همچنین در حالتی که گروه G میانگین پذیر باشد همه این شمول‌ها به یکسان‌ریختی طولی تبدیل می‌شوند.

۳.۵ قضیه گسترش

در این بخش یکی از مهمترین نتایج این کتاب را بیان و اثبات می‌کنیم که یکی از ویژگی‌های بنیادین p -صورت جبرهای فوریه‌اشتیلیس محسوب می‌شود. یکی از سوالات اولیه مربوط به این دسته از جبرها این است که چه زمانی گسترش یک تابع از جبرهای فوریه‌اشتیلیس که بر روی یک زیرگروه تعریف شده است به کل گروه، مجدداً به جبر فوریه‌اشتیلیس متعلق است. برای پاسخگویی به این سوال به نمادگذاری زیر احتیاج داریم. برای زیرمجموعه G_0 از مجموعه G و تابع $u : G_0 \rightarrow \mathbb{C}$ منظور از تابع u° ، گسترش تابع u به کل مجموعه G به طریق زیر است

$$u^\circ = \begin{cases} u & \text{روی } G_0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

در لم بعد، رابطه بین نمایش‌های زیرگروه G_0 و گروه G را بیان می‌کنیم.

لم ۱۴.۵. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. آنگاه دوتایی (π_{G_0}, E) که تحدید نمایش (π, E) به زیرگروه باز G_0 است به مجموعه $\text{Rep}_p(G_0)$ تعلق دارد. علاوه بر این، برای هر تابع $f \in L^1(G_0)$ و هر تابع $g \in L^1(G)$ روابط زیر برقرارند

$$\pi_{G_0}(f) = \pi(f^\circ), \quad \text{و} \quad \pi_{G_0}(g|_{G_0}) = \pi(g\chi_{G_0}). \quad (11.5)$$

برهان. به وضوح داریم $(\pi_{G_0}, E) \in \text{Rep}_p(G_0)$. برای قسمت دوم، فرض کنید $f \in L^1(G_0)$ و $g \in L^1(G)$. آنگاه محاسبات ساده زیر صحت ادعای بیان شده را نشان می‌دهند. برای اعضای $\xi \in E$ و $\eta \in E^*$ داریم

$$\langle \pi_{G_0}(f)\xi, \eta \rangle = \int_{G_0} f(x) \langle \pi_{G_0}(x)\xi, \eta \rangle dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{G_\circ} f(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\
&= \int_G f^\circ(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\
&= \langle \pi(f^\circ)\xi, \eta \rangle,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{G_\circ}(g|_{G_\circ})\xi, \eta \rangle &= \int_{G_\circ} g|_{G_\circ}(x) \langle \pi_{G_\circ}(x)\xi, \eta \rangle dx \\
&= \int_{G_\circ} g|_{G_\circ}(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\
&= \int_G g(x) \chi_{G_\circ}(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\
&= \langle \pi(g\chi_{G_\circ})\xi, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\langle \pi_{G_\circ}(f)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(f^\circ)\xi, \eta \rangle, \quad (۱۲.۵)$$

$$\langle \pi_{G_\circ}(g|_{G_\circ})\xi, \eta \rangle = \langle \pi(g\chi_{G_\circ})\xi, \eta \rangle. \quad (۱۳.۵)$$

حال چون برای هر $\xi \in E$ و $\eta \in E^*$ روابط (۱۲.۵) و (۱۳.۵) برقرارند، آنگاه روابط موجود در (۱۱.۵) صادق هستند. $\square$

در ادامه به ارائه چند نگاشت مهم که جبرهای p -شبه توابع متناظر با نمایش های گروه G و زیرگروه $G_\circ$ را به هم مرتبط می‌کنند، می‌پردازیم.

گزاره ۱۵.۵. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $G_\circ$ یک زیرگروه باز آن بوده و $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. آنگاه گزاره های زیر برقرار هستند.

۱. نگاشت

$$S_{\pi_{G_\circ}} : PF_{p, \pi_{G_\circ}}(G_\circ) \rightarrow PF_{p, \pi}(G), \quad S_{\pi_{G_\circ}}(\pi_{G_\circ}(f)) = \pi(f\chi_{G_\circ}), \quad f \in L^1(G_\circ),$$

یک همریختی طولپا است و یکسان‌ریختی طولپای زیر را داریم

$$PF_{p, \pi_{G_\circ}}(G_\circ) = \overline{\{\pi(f) : f \in L^1(G), \text{supp}(f) \subseteq G_\circ\}}^{\|\cdot\|_{B(E)}} \subseteq PF_{p, \pi}(G).$$

۲. عملگر خطی تحدید

$$R_\pi : B_{p,\pi} \rightarrow B_{p,\pi_{G_\circ}}, \quad R_\pi(u) = u|_{G_\circ}, \quad u \in B_{p,\pi},$$

نگاشت دوگان نگاشت $S_{\pi_{G_\circ}}$ بوده و یک نگاشت خارج قسمتی است.

۳. نگاشت گسترش

$$E_\pi : B_{p,\pi_{G_\circ}} \rightarrow B_{p,\pi}, \quad E_\pi(u) = u^\circ, \quad u \in B_{p,\pi_{G_\circ}},$$

یک همریختی طولپا است.

۴. نگاشت تحدید $R : B_p(G) \rightarrow B_p(G_\circ)$ یک نگاشت انقباضی است.

۵. در حالتی که نمایش مفروض (π, E) یک نمایش p -جامع باشد، شمول‌های انقباضی $PF_p(G_\circ)^* \subseteq B_{p,\pi_{G_\circ}} \subseteq B_p(G_\circ) \subseteq M(A_p(G_\circ))$ همچنین اگر زیرگروه باز $G_\circ$ میانگین‌پذیر باشد، آنگاه یکسان‌ریختی‌های طولپای فضاهاى باناخ $PF_p(G_\circ)^* = B_{p,\pi_{G_\circ}} = B_p(G_\circ) = M(A_p(G_\circ))$ برقرار است.

برهان. ۱. بنابر لم ۱۴.۵ نگاشت $S_{\pi_{G_\circ}}$ یک همریختی طولپا بوده و برد آن شامل زیرفضای چگال $\{\pi(f) : f \in L^1(G), \text{supp}(f) \subseteq G_\circ\}$ است. در نتیجه جبر $PF_{p,\pi_{G_\circ}}(G_\circ)$ و زیرجبر بسته

$$\overline{\{\pi(f) : f \in L^1(G), \text{supp}(f) \subseteq G_\circ\}}^{\|\cdot\|_{B(E)}},$$

از فضای $PF_{p,\pi}(G)$ یکسان‌ریخت هستند.

۲. تساوی $S_{\pi_{G_\circ}}^* = R_\pi$ از محاسبات زیر حاصل می‌شوند. فرض کنید $u \in B_p(G)$ و $f \in L^1(G_\circ)$. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \langle S_{\pi_{G_\circ}}^*(u), \pi_{G_\circ}(f) \rangle &= \langle u, S_{\pi_{G_\circ}}(\pi_{G_\circ}(f)) \rangle \\ &= \langle u, \pi(f^\circ) \rangle \\ &= \langle u|_{G_\circ}, \pi_{G_\circ}(f) \rangle \\ &= \langle R_\pi(u), \pi_{G_\circ}(f) \rangle. \end{aligned}$$

حال چون $S_{\pi_{G_\circ}}^* = R_\pi$ ، نتیجه می‌شود $S_{\pi_{G_\circ}}$ یک نگاشت خارج قسمتی است.

۳. قبل از آنکه نشان دهیم نگاشت E_π طولپای است، توجه کنید که به دلیل پوشایی نگاشت R_π یکسان‌ریختی طولپای

$$B_{p,\pi_{G_\circ}} = PF_{p,\pi_{G_\circ}}(G_\circ)^* = PF_{p,\pi}(G)^* / PF_{p,\pi_{G_\circ}}^\perp = B_{p,\pi} / PF_{p,\pi_{G_\circ}}^\perp$$

حاصل می‌شود. به وضوح نگاشت E_π یک نگاشت انقباضی است. علاوه بر این،

$$\|u\| = \|R_\pi(E_\pi(u))\| \leq \|E_\pi(u)\| \leq \|u\|.$$

این طولپایی نگاشت مورد نظر را نتیجه می‌دهد.

۴. از قسمت (۲) از همین گزاره می‌دانیم که نگاشت تحدید از فضای $B_p(G)$ به فضای $B_{p,\pi_{G_\circ}}$ پوشا و انقباضی است و از قسمت (۴) گزاره ۱۳.۵ نتیجه می‌شود که نگاشت همانی از فضای $B_{p,\pi_{G_\circ}}$ به فضای $B_p(G_\circ)$ انقباضی است و نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

۵. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ یک نمایش p -جامع باشد و $u \in PF_p(G_\circ)^*$. آنگاه بنابر قسمت (۳) $u^\circ \in PF_p(G)^*$ ، از طرفی بنابر ملاحظه ۱۳.۵ - (۶) شمول $PF_p(G)^* \subseteq B_p(G)$ انقباضی است و به این دلیل که $R(u^\circ) = u$ نتیجه مطلوب به دست می‌آید و $u \in B_{p,\pi_{G_\circ}}$. برای حالتی که زیرگروه باز $G_\circ$ میانگین پذیر است، بنابر ملاحظه یاد شده یکسان‌ریختی طولپای $PF_p(G_\circ)^* = B_p(G_\circ)$ ، برقرار است و این منجر به یکسان‌ریختی $PF_p(G_\circ)^* = B_{p,\pi_{G_\circ}} = B_p(G_\circ)$ می‌شود.

□

تذکره ۱۶.۵. به طریق دیگر نیز می‌توان خوش‌تعریفی و انقباضی بودن نگاشت E_π در گزاره قبل را نتیجه گرفت. نگاشت زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{E}_\pi : PF_{p,\pi}(G) \rightarrow PF_{p,\pi_{G_\circ}}(G_\circ), \quad \mathcal{E}_\pi(\pi(f)) = \pi_{G_\circ}(f|_{G_\circ}), \quad f \in L^1(G).$$

آنگاه نگاشت $\mathcal{E}_\pi$ انقباضی است و $(\mathcal{E}_\pi)^* = E_\pi$. در نتیجه نگاشت E_π خوش‌تعریف و انقباضی است.

گزاره بعدی، نتیجه ای از گزاره قبل بوده و یکی از نتایج کاربردی در تحقیقات مربوط به p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس است.

گزاره ۱۷.۵. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $G_\circ$ یک زیرگروه باز از آن باشد. آنگاه

۱. نگاشت توسیع $E_{MM} : M(A_p(G_*)) \rightarrow M(A_p(G))$ که برای $u \in M(A_p(G_*))$ به صورت $E_{MM}(u) = u^\circ$ تعریف می‌شود، یک نگاشت طولپا است.

۲. برای هر $u \in B_p(G_*)$ عضو u° به $M(A_p(G))$ تعلق دارد و نگاشت گسترش $E_{BM} : B_p(G_*) \rightarrow M(A_p(G))$ با ضابطه $u \mapsto u^\circ$ انقباضی است.

۳. اگر زیرگروه باز G_* میانگین پذیر هم باشد، آنگاه برای هر $u \in B_p(G_*)$ داریم $u^\circ \in B_p(G)$ و نگاشت گسترش متناظر با آن $E_{BB} : B_p(G_*) \rightarrow B_p(G)$ طولپا است.

برهان. ۱. فرض کنید $u \in M(A_p(G_*)) \subseteq C_b(G_*)$ می‌دانیم که $u^\circ \in C_b(G)$ و چون نگاشت توسیع از $A_p(G_*)$ به فضای $A_p(G)$ خوش‌تعریف است، برای هر عضو دلخواه $v \in A_p(G)$ داریم $u^\circ \cdot v = (u \cdot v|_{G_*})^\circ$. در نتیجه u° عضو $M(A_p(G))$ است. تساوی نرم‌ها، با توجه به انقباضی بودن نگاشت‌های زیر

$$\begin{aligned} E : A_p(G_*) &\rightarrow A_p(G), & E(u) &= u^\circ, & u &\in A_p(G_*), \\ R : A_p(G) &\rightarrow A_p(G_*), & R(u) &= u|_{G_*}, & u &\in A_p(G), \end{aligned}$$

از آنجا که نگاشت تحدید R پوشا است حاصل خواهد شد. داریم

$$\|u^\circ v\| = \|(uv|_{G_*})^\circ\| = \|E(uv|_{G_*})\| \leq \|uv|_{G_*}\| \leq \|u\| \|v\|$$

و این نتیجه می‌دهد $\|u^\circ\| \leq \|u\|$. همچنین

$$\|uv\| = \|(uv)^\circ|_{G_*}\| = \|R((uv)^\circ)\| \leq \|(uv)^\circ\|.$$

در نتیجه $\|u\| \leq \|u^\circ\|$ ، و این تساوی نرمی $\|u\|_{M(A_p(G_*))} = \|u^\circ\|_{M(A_p(G))}$ را تضمین می‌کند.

۲. این قسمت را می‌توان از شمول (۵) موجود در گزاره ۱۵.۵ و قسمت (۱) از همین گزاره نتیجه گرفت.

۳. چون زیرگروه باز G_* میانگین پذیر است در نتیجه بنابر قسمت (۵) از گزاره ۱۵.۵ (و یا مستقیماً از طریق قسمت (۶) از ملاحظه ۱۳.۵) نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

□

همریختی‌های وزنی که روی جبرهای از نوع فوریه توسط نگاشت‌های به طور تکه‌ای آفین که بین دو گروه توپولوژیکی موضعاً فشرده تعریف می‌شوند، همواره مورد توجه محققان این زمینه بوده است. به عنوان مثال چنین همریختی‌هایی در [۴۰] برای جبرهای فوریه و فوریه اشتیل‌یس و در [۳۷] برای جبر فیگا-تالامانکا-هرتس مطالعه شده اند. در این کتاب ما به بررسی چنین همریختی‌هایی روی p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس می‌پردازیم. به این منظور باید خوش‌تعریفی چنین نگاشتی مورد بررسی قرار گیرد. در واقع در ابتدا باید خوش‌تعریفی همریختی زیر را بررسی کنیم

$$\Phi_\alpha : B_p(G) \rightarrow B_p(H), \quad \Phi_\alpha(u) = (u \circ \alpha)^\circ, \quad u \in B_p(G).$$

در این مساله نگاشت $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت تکه‌ای آفین است. لم بعدی ابزار اثبات در قضیه ۱۹.۵ را مهیا می‌کند.

لم ۱۸.۵. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند و $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$.

۱. برای هر عضو $x \in G$ نگاشت انتقال چپ

$$L_x : B_p(G) \rightarrow B_p(G), \quad L_x(u)(y) = u(xy), \quad u \in B_p(G), \quad y \in G,$$

یک یکرختی طولپا است.

۲. برای یک همریختی پیوسته مانند $\beta : H \rightarrow G$ دوتایی $(\pi \circ \beta, E)$ به مجموعه $\text{Rep}_p(H)$ متعلق است و همریختی وزنی $\Phi_\beta : B_p(G) \rightarrow B_p(H)$ خوش‌تعریف و انقباضی است.

برهان. ۱. برای $x \in G$ از رابطه $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$ ، وارون پذیر بودن این نگاشت حاصل می‌شود. به‌سادگی طولپایی نگاشت L_x از انقباضی بودن دو نگاشت L_x و $L_{x^{-1}}$ نتیجه می‌شود.

۲. فرض کنید نمایش (π, E) یک نمایش p -جامع برای گروه G باشد، در این صورت به دلیل پیوستگی نگاشت $\beta : H \rightarrow G$ و نمایش (π, E) و همچنین از همریختی آنها نتیجه می‌شود $(\pi \circ \beta, E) \in \text{Rep}_p(H)$. توجه کنید که این نمایش به توی فضای همه عملگرهای وارون پذیر و طولپا است. به طور دقیق تر، برای $h \in H$ عملگر $\pi \circ \beta(h) : E \rightarrow E$ یک عملگر خطی و وارون پذیر با وارون $\pi \circ \beta(h^{-1})$ است. در

نتیجه اگر $u \in B_p(G)$ برای هر $x \in G$ ، به صورت $u(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$ باشد، آنگاه $u \circ \beta \in B_p(H)$ و به صورت زیر است

$$u \circ \beta(h) = \langle \pi \circ \beta(h)\xi, \eta \rangle, \quad h \in H.$$

در واقع برد این همریختی، مشمول در p -صورت فضای π -فوریه‌اشتیلیس $B_{p, \pi \circ \beta}$ است.

□

قضیه بعدی یکی از نتایج مهم در این کتاب است. در اینجا برای یک نگاشت تکه‌ای آفین و پیوسته مانند $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ ، نشان می‌دهیم همریختی $\Phi_\alpha : B_p(G) \rightarrow B_p(H)$ با تعریف

$$\Phi_\alpha(u) = \begin{cases} u \circ \alpha & \text{روی } Y \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

خوش‌تعریف و کراندار است و کرانی برای نرم آن ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۹.۵. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده باشند و نگاشت α از مجموعه $Y = \bigcup_{k=1}^n Y_k \subseteq H$ به G یک نگاشت تکه‌ای آفین و پیوسته باشد که در آن برای $k = 1, \dots, n$ مجموعه‌های جدا از هم Y_k به حلقه همه همدسته‌های باز و میانگین‌پذیر $\Omega_{\text{am-}0}(H)$ متعلق هستند. آنگاه برای هر $u \in B_p(G)$ ، داریم $(u \circ \alpha)^\circ \in B_p(H)$ و در نتیجه همریختی وزنی $\Phi_\alpha : B_p(G) \rightarrow B_p(H)$ خوش‌تعریف و کراندار است.

برهان. در اینجا اثبات را به دو بخش تقسیم می‌کنیم.

گام اول: در ابتدا فرض می‌کنیم که نگاشت $\alpha : Y = y_0 H_0 \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت آفین و پیوسته باشد. فرض کنید نگاشت $\beta : H_0 \rightarrow G$ همریختی متناظر با α بوده که در آن H_0 یک زیرگروه باز و میانگین‌پذیر از H است (به فصل ۳ مراجعه کنید). رابطه بین نگاشت آفین α و همریختی β به قرار زیر است

$$\beta(h) = \alpha(h_0)^{-1} \alpha(h_0 h), \quad h \in H_0. \quad (14.5)$$

بنابر قسمت (۲) لم ۱۸.۵، نگاشت $u \mapsto u \circ \beta$ همریختی وزنی $\Phi_\beta : B_p(G) \rightarrow B_p(H_0)$ است. برای عضو y_0 نگاشت انتقال چپ $L_{\alpha(y_0)} : B_p(G) \rightarrow B_p(G)$ را در نظر بگیرید. آنگاه

$$(u \circ \alpha)^\circ = E_{BB} \circ \Phi_\beta \circ L_{\alpha(y_0)}, \quad u \in B_p(G)$$

و نتیجه مطلوب با استفاده از قسمت (۳) گزاره ۱۷.۵ حاصل می‌شود. در اینجا نگاشت گسترش به صورت $E_{BB} : B_p(H_0) \rightarrow B_p(H)$ است. با استفاده از رابطه اخیر، این حقیقت که گسترش تابع $u \circ \alpha : Y_0 \subseteq H \rightarrow G$ به فضای $B_p(H)$ متعلق است، نتیجه می‌شود. همچنین به وضوح به این دلیل که نگاشت Φ_α ترکیب نگاشت‌های انقباضی و طولیا است، نتیجه می‌شود که این نگاشت انقباضی است.

گام ۲: حال فرض کنید نگاشت $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت تکه‌ای آفین و پیوسته باشد. بنابر تعریف این نوع نگاشت‌ها، برای $n \in \mathbb{N}$ و $k = 1, \dots, n$ مجموعه‌های جدا از هم $Y_k \in \Omega_{\text{am-}0}(H)$ و نگاشت‌های آفین $\alpha_k : Y_k \subseteq H \rightarrow G$ موجود هستند به طوری که $Y = \bigcup_{k=1}^n Y_k$ و $\alpha_k|_{Y_k} = \alpha|_{Y_k}$. بنابر گام اول این اثبات، می‌دانیم $(u \circ \alpha_k)^\circ \in B_p(H)$. حال بنابر رابطه $(u \circ \alpha_k)^\circ = \sum_{k=1}^n (u \circ \alpha_k)^\circ \cdot \chi_{Y_k}$ و این حقیقت که فضای $B_p(H)$ یک جبر است و $\chi_{Y_k} \in B_p(H)$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. همچنین داریم

$$\|(u \circ \alpha)^\circ\| \leq \|u\| \sum_{k=1}^n 2^{m_{Y_k}},$$

در اینجا مقدار m_{Y_k} همانند نتیجه ۴.۵ است.

□ حال از نامساوی اخیر، نامساوی مهم $\|\Phi_\alpha\| \leq \sum_{k=1}^n 2^{m_{Y_k}}$ نتیجه می‌شود.

تذکر ۲۰.۵. برای زیرگروه باز و میانگین‌پذیر G_0 از گروه موضعاً فشرده G از قسمت (۳) از گزاره ۱۷.۵ می‌توان نتیجه گرفت که فضای $B_p(G_0)$ متشکل از تحدید آن دسته توابع موجود در $B_p(G)$ به زیرگروه G_0 است که خارج از این مجموعه صفر می‌شوند. در نتیجه هنگام کار کردن با p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس می‌توان فرض کرد که نمایش p -جامع برای زیرگروه باز و میانگین‌پذیر G_0 از گروه G ، تحدید یک نمایش p -جامع از گروه G به زیرگروه G_0 است.

در ادامه به مطالعه مفهوم p -کاملاً کرانداری همریختی‌های وزنی، روی p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس می‌پردازیم. در این اقدام، از ساختار فضای p -عملگری ارائه شده در فصل ۴ استفاده می‌کنیم. در این فصل با توجه به پی‌ریزی انجام شده در دو فصل گذشته به مطالعه مفهوم p -کاملاً کرانداری برای همریختی‌هایی می‌پردازیم که توسط نگاشت‌های تکه‌ای آفین سره و پیوسته مانند $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ تولید شده‌اند. این همریختی‌ها که معمول است با نماد Φ_α نشان داده شوند، به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\Phi_\alpha : B_p(G) \rightarrow B_p(H),$$

$$\Phi_\alpha u = \begin{cases} u \circ \alpha, & \text{روی } Y \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad u \in B_p(G). \quad (15.5)$$

به طور دقیق تر، نشان می‌دهیم که اگر نگاشت α یک نگاشت آفین سره باشد، آنگاه همریختی Φ_α یک همریختی p -کاملاً انقباضی بوده و در حالتی که نگاشت α تکه‌ای آفین سره است، همریختی (۱۵.۵) یک همریختی p -کاملاً کراندار است. برای این هدف، بنابر نتایج به دست آمده در بخش ۳.۵ مجبوریم خود را به زیرگروه‌های میانگین‌پذیر از گروه H محدود کنیم. در بخش ۴.۵ از این فصل p -کاملاً کرانداری برخی از عملگرهای خاص که به روی p -صورت جبرهای فوریه اشتیل پس تعریف شده اند را بررسی می‌کنیم (قضیه ۲۲.۵). همچنین در بخش ۵.۵ نتایج به دست آمده در بخش قبل را به کار می‌گیریم و به یکی از بزرگترین اهداف این کتاب جامه عمل می‌پوشانیم. در واقع در بخش بعد نتایج موجود در [۳۷] که توسط ایلی برای جبرهای فیگا-تالامانکا-هرتس به دست آمده است را برای p -صورت جبرهای فوریه اشتیل پس تعمیم می‌دهیم.

۴.۵ عملگرهای خاص p -کاملاً کراندار روی فضای $B_p(G)$

در بخش‌های گذشته ویژگی‌های اساسی p -صورت جبرهای فوریه اشتیل پس و جبرهای p -شبه توابع نشان داده شدند. در این بخش به مهیا کردن ابزارهای ضروری و مهم برای کار با عملگرهای تعریف شده بر روی $B_p(G)$ می‌پردازیم. در گام نخست، در گزاره اول برای زیرگروه نرمال و بسته N از یک گروه موضعاً فشرده G ، رابطه بین نمایش‌های p -جامع گروه G و گروه خارج قسمتی G/N را بیان و اثبات می‌کنیم. برای این هدف، نگاشت خارج قسمتی شناخته شده $q: G \rightarrow G/N$ ، $q(x) = xN$ را برای هر $x \in G$ ، در نظر بگیرید که در واقع نگاشت خارج قسمت طبیعی است و می‌دانیم که در این حالت این نگاشت باز، پوشا و پیوسته است.

گزاره ۲۱.۵. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و $N \subseteq G$ یک زیرگروه نرمال و بسته باشد. در این صورت

۱. به ازای هر نمایش $(\rho, F) \in \text{Rep}_p(G/N)$ نمایش $(\rho \circ q, F)$ به مجموعه $\text{Rep}_p(G)$ متعلق بوده و یکسانریختی طولیای $PF_{p, \rho \circ q}(G) = PF_{p, \rho}(G/N)$ برقرار است.

۲. هر نمایش مانند $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ یک نمایش مانند $(\tilde{\pi}_K, K) \in \text{Rep}_p(G/N)$ تولید می‌کند به طوری که $(\tilde{\pi}_K \circ q, K) \subseteq (\pi, E)$.

۳. با توجه به نمادگذاری قسمت (۲) هر نمایش p -جامع مانند (ρ, F) برای گروه G/N مشمول در نمایش $(\tilde{\pi}_K, K)$ است، که این نمایش توسط یک نمایش p -جامع (π, E) از گروه G تولید شده است.

۴. نگاشت

$$\Phi_q : B_p(G/N) \rightarrow B_{p, \tilde{\pi} \circ q}, \quad \Phi_q(u) = u \circ q, \quad u \in B_p(G/N),$$

یک نگاشت طولپا است.

برهان. ۱. فرض کنید $(\rho, F) \in \text{Rep}_p(G/N)$. چون نگاشت q یک همریختی پیوسته است، لذا داریم $(\rho \circ q, F) \in \text{Rep}_p(G)$. حال نگاشت P با تعریف زیر را در نظر بگیرید

$$P : L^1(G) \rightarrow L^1(G/N), \quad Pf(xN) = \int_N f(xn)dn, \quad xN \in G/N.$$

برای هر $\zeta \in F$ و $\psi \in F^*$ رابطه زیر برقرار است

$$\langle \rho \circ q(x)\zeta, \psi \rangle = \langle \rho(xN)\zeta, \psi \rangle, \quad x \in G. \quad (۱۶.۵)$$

همچنین برای هر تابع پیوسته مانند $u : G/N \rightarrow \mathbb{C}$ و هر تابع $f \in L^1(G)$ داریم

$$P((u \circ q) \cdot f) = u \cdot Pf,$$

و نتیجه می‌شود که

$$\langle \rho \circ q(f)\zeta, \psi \rangle = \langle \rho(Pf)\zeta, \psi \rangle, \quad f \in L^1(G). \quad (۱۷.۵)$$

حال چون اعضای F و $\zeta \in F^*$ در روابط (۱۶.۵) و (۱۷.۵) دلخواه هستند، داریم

$$\rho \circ q(x) = \rho(xN), \quad \text{و} \quad \rho \circ q(f) = \rho(Pf), \quad x \in G, f \in L^1(G). \quad (۱۸.۵)$$

با توجه به پوشایی نگاشت P رابطه (۱۸.۵) به معنی یکسانریختی طولپای فضاهای باناخ $PF_{p, \rho \circ q}(G) = PF_{p, \rho}(G/N)$ است.

۲. فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$. زیرفضای بسته K از فضای E که خود نیز یک QSL_p -فضا است را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K = \{\xi \in E : \pi(n)\xi = \xi, \forall n \in N\}.$$

نشان می‌دهیم فضای K تحت عملگر π پایا است؛ یعنی ادعا می‌کنیم که برای هر $x \in G$ و هر $\xi \in K$ داریم $\pi(x)\xi \in K$. همچنین

$$\pi(n)(\pi(x)\xi) = \pi(nx)\xi = \pi(xn')\xi = \pi(x)(\pi(n')\xi) = \pi(x)\xi.$$

در محاسبات بالا از این حقیقت که زیرگروه بسته N نرمال است (که نتیجه می‌دهد برای یک $n' \in N$ داریم $nx = xn'$) و بردار ξ از فضای K انتخاب شده است، استفاده کردیم. در نتیجه داریم $\pi(G)K \subseteq K$. همچنین، برای هر $f \in L^1(G)$ ، $n \in N$ ، $\xi \in K$ و $\eta \in K^*$ داریم

$$\begin{aligned} \langle \pi(n)\pi(f)\xi, \eta \rangle &= \int_G f(x) \langle \pi(n)\pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\ &= \int_G f(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx = \langle \pi(f)\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

در نتیجه با ثابت در نظر گرفتن $f \in L^1(G)$ و $n \in N$ و به دلیل دلخواه بودن $\xi \in K$ و $\eta \in K^*$ به تساوی $\pi(n)\pi(f)\xi = \pi(f)\xi$ می‌رسیم. حال با دلخواه در نظر گرفتن $n \in N$ ، $f \in L^1(G)$ و $\xi \in K$ داریم $\pi(L^1(G))K \subseteq K$ و در نتیجه $\pi(f)\xi \in K$. حال دوتایی (π_K, K) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\pi_K : G \rightarrow \mathcal{B}(K), \quad \pi_K(x) = \pi(x)|_K.$$

توجه کنید که از پایایی K برای خوش‌تعریفی عملگر بالا استفاده شد. به وضوح $(\pi_K, K) \in \text{Rep}_p(G)$ و $(\pi_K, K) \subseteq (\pi, E)$. حال قرار می‌دهیم

$$\tilde{\pi}_K : G/N \rightarrow \mathcal{B}(K), \quad \tilde{\pi}_K(xN) = \pi_K(x), \quad xN \in G/N.$$

بنابر تعریف فضای K دوتایی $(\tilde{\pi}_K, K)$ خوش‌تعریف بوده و به مجموعه $\text{Rep}_p(G/N)$ تعلق دارد. در واقع، اگر $xN = yN$ آنگاه $y^{-1}x \in N$ و در نتیجه $\pi_K(y^{-1}x) = I_K$ و نهایتاً $\pi_K(x) = \pi_K(y)$. همچنین $(\tilde{\pi}_K \circ q, K) = (\pi_K, K) \subseteq (\pi, E)$.

۳. فرض کنید $(\rho, F) \in \text{Rep}_p(G/N)$ یک نمایش p -جامع برای G/N باشد. با استفاده از قسمت (۱) نتیجه می‌شود که $(\rho \circ q, F) \in \text{Rep}_p(G)$ و در نتیجه این نمایش مشمول (در حد یک هم ارزی طولی) در یک نمایش p -جامع مانند (π, E) از G است. یعنی $F \subseteq E$ ، و برای $x \in G$ و $f \in L^1(G)$ ، $\rho \circ q(x) = \pi(x)|_F$ و $\rho \circ q(f) = \pi(f)|_F$.

علاوه بر این، بنابر تعریف فضای K نتیجه می‌شود که $F \subseteq K$. زیرا اگر $\xi \in F$ آنگاه برای هر $n \in N$

$$\pi(n)\xi = \rho \circ q(n)\xi = \rho(N)\xi = I(\xi) = \xi$$

بنابراین $\xi \in K$. حال از این که $F \subseteq K$ و $\rho \circ q = \pi|_F = \pi_K|_F$ نتیجه می‌گیریم $(\rho, F) \subseteq (\pi_K, K)$ و مهم تر از آن $(\rho, F) \subseteq (\tilde{\pi}_K, K)$. حال چون نمایش $(\tilde{\pi}_K, K)$ شامل نمایش p -جامع (ρ, F) است، خود نیز یک نمایش p -جامع است.

۴. بنابر توضیحات قسمت های قبل، نمایش $(\tilde{\pi}, K)$ یک نمایش p -جامع برای G/N است و این طولیایی نگاشت Φ_q را نتیجه می‌دهد.

□

قضیه بعد یکی از نتایج مهم این فصل به شمار می‌آید و در نتایج مربوط به همریختی‌های وزنی نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند.

قضیه ۲۲.۵. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $p \in (1, \infty)$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. برای هر نمایش مانند $(\rho, F) \in \text{Rep}_p(G)$ نگاشت همانی $I : B_{p,\rho} \rightarrow B_p(G)$ یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است.

۲. برای زیرگروه باز G° از گروه G ، نگاشت تحدید

$$R : B_p(G) \rightarrow B_p(G^\circ), \quad R(u) = u|_{G^\circ}, \quad u \in B_p(G),$$

یک همریختی p -کاملاً انقباضی است.

۳. برای عضو $a \in G$ نگاشت انتقال چپ

$$L_a : B_p(G) \rightarrow B_p(G) \quad L_a(u) = au, \quad au(x) = u(ax), \quad x \in G$$

یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است.

۴. همریختی

$$\Phi_q : B_p(G/N) \rightarrow B_p(G), \quad \Phi_q(u) = u \circ q,$$

یک همریختی p -کاملاً انقباضی است.

۵. برای زیرگروه باز و میانگین پذیر G_0 از گروه G ، نگاشت توسیع

$$E_{BB} : B_p(G_0) \rightarrow B_p(G), \quad E_{BB}(u) = u^\circ, \quad u \in B_p(G_0),$$

یک همریختی p -کاملاً انقباضی است.

۶. برای هر هم‌دسته Y از یک زیرگروه باز G_0 از گروه G ، نگاشت

$$M_Y : B_p(G) \rightarrow B_p(G), \quad M_Y(u) = u \cdot \chi_Y,$$

یک همریختی p -کاملاً انقباضی است. در حالت کلی‌تر، برای مجموعه Y در $\Omega_0(G)$ نگاشت M_Y یک همریختی p -کاملاً کراندار است.

برهان. ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم که برای هر نمایش $(\rho, F) \in \text{Rep}_p(G)$ نگاشت همانی زیر p -کاملاً انقباضی است

$$I : B_{p,\rho} \rightarrow B_p(G), \quad I(u) = u. \quad (۱۹.۵)$$

فرض کنید (π, E) یک نمایش p -جامع برای گروه G باشد که شامل نمایش (ρ, F) است. بین دو نمایش (π, E) و (ρ, F) روابط زیر برقرار است

$$F \subseteq E, \quad \rho(x) = \pi(x)|_F, \quad \text{و} \quad \rho(f) = \pi(f)|_F, \quad x \in G, \quad f \in L^1(G).$$

چون $\rho(f) = \pi(f)|_F$ آنگاه داریم $\|\rho(f)\| \leq \|\pi(f)\|$. همچنین نگاشت I نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره روی دامنه و برد، پیوسته است. در واقع این نگاشت دوگان نگاشت زیر است

$$*I : UPF_p(G) \rightarrow PF_{p,\rho}(G), \quad *I(\pi(f)) = \pi(f)|_F = \rho(f).$$

بنابر گزاره ۱۹.۴ نگاشت $*I$ یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است و در نتیجه نگاشت I نیز چنین است.

۲. فرض کنید $G \subseteq G_0$ یک زیرگروه باز باشد. از گزاره ۱۵.۵ از فصل دوم، نگاشت‌های R و $S = S_\pi$ (برای نمایش p -جامع (π, E) از گروه G) را در نظر بگیرید.

$$R : B_p(G) \rightarrow B_p(G_0), \quad R(u) = u|_{G_0},$$

$$S : PF_{p, \pi_{G_0}}(G_0) \rightarrow UPF_p(G), \quad S(\pi_{G_0}(f)) = \pi(f^\circ), \quad f \in L^1(G_0).$$

می‌دانیم $S^* = R$. همچنین از لم ۱۴.۵ و رابطه (۱۱.۵) می‌دانیم

$$\pi_{G_0}(f) = \pi(f^\circ), \quad f \in L^1(G_0).$$

بنابراین نگاشت S یک نگاشت همانی است و در نتیجه نگاشتی p -کاملاً طولپا است و $\|R\|_{p\text{-cb}} = \|S^*\|_{p\text{-cb}} \leq \|S\|_{p\text{-cb}} = 1$.

۳. برای عضو $a \in G$ نگاشت زیر را در نظر بگیرید

$$L_a : B_p(G) \rightarrow B_p(G), \quad L_a(u) = au, \quad au(x) = u(ax), \quad x \in G.$$

نگاشت L_a دوگان نگاشت زیر است

$$*L_a : UPF_p(G) \rightarrow UPF_p(G), \quad *L_a(\pi(f)) = \pi(\lambda_p(a)f).$$

به وضوح نگاشت $*L_a$ p -کاملاً انقباضی است و در نتیجه نگاشت L_a نیز چنین است. از طرف دیگر نگاشت L_a وارون پذیر بوده و وارون آن نگاشت $L_{a^{-1}}$ است. مجدداً با استفاده از استدلال قبل این بار برای نگاشت وارون، به این نتیجه می‌رسیم که نگاشت $L_{a^{-1}}$ نیز p -کاملاً انقباضی است و این ایجاب می‌کند که L_a نگاشتی p -کاملاً طولپا است.

۴. فرض کنید $N \subseteq G$ یک زیرگروه نرمال و بسته باشد. با استفاده از نمادهای گزاره ۲۱.۵ فرض کنید $(\pi, E) \in \text{Rep}_p(G)$ یک نمایش p -جامع باشد و دوتایی $(\tilde{\pi}_K, K)$ نمایش p -جامع تولید شده توسط آن برای گروه G/N باشد. برای توابع $f \in L^1(G)$ و $u \in B_p(G/N)$ رابطه زیر برقرار است

$$\langle \pi(f), \Phi_q(u) \rangle = \langle \pi(f), u \circ q \rangle = \langle \tilde{\pi}(Pf), u \rangle. \quad (20.5)$$

از رابطه (۲۰.۵) نتیجه می‌شود که نگاشت Φ_q نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره روی دامنه و برد پیوسته است. در واقع این همربختی، عملگر دوگان نگاشت Φ_q^* است که برای $f \in L^1(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$*\Phi_q : PF_p(\tilde{\pi} \circ q)(G) \rightarrow UPF_p(G/N), \quad *\Phi_q(\tilde{\pi} \circ q(f)) = \tilde{\pi}(Pf).$$

با استفاده از رابطه (۱۸.۵) داریم $\tilde{\pi} \circ q(f) = \tilde{\pi}(Pf)$ و بنابراین نگاشت Φ_q^* همانی بوده و با استفاده از محاسبات زیر نتیجه می‌شود که p -کاملاً طولپا است

$$\|*\Phi_q^{(n)}([\tilde{\pi} \circ q(f_{ij})])\|_n = \|[\tilde{\pi}(Pf_{ij})]\|_n = \|[\tilde{\pi} \circ q(f_{ij})]\|_n.$$

در نهایت نامساوی مطلوب $\|\Phi_q\|_{p\text{-cb}} \leq 1$ حاصل می‌شود.

۵. فرض کنید $G_\circ \subseteq G$ یک زیرگروه باز و میانگین پذیر باشد و $u \in B_p(G_\circ)$. با استفاده از قضیه گسترش (گزاره ۱۷.۵ از فصل دوم) می‌دانیم که نگاشت گسترش E_{BB} خوش‌تعریف است

$$E_{BB} : B_p(G_\circ) \rightarrow B_p(G), \quad E_{BB}(u) = u^\circ.$$

فرض کنید نمایش (π, E) یک نمایش p -جامع از گروه G باشد. نمایش حاصل از تحدید نمایش (π, E) به زیرگروه $G_\circ$ را با $(\pi_{G_\circ}, E)$ نشان می‌دهیم. از ملاحظه ۲۰.۵ می‌دانیم که به دلیل میانگین پذیر بودن زیرگروه باز $G_\circ$ ، نمایش $(\pi_{G_\circ}, E)$ یک نمایش p -جامع برای آن است. با استفاده از رابطه زیر

$$\langle \pi(f), u^\circ \rangle = \langle \pi_{G_\circ}(f|_{G_\circ}), u \rangle, \quad f \in L^1(G), \quad u \in B_p(G_\circ), \quad (۲۱.۵)$$

نتیجه می‌شود که نگاشت E_{BB} نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره روی دامنه و برد پیوسته است. از حقیقت اخیر در می‌یابیم که نگاشت E_{BB} دوگان نگاشت $*E_{BB}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$*E_{BB} : UPF_p(G) \rightarrow UPF_p(G_\circ), \quad *E_{BB}(\pi(f)) := \pi_{G_\circ}(f|_{G_\circ}).$$

حال با استفاده از رابطه (۲۱.۵) داریم $(*E_{BB})^* = E_{BB}$. همچنین بنابر قضیه خودتوان‌های $B_p(G)$ (قضیه ۲.۵) می‌دانیم برای زیرگروه باز $G_\circ$ تابع مشخصه $\chi_{G_\circ}$ به

فضای $B_p(G)$ تعلق دارد و تابع ضریب نرمال شده نمایش (π, E) است. به طور دقیق تر، بردارهای E و E^* $\xi_\chi \in E$ و $\eta_\chi \in E^*$ موجود هستند به طوری که

$$\|\xi_\chi\| = \|\eta_\chi\| = 1, \text{ و } \chi_{G^\circ}(x) = \langle \pi(x)\xi_\chi, \eta_\chi \rangle, \quad x \in G. \quad (22.5)$$

از طرف دیگر، برای تابع $f \in L^1(G^\circ)$ و بردارهای E و E^* $\xi \in E$ و $\eta \in E^*$ محاسبات زیر حائز اهمیت هستند

$$\begin{aligned} \langle \pi(f\chi_{G^\circ})\xi, \eta \rangle &= \int_G f(x)\chi_{G^\circ}(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\ &= \int_G f(x) \langle \pi(x)\xi_\chi, \eta_\chi \rangle \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx \\ &= \int_G f(x) \langle (\pi(x) \otimes \pi(x))(\xi_\chi \otimes \xi), \eta_\chi \otimes \eta \rangle dx \\ &= \langle (\pi \otimes \pi(f))(\xi_\chi \otimes \xi), \eta_\chi \otimes \eta \rangle, \end{aligned}$$

رابطه بالا تساوی‌های مهم زیر را برای $f \in L^1(G)$ ، $\xi \in E$ و $\eta \in E^*$ نتیجه می‌دهد

$$\langle \pi(f\chi_{G^\circ})\xi, \eta \rangle = \langle (\pi \otimes \pi(f))(\xi_\chi \otimes \xi), \eta_\chi \otimes \eta \rangle. \quad (23.5)$$

همچنین داریم

$$\langle \pi(f\chi_{G^\circ})\xi, \eta \rangle = \langle \pi_{G^\circ}(f|_{G^\circ})\xi, \eta \rangle. \quad (24.5)$$

بنابراین، با ترکیب کردن روابط (23.5) و (24.5) داریم

$$\langle \pi_{G^\circ}(f|_{G^\circ})\xi, \eta \rangle = \langle (\pi \otimes \pi(f))(\xi_\chi \otimes \xi), \eta_\chi \otimes \eta \rangle. \quad (25.5)$$

با توجه به p -جامع بودن نمایش (π, E) و شمول $(\pi \otimes \pi, E \tilde{\otimes}_p E)$ نتیجه می‌شود که دوتایی $(\pi \otimes \pi, E \tilde{\otimes}_p E)$ نیز خود یک نمایش p -جامع برای G است. نگاشت زیر را در نظر بگیرید

$$*_E^{(n)}_{BB} : \mathbb{M}_n(UPF_p(G)) \rightarrow \mathbb{M}_n(UPF_p(G^\circ)), \quad *_E^{(n)}_{BB}(\pi(f_{ij})) := (\pi_{G^\circ}(f_{ij}|_{G^\circ})).$$

حال بنابر رابطه (25.5) داریم

$$\|*_E^{(n)}_{BB}(\pi(f_{ij}))\|_n^p = \|[\pi_{G^\circ}(f_{ij}|_{G^\circ})]\|_n^p$$

$$= \sup_{\sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^p \leq 1, \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^{p'} \leq 1} \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^n \langle \pi_{G_*}(f_{ij}|_{G_*}) \xi_j, \eta_i \rangle \right| \right\} \quad (26.5)$$

کمیت فوق کوچکتر است از

$$\sup_{\sum_{j=1}^n \|\phi_j\|_{E \otimes_p E}^p \leq 1, \sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{E^* \otimes_{p'} E^*}^{p'} \leq 1} \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^n \langle (\pi \otimes \pi(f_{ij})) \phi_j, \psi_i \rangle \right| \right\} \quad (27.5)$$

و ۲۷.۵ نیز با $\|\pi \otimes \pi(f_{ij})\|_n^p$ برابر است. همچنین در فصل سوم دیدیم که نرم روی فضای $UPF_p(G)$ و روی فضای ماتریسی آن، مستقل از انتخاب نمایش p -جامع است (قضیه ۲۰.۴) و این تساوی $\|\pi \otimes \pi(f_{ij})\|_n = \|\pi(f_{ij})\|_n$ را نتیجه می‌دهد. در نتیجه از رابطه (۲۶.۵) داریم $\|E_{BB}\|_{p\text{-cb}} \leq 1$ و در نهایت نامساوی مطلوب $\|E_{BB}\|_{p\text{-cb}} \leq 1$ حاصل می‌شود.

۶. فرض کنید (π, E) یک نمایش p -جامع برای گروه G باشد. با استفاده از نتیجه ۴.۵ از فصل دوم، برای مجموعه $Y \in \Omega_*(G)$ نگاشت $M_Y : B_p(G) \rightarrow B_p(G)$ که برای $u \in B_p(G)$ به صورت $M_Y(u) = u \cdot \chi_Y$ است، خوش‌تعریف بوده و داریم $\|M_Y\| \leq 2^{m_Y}$. از طرف دیگر با استفاده از رابطه زیر درمی‌یابیم که نگاشت M_Y نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره روی دامنه و برد پیوسته است

$$\langle \pi(f), u \cdot \chi_Y \rangle = \langle \pi(f \cdot \chi_Y), u \rangle, \quad f \in L^1(G), u \in B_p(G). \quad (28.5)$$

حال مجاز هستیم که پیش-دوگان این نگاشت را به صورت زیر تعریف کنیم

$$*_M Y : UPF_p(G) \rightarrow UPF_p(G), \quad *_M Y(\pi(f)) = \pi(f \cdot \chi_Y),$$

که با توجه به رابطه (۲۸.۵) تساوی $(*_M Y)^* = M_Y$ تضمین می‌شود. برای ثابت کردن ادعای مورد نظر، ابتدا فرض می‌کنیم که Y خود یک همداسته باز است، سپس ادعا را برای حالتی که $Y \in \Omega_*(G)$ است نشان می‌دهیم.

گام اول: فرض کنید Y یک همدسته باز باشد. از قضیه خودتوان‌های جبر $B_p(G)$ می‌دانیم که تابع مشخصه χ_Y تابع ضرب نرمال شده نمایش p -جامع (π, E) است که به معنی وجود بردارهای E و $\xi_Y \in E^*$ و $\eta_Y \in E$ است به طوری که

$$\|\xi_Y\| = \|\eta_Y\| = 1, \text{ و } \chi_Y(x) = \langle \pi(x)\xi_Y, \eta_Y \rangle, \quad x \in G.$$

حال از رابطه (۲۳.۵) نتیجه می‌شود که برای ماتریس $(\pi(f_{ij})) \in \mathbb{M}_n(UPF_p(G))$ روابط زیر برقرارند

$$\begin{aligned} \|[\pi(f_{ij} \cdot \chi_Y)]\|_n &= \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^n \langle \pi(f_{ij} \cdot \chi_Y)\xi_j, \eta_i \rangle \right| : \sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^p \leq 1, \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^p \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^n \langle \pi \otimes \pi(f_{ij})\phi_j, \psi_i \rangle \right| : \sum_{j=1}^n \|\phi_j\|_{E \otimes_p E}^p \leq 1, \sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{E^* \otimes_{p'} E^*}^p \leq 1 \right\} \\ &= \|[\pi \otimes \pi(f_{ij})]\|_n. \end{aligned}$$

همچنین، چون نرم به روی فضای ماتریسی $UPF_p(G)$ مستقل از انتخاب نمایش p -جامع است، در نتیجه تساوی $\|[\pi \otimes \pi(f_{ij})]\|_n = \|[\pi(f_{ij})]\|_n$ برقرار است. حال از محاسبات بالا نتیجه می‌شود که نگاشت $*M_Y$ نگاشتی p -کاملاً انقباضی است و در نتیجه $\|M_Y\|_{p\text{-cb}} \leq 1$.

گام دوم: حال فرض کنید $Y = Y_0 \cup_{i=1}^{m_Y} Y_i \in \Omega_0(G)$. رابطه زیر به سادگی برقرار است

$$\begin{aligned} M_Y &= M_{Y_0} - \left(\sum_{i=1}^{m_Y} M_{Y_i} - \sum_{i,j} M_{Y_i \cap Y_j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j,k} M_{Y_i \cap Y_j \cap Y_k} + \dots + (-1)^{m_Y+1} M_{Y_1 \cap \dots \cap Y_{m_Y}} \right). \end{aligned}$$

$$\|M_Y\|_{p\text{-cb}} \leq 2^{m_Y} \text{ بنابراین}$$

□

تذکر ۲۳.۵. اهمیت قسمت (۱) از قضیه ۲۲.۵ هنگام کار با عملگرهایی مشخص می‌شود که برد آنها زیرفضایی از فضای p -صورت جبرهای فوریه اشتیل‌یس است. در واقع در ادامه قضیه ۲۲.۵ تلویحاً از این قسمت استفاده شده است.

۵.۵ همریختی‌های وزنی p -کاملاً کراندار روی فضای $B_p(G)$

به عنوان کاربردی از نتایج به دست آمده در فصل‌های گذشته، در این فصل به مطالعه همریختی‌هایی به شکل Φ_α که به صورت زیر تعریف می‌شوند، خواهیم پرداخت

$$\Phi_\alpha : B_p(G) \rightarrow B_p(H), \quad \Phi_\alpha u = \begin{cases} u \circ \alpha & \text{روی } Y \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad u \in B_p(G).$$

در این مساله، نگاشت $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت سره، تکه‌ای آفین و پیوسته است. همچنین مجموعه Y به صورت $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ است که در اینجا برای $i = 1, \dots, n$ مجموعه‌های دو به دو مجزای Y_i به فضای $\Omega_{\text{am-}\circ}(H)$ متعلق هستند. در اینجا منظور از $\Omega_{\text{am-}\circ}(H)$ حلقه همه هم‌دسته‌های زیرگروه‌های باز و میانگین پذیر است.

گزاره ۲۴.۵. فرض کنید G و H گروه‌های موضعاً فشرده بوده و نگاشت $\alpha : H \rightarrow G$ یک همریختی گروهی سره و پیوسته باشد. آنگاه همریختی

$$\Phi_\alpha : B_p(G) \rightarrow B_p(H), \quad \Phi_\alpha(u) = u \circ \alpha, \quad u \in B_p(G),$$

خوش تعریف بوده و p -کاملاً انقباضی است.

برهان. فرض کنید نمایش (π, E) یک نمایش p -جامع برای گروه G باشد. به وضوح $(\pi \circ \alpha, E) \in \text{Rep}_p(H)$. همچنین همریختی Φ_α انقباضی بوده و برد آن زیرفضایی از فضای $B_p(H)$ است. در ادامه، اثبات را در دو مرحله به انجام می‌رسانیم.

مرحله اول: فرض می‌کنیم که نگاشت $\alpha : H \rightarrow G$ یک یکریختی پیوسته باشد. در این حالت دوتایی $(\pi \circ \alpha, E)$ یک نمایش p -جامع برای گروه H است. به عبارت دقیق‌تر، به کمک رابطه (۱.۳) به آسانی نتیجه می‌شود که یک تناظر یک به یک و پوشا بین دو مجموعه $\text{Cyc}_p(H)$ و $\text{Cyc}_p(G)$ برقرار است و این حکم را نتیجه می‌دهد. همچنین مجدداً بنابر رابطه (۱.۳) برای توابع دلخواه $f \in L^1(H)$ و $u \in B_p(G)$ رابطه مهم زیر برقرار است

$$\begin{aligned} \langle \pi \circ \alpha(f), u \circ \alpha \rangle &= \int_H f(h) u \circ \alpha(h) dh \\ &= \int_H (f \circ \alpha^{-1}) \circ \alpha(h) u \circ \alpha(h) dh \\ &= c_\alpha \int_G f \circ \alpha^{-1}(x) u(x) dx \end{aligned}$$

$$= c_\alpha \langle \pi(f \circ \alpha^{-1}), u \rangle, \quad (29.5)$$

که به معنی پیوستگی همریختی Φ_α نسبت به توپولوژی ضعیف-ستاره روی دامنه و برد است. در نتیجه می‌توان نگاشت پیش-دوگان آن را به صورت زیر تعریف کرد

$$*\Phi_\alpha : UPF_p(H) \rightarrow UPF_p(G), \quad *\Phi_\alpha(\pi \circ \alpha(f)) := c_\alpha \pi(f \circ \alpha^{-1}).$$

با استفاده از رابطه (29.5) تساوی $(*\Phi_\alpha)^* = \Phi_\alpha$ حاصل می‌شود که به معنی درستی تعریف نگاشت $*\Phi_\alpha$ است. از طرف دیگر برای اعضای دلخواه $\xi \in E$ و $\eta \in E^*$ رابطه زیر برقرار است

$$\begin{aligned} \langle \pi \circ \alpha(f) \xi, \eta \rangle &= \int_H f(h) \langle \pi \circ \alpha(h) \xi, \eta \rangle dh \\ &= \int_H f \circ \alpha^{-1} \circ \alpha(h) \langle \pi \circ \alpha(h) \xi, \eta \rangle dh \\ &= c_\alpha \int_G f \circ \alpha^{-1}(x) \langle \pi(x) \xi, \eta \rangle dx \\ &= \langle c_\alpha \pi(f \circ \alpha^{-1}) \xi, \eta \rangle, \end{aligned}$$

و چون اعضای $\xi \in E$ و $\eta \in E^*$ دلخواه هستند، در نتیجه داریم

$$\pi \circ \alpha(f) = c_\alpha \pi(f \circ \alpha^{-1}).$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که نگاشت $*\Phi_\alpha$ یک نگاشت همانی است که بنابر محاسبات زیر p -کاملاً طولپا است

$$\|*\Phi_\alpha^{(n)}(\pi \circ \alpha(f_{i,j}))\|_n = \|(c_\alpha \pi(f_{i,j} \circ \alpha^{-1}))\|_n = \|(\pi \circ \alpha(f_{i,j}))\|_n.$$

بنابراین نامساوی مطلوب $\|\Phi_\alpha\|_{p\text{-cb}} \leq \|*\Phi_\alpha\|_{p\text{-cb}} = 1$ حاصل می‌شود. مرحله دوم: حال فرض کنید نگاشت $\alpha : H \rightarrow G$ یک همریختی سره و پیوسته باشد. قرار دهید $G_* = \alpha(H)$ و $N = \ker \alpha$. تعریف کنید

$$\tilde{\alpha} : H/N \rightarrow G_*, \quad \tilde{\alpha}(xN) = \alpha(x), \quad x \in G.$$

با استفاده از گزاره ۱۷.۳ از فصل اول، نگاشت $\tilde{\alpha}$ یک یکرختی پیوسته، N یک زیرگروه نرمال و فشرده از H و G_* یک زیرگروه باز از G است. همچنین $\alpha = \tilde{\alpha} \circ q$. حال با استفاده

از گام اول می‌دانیم که همریختی $\Phi_{\tilde{\alpha}}$ یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است. از طرفی رابطه $\Phi_{\alpha} = \Phi_q \circ \Phi_{\tilde{\alpha}} \circ R$ برقرار است. با استفاده از قسمت های (۲) و (۴) از قضیه ۲۲.۵ به آسانی نتیجه می‌شود که همریختی Φ_{α} یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است.

□

از آنجا که نگاشت توسیع در قضیه ۱۷.۵ تحت شرط میانگین‌پذیری قابل تعریف بود، در نتیجه در گزاره پیش رو، ناگزیر از قرار دادن فرض میانگین‌پذیری روی زیرگروه‌های H هستیم.

گزاره ۲۵.۵. فرض کنید G و H دو گروه توپولوژیکی باشند. برای همدسته باز Y از یک زیرگروه باز و میانگین‌پذیر از گروه H فرض کنید $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت آفین سره و پیوسته باشد. آنگاه همریختی Φ_{α} که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است.

$$\Phi_{\alpha} : B_p(G) \rightarrow B_p(H), \quad \Phi_{\alpha}(u) = \begin{cases} u \circ \alpha, & \text{روی } Y \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad u \in B_p(G). \quad (۳۰.۵)$$

علاوه بر این، اگر برای $n \in \mathbb{N}$ و شمارنده طبیعی $i = 1, \dots, n$ مجموعه‌های دو به دو مجزای $Y_i \in \Omega_{\text{am-}\circ}(H)$ ، طوری باشند که $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ و α یک نگاشت تکه‌ای آفین سره و پیوسته باشد، آنگاه همریختی Φ_{α} یک نگاشت p -کاملاً کراندار است.

برهان. در قضیه ۱۷.۵ خوش‌تعریفی نگاشت (۳۰.۵) نشان داده شد. همچنین دیدیم که این همریختی، در حالتی که α آفین است، انقباضی و در حالتی که α تکه‌ای آفین است، کراندار است. در ابتدا فرض می‌کنیم که نگاشت $\alpha : Y = y_{\circ}H_{\circ} \rightarrow G$ آفین، سره و پیوسته روی همدسته باز $Y = y_{\circ}H_{\circ}$ از زیرگروه باز و میانگین‌پذیر $H_{\circ}$ از گروه H باشد. بنابر ملاحظه ۱۳.۳ یک همریختی گروهی مانند $\beta : H_{\circ} \subseteq H \rightarrow G$ متناظر با نگاشت آفین α وجود دارد که به صورت

$$\beta(h) = \alpha(y_{\circ})^{-1} \alpha(y_{\circ}h), \quad h \in H_{\circ},$$

تعریف می‌شود. از طرفی، بنابر ملاحظه ۱۶.۳ این همریختی نیز سره است. حال رابطه $\Phi_{\alpha} = \Phi_{\beta} \circ L_{\alpha(y_{\circ})} \circ E_{BB} \circ L_{y_{\circ}^{-1}}$ را در نظر بگیرید. بنابر گزاره ۲۴.۵ و قسمت های (۳) و (۵) از قضیه ۲۲.۵ درمی‌یابیم که همریختی Φ_{α} یک نگاشت p -کاملاً انقباضی است.

اکنون فرض کنید نگاشت $\alpha : Y \subseteq H \rightarrow G$ یک نگاشت تکه‌ای آفین سره و پیوسته باشد. دراین صورت برای $n \in \mathbb{N}$ و $i = 1, \dots, n$ مجموعه‌های مجزای $Y_i \in \Omega_{\text{am-}o}(H)$ و نگاشت‌های آفین $\alpha_i : \text{Aff}(Y_i) \rightarrow G$ موجود هستند به‌طوری‌که

$$Y = \cup_{i=1}^n Y_i, \quad \text{و} \quad \alpha_i|_{Y_i} = \alpha|_{Y_i}.$$

از آن مهم‌تر، بنابر لم ۱۹.۳ برای هر $i = 1, \dots, n$ نگاشت α_i سره است. با این توضیحات، با استفاده از قسمت قبل برای α_i ‌ها همریختی‌های متناظر با آنها یعنی Φ_{α_i} نگاشت‌های p -کاملاً انقباضی هستند. همچنین بنابر قسمت (۶) از قضیه ۲۲.۵ برای $i = 1, \dots, n$ داریم $\|\Phi_{\alpha_i}\|_{p\text{-cb}} \leq 2^{m_{Y_i}}$. حال اگر رابطه $\Phi_{\alpha} = \sum_{i=1}^n M_{Y_i} \circ \Phi_{\alpha_i}$ را در نظر بگیریم، آنگاه واضح است که نگاشت Φ_{α} یک نگاشت p -کاملاً کراندار بوده و کران آن از رابطه $\|\Phi_{\alpha}\|_{p\text{-cb}} \leq \sum_{i=1}^n 2^{m_{Y_i}}$ داده می‌شود. $\square$

جبرهای فوریه تحدید شده روی نیم‌گروه‌های وارون

در این فصل که بر اساس [۵، ۵۹] نوشته شده است، به تعمیم جبرهای فوریه روی نیم‌گروه‌های وارون^۲ می‌پردازیم. در آنالیز هارمونیک کلاسیک ارتباط بین نمایش‌ها و توابع مثبت، تکنیک اصلی تعریف جبرهای از نوع فوریه است. این ارتباط روی گروه‌واره‌ها^۳ هم مطالعه شده است. در این فصل ارتباط مشابهی از نوع بالا روی نیم‌گروه‌های مناسب معرفی می‌شود. برای این منظور واژه «تحدید شده»^۴ به مفاهیم قبلی نیز اضافه خواهد شد. تعمیم به p -صورت جبرهای معرفی شده هدف پایانی این فصل است. مطالعه میانگین پذیری مناسب برای جبر فوریه نیم‌گروهی توسط امینی و رضاوند در [۶] صورت گرفته است.

در این فصل S یک نیم‌گروه یک‌دار معکوس است. به این معنا که S یک نیم‌گروه گسسته

2. inverse semigroup
3. groupoid
4. restricted

است به طوری که برای هر $s \in S$ ، عضو یکتای $s^* \in S$ چنان موجود است که

$$ss^*s = s, \quad s^*ss^* = s^*.$$

در واقع نگاشت $s \rightarrow s^*$ یک برگردان روی S است. مجموعه عناصر خودتوان S به صورت $E = \{ss^* | s \in S\}$ تعریف می‌شود. E یک زیرنیم‌گروه جابجایی از S است. ترتیب طبیعی $\leq$ روی E وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e, f \in E, \quad e \leq f \iff ef = e$$

یک $*$ -نمایش π روی S عبارت است از زوج $\{\pi, \mathcal{H}_\pi\}$ شامل یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\pi$ و نگاشت $\pi: S \rightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ ، که برای هر $x, y \in S$ در $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ و $\pi(x^*) = \pi(x)^*$ صدق می‌کند، که یک $*$ -همریختی نیم‌گروهی روی S به توی نیم‌گروه وارون طولیایی‌های جزئی روی $\mathcal{H}_\pi$ است. ممکن است گاهی این نمایش را با π نشان دهیم و این به این معناست که یک فضای هیلبرت هم کنار آن وجود دارد.

فرض کنید $\sum(S)$ خانواده همه $*$ -نمایش‌های π از S با شرط $\|\pi\| := \sup_{x \in S} \|\pi(x)\| \leq 1$ باشد. برای $1 \leq p < \infty$ ، فضای باناخ همه توابع مختلط-مقدار f روی S است که $\|f\|_p := \left(\sum |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ متناهی باشد. برای $p = \infty$ ، $\ell^\infty(S)$ شامل همه توابع f با شرط $\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty$ است. به خاطر می‌آوریم که $\ell^1(S)$ با ضرب پیچشی

$$(f * g)(x) = \sum_{st=x} f(s)g(t) \quad f, g \in \ell^1(S)$$

یک جبر باناخ است و $\ell^2(S)$ با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in S} f(x) \overline{g(x)} \quad (f, g \in \ell^2(S))$$

یک فضای هیلبرت است. برای هر $f \in \ell^p(S)$ قرار می‌دهیم

$$\check{f}(x) = f(x^*), \quad \tilde{f}(x) = \overline{f(x^*)}.$$

در این صورت گوئیم f متقارن است، هرگاه $f = \tilde{f}$. حال با الهام از ضرب گروه‌واره‌ای، ضرب تحدید شده زیر را روی $S \cup \{0\}$ تعریف می‌کنیم

$$* = \circ, \quad x \circ y = \begin{cases} xy & \text{اگر } x^*x = yy^* \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad x, y \in S \cup \{0\},$$

در این صورت $(S \cup \{\circ\}, \circ)$ را نیم گروه تحدید شده می نامیم و با S_r نمایش می دهیم. منظور از نمایش تحدید شده $\{\pi, \mathcal{H}_\pi\}$ روی S نگاشت $\pi : S \longrightarrow B(\mathcal{H}_\pi)$ است به طوری که

$$\pi(x^*) = \pi(x)^* \quad x \in S$$

$$\pi(x)\pi(y) = \begin{cases} xy & x^*x = yy^* \text{ اگر} \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $\sum_r = \sum_r(S)$ خانواده همه نمایش های تحدید شده π از S با شرط

$$\|\pi\| = \sup_{x \in S} \|\pi(x)\| \leq 1$$

باشد، آنگاه ارتباط بین $\sum_r(S)$ و $\sum(S_r)$ به سادگی دیده می شود. $\sum_\circ(S_r)$ را مجموعه همه $\pi \in \sum(S_r)$ تعریف می کنیم که $\pi(\circ) = \circ$. در این صورت $\sum_\circ(S_r)$ نمایش های دوری S_r را دربردارد و $\sum_r(S) = \sum_\circ(S_r)$. به طور خاص نمایش منظم چپ تحدید شده را مطالعه می کنیم.

$\lambda : S \longrightarrow B(\ell^1(S))$ با تعریف زیر نمایش منظم چپ تحدید شده نامیده می شود

$$\lambda_r(x)\xi(y) = \begin{cases} \xi(x^*y) & xx^* = yy^* \text{ اگر} \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \xi \in \ell^1(S), x, y \in S$$

داریم $\lambda_r \in \sum_r(S)$ ، زیرا برای $x \in S$ و $\xi, \eta \in \ell^1(S)$

$$\|\lambda_r(x)\xi\|_1 = \sum_{xx^*=yy^*} |\xi(x^*y)| \leq \sum_{t \in S} |\xi(t)| = \|\xi\|_1$$

بنابراین $\|\lambda_r\| = \sup_{x \in S} \|\lambda_r(x)\| \leq 1$. همچنین

$$\begin{aligned} \langle \lambda_r(x^*)\xi, \eta \rangle &= \sum_{y \in S} \lambda_r(x^*)\xi(y)\overline{\eta(y)} = \sum_{x^*x=yy^*} \xi(xy)\overline{\eta(y)} \\ &= \sum_{x^*x=zz^*} \xi(z)\overline{\eta(x^*z)} = \langle \xi, \lambda_r(x)\eta \rangle. \end{aligned}$$

دو رابطه آخر به این دلیل برقرار هستند که اگر $x^*x = yy^*$ آنگاه با گرفتن $xy = z$ داریم $xx^* = zz^*$ و $zz^* = xyy^*x^* = xx^*$ و $x^*z = x^*xy = y$ از سوی دیگر اگر $xx^* = zz^*$ با قراردادن

$x^*z = y$ داریم $xyy^* = x^*zz^*x = x^*x$ در نهایت برای هر x, y, z در S و $\xi \in \ell^{\vee}(S)$ داریم

$$\lambda_r(xy)\xi(z) = \begin{cases} \xi(y^*x^*z) & \text{اگر } xyy^*x^* = zz^* \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و همچنین

$$\lambda_r(x)\lambda_r(y)\xi(z) = \begin{cases} \xi(y^*x^*z) & \text{اگر } xx^* = zz^*, yy^* = x^*zz^*x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال دو شرط $xx^* = zz^*$ و $xyy^*x^* = zz^*$ را نتیجه می‌دهد و بنابراین $\lambda_r(x)\lambda_r(y)$ با $\lambda_r(xy)$ در حالت $xx^* = zz^*$ برابر است و در سایر حالت‌ها با صفر برابر است. بنابراین $\lambda_r \in \sum_r(S)$. حال برای ξ, η در $\ell^{\vee}(S)$ یا $\ell^{\vee}(S)$ ، تعریف می‌کنیم

$$(\xi \bullet \eta)(x) = \sum_{x^*x=yy^*} \xi(xy)\eta(y^*) \quad (x \in S)$$

در این صورت دیده می‌شود که در هر دو حالت، سری فوق همگراست و داریم

$$(\lambda_r(x^*)\xi, \eta) = \xi \bullet \tilde{\eta}(x) \quad (x \in S).$$

به‌طور مشابه نمایش منظم راست تحدید شده، ρ_r ، از S روی $\ell^{\vee}(S)$ به شکل

$$\rho_r(x)\xi(y) = \begin{cases} \xi(yx) & \text{اگر } xx^* = y^*y \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \xi \in \ell^{\vee}(S) (x, y \in S)$$

تعریف می‌شود. در این صورت ρ_r به $\sum_r(S)$ متعلق است و

$$\langle \rho_r(x)\xi, \eta \rangle = \tilde{\eta} \bullet \xi(x) \quad (x \in S, \xi, \eta \in \ell^{\vee}(S)).$$

همچنین داریم

$$\langle \tilde{\rho}_r(\varphi)\xi, \eta \rangle = \varphi \bullet (\tilde{\xi} \bullet \tilde{\eta})(1) \quad \varphi \in \ell^{\vee}(S) \quad \xi, \eta \in \ell^{\vee}(S)$$

که در آن ۱ همانی S است. در واقع

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\rho}_r(\varphi)\xi, \eta \rangle &= \sum_{y \in S} (\tilde{\rho}_r(\varphi)\xi)(y) \tilde{\eta}(y) = \sum_y \sum_z \varphi(z) (\rho_r(z)\xi)(y) (\tilde{\eta}(y)) \\ &= \sum_z \varphi(z) \langle \rho_r(z)\xi, \eta \rangle = \sum_z \varphi(z) (\tilde{\eta} \bullet \xi)(z) \\ &= \sum_z \varphi(z) (\tilde{\eta} \bullet \xi)(z^*) = \varphi \bullet (\tilde{\eta} \bullet \xi)(1) = \varphi \bullet (\tilde{\eta} \bullet \tilde{\xi})(1).\end{aligned}$$

بنابراین لحاظ کردن $\ell^1(S)$ با ضرب $\bullet$ به جای ضرب پیچشی $(*)$ به دلیل ارتباطی که با نمایش منظم برقرار می کند، راهی جدید برای معرفی جبر فوریه نیم گروهی می گشاید، که در ادامه می آید.

۱.۶ جبر نیم گروهی تحدید شده

در این بخش نشان می دهیم $(\ell^1(S), \bullet, \sim)$ یک $*$ -جبر باناخ دارای واحد تقریبی کراندار است.

گزاره ۱.۶. ضرب $\bullet$ تعریف شده در بالا، شرکت پذیر است.

برهان. فرض کنیم ξ, η و θ در $\ell^1(S)$ و x به S متعلق باشد. در این صورت

$$(\xi \bullet \eta) \bullet \theta(x) = \sum_{x^*x=yy^*} (\xi \bullet \eta)(xy) \theta(y^*).$$

اگر قرار دهیم $z = xy$ در این صورت $x^*z = x^*xy = y$ و $xx^* = zz^*$ ، آنگاه با قراردادن $y = x^*z$ داریم $xy = xx^*z$ و $yy^* = x^*z$. بنابراین جمع بالا با عبارت پایین برابر است

$$\sum_{xx^*=zz^*} (\xi \bullet \eta)(z) \theta(z^*x) = \sum_{xx^*=zz^*} \sum_{z^*z=\nu\nu^*} \xi(z\nu) \eta(\nu^*) \theta(z^*x)$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned}\xi \bullet (\eta \bullet \theta)(x) &= \sum_{x^*x=yy^*} \xi(xy) (\eta \bullet \theta)(y^*) \\ &= \sum_{x^*x=yy^*} \sum_{yy^*=uu^*} \xi(xy) \eta(y^*u) \theta(u^*)\end{aligned}$$

برای $x \in S$ فرض کنید z, ν در شرط $zx^* = zz^*$ و $xx^* = \nu\nu^*$ صادق باشد. در این صورت با قراردادن $u = x^*z$ و $y = x^*\nu$ داریم $uu^* = x^*zz^*x = x^*x$ و

$$yy^* = x^*\nu\nu^*z^*x = x^*zz^*zz^*x = x^*zz^*x = x^*x = uu^*.$$

برعکس اگر u و y در شرط $uu^* = yy^*$ و $x^*x = uu^*$ صادق باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $\nu = u^*y$ و $z = xu$ داریم $\nu\nu^* = u^*yy^*u = u^*u$ و $zz^* = xuu^*x^* = xx^*$ و بنابراین دو جمع مکرر که $(\xi \bullet \eta) \bullet \theta(x)$ و $\xi \bullet (\eta \bullet \theta)(x)$ را بیان می‌کنند، با هم برابر هستند. $\square$

قضیه ۲.۶. $(\ell^1(S), \bullet, \sim)$ تحت نرم طبیعی یک $*$ -جبر باناخ است.

برهان. کافی است بررسی کنیم برای هر $f, g \in \ell^1(S)$ $\|f \bullet g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ و $(f \bullet g)^\sim = \tilde{g} \bullet \tilde{f}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in S$ داریم

$$\begin{aligned} (f \bullet g)^\sim(x) &= \sum_{xx^*=yy^*} \bar{f}(x^*y) \bar{g}(y^*) = \sum_{xx^*=yy^*} \tilde{f}(y^*x) \tilde{g}(y) \\ &= \sum_{x^*x=zz^*} \tilde{f}(z^*) \tilde{g}(xz) = \tilde{g} \bullet \tilde{f}(x). \end{aligned}$$

حال برای $s, x \in S$ قرار می‌دهیم

$$J_{s,x} = \{t \in S : st = x, t^*t = x^*x, s = stt^*\},$$

برای هر $s, x, y \in S$ ، با شرط $x \neq y$ داریم $J_{s,x} \cap J_{s,y} = \emptyset$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \|f \bullet g\|_1 &= \sum_x \left| \sum_s \sum_{t \in J_{s,x}} f(s)g(t) \right| \leq \sum_x \sum_s \sum_{t \in J_{s,x}} |f(s)| |g(t)| \\ &= \sum_s |f(s)| \sum_x \sum_{t \in J_{s,x}} |g(t)| \leq \sum_s |f(s)| \sum_t |g(t)| \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

$\square$

در این مرحله $*$ - جبر باناخ معرفی شده در بالا را با $\ell^r(S)$ نمایش می دهیم و آن را جبر نیم گروهی تحدید شده می نامیم. هر $\pi \in \Sigma_r(S)$ به یک $*$ - نمایش $\tilde{\pi}$ روی $\ell^r(S)$ با رابطه زیر ترفیع می یابد

$$\tilde{\pi} = \sum_{x \in S} f(x) \pi(x) \quad (f \in \ell^r_1(S))$$

در ادامه نشان می دهیم $\tilde{\pi}$ یک $*$ - نمایش روی $\ell^r_1(S)$ است. فرض کنید $f, g \in \ell^r_1(S)$ و توجه کنید که $\tilde{\pi}(f \bullet g) = \sum_{x \in S} (f \bullet g)(x) \pi(x) = \sum_{x \in S} \sum_{xx^* = yy^*} f(xy) g(y^*) \pi(x)$ همچنین

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(f) \tilde{\pi}(g) &= \sum_{x \in S} \tilde{\pi}(f) g(s) \pi(s) = \sum_{s \in S} \sum_{t \in S} f(t) g(s) \pi(t) \pi(s) \\ &= \sum_{s \in S^*} \sum_{t^* t = ss^*} f(t) g(s) \pi(ts) \end{aligned}$$

که مجموع آخر با تبدیل $x = ts$ و $y = s^*$ و $t = xy$ و $s = y^*$ با جمع قبلی برابر می شود.

لم ۳.۶. برای $y \in S$ و $e \in E$,

$$\delta_y \bullet \delta_e = \begin{cases} \delta_y & \text{اگر } y^* y = e \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$\delta_e \bullet \delta_y = \begin{cases} \delta_y & \text{اگر } yy^* = e \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

برهان. داریم

$$\delta_y \bullet \delta_e(z) = \sum_{z^* z = tt^*} \delta_y(z t) \delta_e(t^*) = \circ$$

مگر این که $t = e$ و $z t = y$ و $z^* z = t t^*$. اگر روابط قبل برقرار باشند، آنگاه $z^* z = t t^* = t$ بنابرین $z = y$ و $y = z t = z z^* z = z$ بنابرین $(\delta_y \bullet \delta_e)(z) = \circ$ مگر این که $z = y$. حال

$$(\delta_y \bullet \delta_e)(y) = \sum_{y^* y = tt^*} \delta_y(y t) \delta_e(t^*) = \circ$$

مگر این‌که $t = e$ و $yt = y$ و $yt = y$ و $tt^* = y^*y$. این روابط نتیجه می‌دهند $tt^* = y^*y = e$ و برعکس اگر $y^*y = e$ ، آنگاه

$$\delta_y \bullet \delta_e(y) = \sum_{y^*y=tt^*} \delta_y(yt) \delta_e(t^*) = \delta_y(ye) = 1.$$

قسمت دیگر به شکل مشابه ثابت می‌شود. $\square$

برای هر زیرمجموعه متناهی $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ از S قرار می‌دهیم

$$i(F) = \{e \in E : e = xx^* \text{ یا } x^*, x \in F\}$$

که به وضوح زیرمجموعه‌ای متناهی از E است. تعریف کنید $e_F = \sum_{e \in i(F)} \delta_e$.

لم ۴.۶. برای زیرمجموعه‌های متناهی F و G از S و e_F و e_G تعریف شده مانند بالا داریم:

$$\text{الف) برای هر } s \in F \text{، } \delta_s = \delta_s \bullet e_F = e_F \bullet \delta_s.$$

$$\text{ب) } e_F \bullet e_G = e_G \bullet e_F = \sum_{e \in i(F) \cap i(G)} \delta_e \text{ اگر } G \subseteq F, \text{ آنگاه } e_F \bullet e_G = e_G \bullet e_F = e_G$$

$$\text{ج) برای } f = \sum_{i=1}^{\infty} f(s_i) \delta_{s_i} \in \ell_r^1(S), \text{ داریم } f \bullet e_F = \sum_{s_i s_i^* \in i(F)} f(s_i) \delta_{s_i} \text{ و } e_F \bullet f = \sum_{s_i s_i^* \in i(F)} f(s_i) \delta_{s_i}$$

$$\text{د) اگر } f \in \ell_r^1(S) \text{ و } \text{supp}(f) \subseteq F \text{، آنگاه } f \bullet e_F = e_F \bullet f = f.$$

$$\text{ه) } \|e_F\|_1 = |i(F)|.$$

برهان. به مرجع [۵] مراجعه کنید. $\square$

گزاره ۵.۶. جبر باناخ $\ell_r^1(S)$ یک واحد تقریبی (نه لزوماً کراندار) دو طرفه شامل توابع مثبت، متقارن و با محمل متناهی دارد. اگر E (مجموعه عناصر خودتوان S) متناهی باشد، آنگاه واحد تقریبی کراندار با کران بالای $|E|$ ، موجود است.

برهان. برای هر زیرمجموعه متناهی $F \subseteq S$ ، تابع e_F را مانند بالا در نظر می گیریم. واضح است که e_F ، مثبت، متقارن با محمل متناهی است. برای $f \in \ell_r^1(S)$ داده شده داریم $\sum_{s \in S} |f(s)| < \infty$ ، بنابراین حداکثر تعداد شمارا $s \in S$ ، مانند $s_1, s_2, \dots$ موجود است که $f(s) \neq 0$ برای $\varepsilon > 0$ داده شده $N \geq 1$ چنان موجود است که $\sum_{i=N+1}^{\infty} |f(s_i)| < \varepsilon$. قرار می دهیم $F_0 = \{s_1, \dots, s_N\}$ و فرض می کنیم $F_0 \subseteq F$ ، در این صورت با کمک لم قبل داریم

$$\|f - f \bullet e_F\|_1 = \sum_{s_i^* s_i \notin i(F)} |f(s_i)| \leq \sum_{s_i^* s_i \notin i(F_0)} |f(s_i)| \leq \sum_{i \geq N+1} |f(s_i)| < \varepsilon.$$

و به طور مشابه $\|f - e_F \bullet f\| < \varepsilon$ و حکم ثابت می شود. $\square$

قضیه ۶.۶. نگاشت تحدید $\ell^1(S_r) \rightarrow \ell_r^1(S)$ یک همریختی پوشا و انقباضی بین جبرهای باناخ است که دارای هسته $\mathbb{C}\delta_0$ است. جبر باناخ خارج قسمت $\frac{\ell^1(S_r)}{\mathbb{C}\delta_0}$ به طور طولپا با $\ell_r^1(S)$ یکرخت است.

برهان. به خاطر بیاورید که S_r یک نیم گروه با ضرب تحدید شده است. فرض کنیم ضرب پیچشی روی $\ell^1(S_r)$ را با $\tilde{*}$ نمایش دهیم. در این صورت

$$\delta_x \tilde{*} \delta_y = \delta_{x \bullet y} = \delta_x \bullet \delta_y \quad (x, y \in S_r),$$

که در آن تساوی دوم در حالتی که x یا y صفر هستند، بدیهی است. این رابطه نشان می دهد که τ یک همریختی است. نشان می دهیم برای $f \in \ell^1(S_r)$ ، $\|\tau(f)\|_1 = \|f + \mathbb{C}\delta_0\|$. کمیت سمت راست، اینفیمم مقادیر $\|f + c\delta_0\|$ است که به وضوح در $c = -f(0)$ به دست می آید، زیرا

$$\|f + c\delta_0\|_1 = \left\| \sum_s f(s)\delta_s + (c + f(0))\delta_0 \right\|_1 = \sum |f(s)| + |c + f(0)|.$$

$\square$

۲.۶ C^* -جبرهای نیم گروهی تحدید شده

می دانیم اگر S یک نیم گروه وارون (نه لزوماً یکدان) باشد، نمایش منظم چپ λ به یک نمایش وفادار $\tilde{\lambda}$ از $\ell^1(S)$ ترفیع می یابد. در واقع تساوی $\|f\|_{\lambda} = \|\tilde{\lambda}(f)\|$ روی اعضای $\ell^1(S)$ یک

C^* -نرم روی آن تعریف می‌کند. کامل‌سازی $\ell^1(S)$ در این نرم، C^* -جبر تحدید شده از S نامیده می‌شود و با $C_\lambda^*(S)$ نمایش داده می‌شود. حال فرض کنید $\sum = \sum(S)$ ، برای هر $f \in \ell^1(S)$ تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\Sigma = \sup \{ \|\tilde{\pi}(f)\| : \pi \in \sum \}$$

که در آن

$$\tilde{\pi}(f) = \sum_{x \in S} f(x) \pi(x) \quad (f \in \ell^1(S)).$$

در این حالت برای هر نمایش تحویل‌ناپذیر $B(H_\theta) : C_\lambda^*(S) \rightarrow$ ، $\tilde{\lambda} \bullet \theta = \tilde{\pi}$ یک نمایش تحویل‌ناپذیر از $\ell^1(S)$ است و بنابراین $\|f\|_\Sigma \leq \|f\|_\lambda$ ($f \in \ell^1(S_r)$). به‌طور خاص، $\|\cdot\|_\Sigma$ یک C^* -نرم است. این نرم بزرگ‌ترین C^* -نرم روی $\ell^1(S)$ است و C^* -جبر متناظر آن که با $C^*(S)$ نمایش داده می‌شود، C^* -جبر $\tilde{\lambda} : C^*(S) \rightarrow C_\lambda^*(S)$ پوشای $\tilde{\lambda}$ به شکل یکتا به نگاشت پوشای $\tilde{\lambda} : C^*(S) \rightarrow C_\lambda^*(S)$ گسترش می‌یابد.

لم ۷.۶. $\tilde{\lambda}_r$ یک به یک است.

برهان. برای هر $f \in \ell_r^1(S)$ با شرط $\tilde{\lambda}_r(f) = 0$ و $u \in S$ قرار می‌دهیم $t = uu^*$ و $\xi = \delta_{u^*}$ در $\ell^2(S)$ در این صورت

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_r(f) \xi(H) &= \sum_{s \in S} f(s) (\lambda_r(s) \delta_{u^*})(uu^*) \\ &= \sum_{ss^* = uu^*} f(s) \delta_{u^*}(s^*uu^*) \\ &= \sum_{ss^* = uu^*, s^*uu^* = u^*} f(s) = f(u) \end{aligned}$$

□

بنابراین $f = 0$.

نتیجه ۸.۶. جبر باناخ $\ell_r^1(S)$ نیم‌ساده است.

لم فوق نشان می‌دهد که $\|\tilde{\lambda}_r(f)\| := \|f\|_{\lambda_r}$ یک C^* -نرم روی $\ell_r^1(S)$ تعریف می‌کند. کامل‌سازی $\ell_r^1(S)$ با این نرم، C^* -جبر تقلیل‌یافته تحدید شده از S نامیده می‌شود. حال قرار

دهید

$$\|f\|_{\Sigma_r} = \sup \left\{ \|\tilde{\pi}(f)\| \mid \pi \in \sum_r \right\} \quad f \in \ell_r^1(S)$$

در این صورت به وضوح $\|f\|_{\lambda_r} \leq \|f\|_{\Sigma_r}$ ، و بنابراین $\|\cdot\|_{\Sigma_r}$ نیز یک C^* -نرم است. کامل سازی $\ell_r(S)$ ، این نرم را C^* -جبر پرتحدید شده^۱ از S می نامیم و با $C_r^*(S)$ نمایش می دهیم.

مشابه حالت کلاسیک، $\tilde{\lambda}_r$ به طور یکتا $*$ -همریختی پوشا $C_{\lambda_r}^*(S) \rightarrow C_r^*(S)$ ترغیع می یابد.

در ادامه ارتباط C^* -جبر تقلیل یافته و پرتحدید شده از S را با C^* -جبرهای متناظر آنها از S_r مطالعه می کنیم.

لم ۹.۶. فرض کنید $(A, \|\cdot\|_A)$ یک جبر باناخ و $\|\cdot\|$ یک C^* -نرم روی آن باشد که در شرط $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_A$ صدق می کند. همچنین $C^*(A)$ کامل سازی A با این نرم باشد. اگر J یک ایده آل دو طرفه A باشد که در $(C^*(A), \|\cdot\|)$ بسته است، آنگاه نرم خارج قسمتی $C^*(A)/J$ یک C^* -نرم روی A/J القاء می کند و کامل سازی $C^*(A/J)$ از A/J در این نرم با $C^*(A)/J$ به صورت طولیایکریخت است.

برهان. به وضوح J در $(A, \|\cdot\|_A)$ نیز بسته است. بنابراین A/J یک جبر باناخ تحت نرم خارج قسمتی القاء شده از $\|\cdot\|_A$ است که به وضوح در $C^*(A)/J$ در C^* -نرم خارج قسمتی آن چگال است. $\square$

لم فوق را بر $A = \ell^1(S_r)$ و $J = \mathbb{C}\delta_0$ اعمال می کنیم و C^* -نرم های $\|\cdot\|_{\Sigma_r}$ و $\|\cdot\|_{\Lambda}$ را در نظر می گیریم. برای هر $c \in \mathbb{C}$ داریم

$$\|c\delta_0\|_{\Sigma_r} = \sup_{\pi \in \Sigma_r} \|\tilde{\pi}(c\delta_0)\| = |c|,$$

و

$$\|c\delta_0\|_{\Lambda} = \|\tilde{\Lambda}(c\delta_0)\| = \|c\Lambda(\cdot)\| = |c|.$$

قضیه ۱۰.۶. یکریختی های طولیای $C_{\lambda_r}^*(S) \cong C_{\Lambda}^*(S_r)/\mathbb{C}\delta_0$ و $C_r^*(S) \cong C^*(S_r)/\mathbb{C}\delta_0$ موجودند.

۳.۶ توابع مثبت معین تحدید شده

تابع مختلط کراندار $\mathbb{C} : S \rightarrow u$ تابع مثبت معین نامیده می‌شود، هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n و تمام انتخاب‌های ممکن $c_1, \dots, c_n$ از $\mathbb{C}$ و $x_1, \dots, x_n$ از S ، داشته باشیم $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i c_j u(x_i^* x_j) \geq 0$. و مثبت معین تحدید شده خوانده می‌شود هرگاه برای هر عدد طبیعی n و تمام انتخاب‌های ممکن $c_1, \dots, c_n$ از $\mathbb{C}$ و $x_1, \dots, x_n$ از S ، داشته باشیم $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i c_j (\lambda_r(x_i) u)(x_j) \geq 0$. مجموعه همه توابع مثبت معین و مثبت معین تحدید شده را به ترتیب با $P(S)$ و $P_r(S)$ نمایش می‌دهیم. این دو مبحث روی گروه‌ها (ی گسسته) منطبق هستند. قرار می‌دهیم

$$P_*(S) = \{u \in P(S) : u(\circ) = 0\}.$$

لم ۱۱.۶. تابع تحدید $\tau : P_*(S_r) \rightarrow P_r(S)$ یک یکرختی آفین از مخروط‌های محدب است.

برهان. فرض کنید $u \in P(S_r)$. برای هر $n \geq 1$ و $x_1, \dots, x_n$ از S_r و $c_1, \dots, c_n$ از $\mathbb{C}$ داریم

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i c_j u(x_i^* \bullet x_j) = \sum_{x_i x_i^* = x_j x_j^*} \bar{c}_i c_j u(x_i^* x_j) + u(\circ) \sum_{x_i x_i^* \neq x_j x_j^*} (\bar{c}_i c_j)$$

مخصوصاً اگر $u \in P_*(S_r)$ ، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i c_j u(x_i^* \bullet x_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i c_j (\lambda_r(x_i) u)(x_j)$$

و بنابراین τ ، $u \in P_*(S_r)$ را به توی $P_r(S)$ می‌نگارد. به توضیح یک به یک و آفین است. همچنین اگر $u \in P_r(S)$ و v توسیع آن با قراردادن صفر برای u روی S_r باشد، آنگاه بنابر محاسبات بالا برای v داریم $\tau(u) = v$ و $v \in P_*(S_r)$ $\square$ بنابراین τ ، پوشا نیز هست.

باید دقت کرد که نگاشت فوق در حالتی که S از قبل دارای عنصر صفر باشد، ممکن است پوشا نباشد.

تعریف و نمادگذاری ۱۲.۶. مجموعه همه توابع $u \in P_r(S)$ که $u = \tilde{u}$ و برای آن ثابت $c > 0$ چنان موجود است که برای هر $n \geq 1$ و $x_1, \dots, x_n$ از S و $c_1, \dots, c_n$ از $\mathbb{C}$ داریم

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i u(x_i) \right|^2 \leq c \sum_{x_i x_i^* = x_j x_j^*} \bar{c}_i c_j u(x_i^* x_j)$$

را مجموعه توابع مثبت معین توسیع یافتنی تحدید شده می‌نامیم و با $P_{r,e}(S)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۳.۶. یکریختی آفین τ از مخروط محدب $P_{r,e}(S)$ به روی

$$\ell_r^1(S)_+^* \cong (\mathbb{C}\delta_\circ)_+^\perp = \{f \in \ell^\infty(S_r)_+ \mid f(\circ) = 0\} =: \ell_\circ^\infty(S_r)_+$$

وجود دارد.

برهان. یکریختی آفین $\ell_r^1(S)_+^* \cong \ell_\circ^\infty(S_r)_+$ حاصل از تحدید یکریختی فضاهای برداری متناظر دو مخروط مثبت است. آن را با τ_2 نمایش می‌دهیم. یکریختی آفین بین $P_e(S_r)$ و $P_{r,e}(S)$ را با τ_1 نمادگذاری می‌کنیم. همچنین تحدید یکریختی آفین طبیعی بین $P_e(S_r)$ به روی $\ell^\infty(S_r)_+$ به $P_{\circ,e}(S_r)$ به توی $\ell_\circ^\infty(S_r)_+$ را τ_1 می‌نامیم. حال دیاگرام زیر را داریم

$$\begin{array}{ccc} P_{\circ,e}(S_r) & \xrightarrow{\tau_1} & \ell_\circ^\infty(S_r)_+ \\ \downarrow \tau_2 & & \downarrow \tau_3 \\ P_{r,e}(S) & \xrightarrow{\tau} & \ell_r^1(S)_+^* \end{array}$$

دیاگرام فوق جابه‌جایی است و τ نگاشت موردنظر است. $\square$

برای زیرمجموعه‌های F و G از S قرار می‌دهیم

$$F \bullet G = \{st : s \in F, t \in G, s^*s = tt^*\}.$$

این مجموعه زمانی که F و G متناهی است، یک مجموعه متناهی است.

لم ۱۴.۶. اگر S یک نیم‌گروه وارون باشد و $f, g \in \ell^2(S)$ ، آنگاه

$$\text{supp}(f \bullet \tilde{g}) = (\text{supp} f) \bullet (\text{supp} g)^*.$$

به‌خصوص زمانی که f و g دارای تکیه‌گاه متناهی باشند، آنگاه $f \bullet \tilde{g}$ نیز چنین است.

برهان. می‌دانیم $\circ \neq \sum_{x^*x=yy^*} f(xy)\overline{g(y)}$ اگر و تنها اگر برای یک $y \in \text{supp}(g)$ و $x^*x = yy^*$ در تکیه‌گاه f باشد. این دقیقاً زمانی رخ می‌دهد که برای $s \in \text{supp}(f)$ و $t \in \text{supp}(g)$ و $s^*s = tt^*$ ، $x = st^*$ ، بنابراین $\text{supp}(f \bullet \tilde{g}) = \text{supp}(f) \bullet (\text{supp}(g))^*$ برابر است. $\square$

لم ۱۵.۶. (اتحاد قطبی). برای $f, g \in \ell^1(S)$

$$f \bullet \tilde{g} = (f + g) \bullet (f + g)^{\sim} - (f - g) \bullet (f - g)^{\sim} + i(f + ig) \bullet (f + ig)^{\sim} - i(f - ig) \bullet (f - ig)^{\sim},$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$.

لم ۱۶.۶. برای هر $\varphi \in P_{\circ, f}(S)$ (مثبت معین تحدید شده با محمل متناهی) داریم $\tilde{\rho}_r(\varphi) \geq \circ$.

برهان. برای هر $x, y \in S$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\rho}_r(\varphi)\delta_x, \delta_y \rangle &= \sum_t \tilde{\rho}_r(\varphi)\delta_x(t)\overline{\delta_y(t)} = \tilde{\rho}_r(\varphi)\delta_x(y) \\ &= \sum_t \varphi(t)\rho_r(t)\delta_x(y) = \sum_{tt^*=y^*y} \varphi(t)\delta_x y(t). \end{aligned}$$

حال اگر $xx^* = yy^*$ آنگاه برای $t = y^*x$ داریم $tt^* = y^*xx^*y = yy^*$ و برعکس $tt^* = y^*y$ و $x = yt$ نتیجه می‌دهد که $x = yt$ و بنابراین $x = yy^*x$ و $t = tt^*t = y^*yt = y^*x$ و $xy^* = xx^*yy^* = yy^*xx^* = xx^*$ یعنی $y = xt^* = xx^*y$ و بنابراین زمانی که $xx^* = yy^*$ ، تساوی آخر با $\varphi(y^*x)$ برابر است و در غیراین صورت صفر است. در نتیجه $\langle \tilde{\rho}_r(\varphi)\delta_x, \delta_y \rangle = \langle \lambda_r(g)\varphi \rangle(x)$ حال اگر $\xi = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$ به $\ell_f^1(S)$ (توابع با محمل متناهی) متعلق باشد، داریم

$$\langle \tilde{\rho}_r(\varphi)\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j \langle \tilde{\rho}_r(\varphi)\delta_{x_i}, \delta_{x_j} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j (\lambda_r(x_j)\varphi)(x_i) \geq \circ.$$

$\square$

لم ۱۷.۶. با نمادهای بالا برای هر $f, g \in \ell^1(S)$

برهان. برای هر $f, g \in \ell^1(S)$ قرار می دهیم $\eta = \tilde{\rho}_r(g)\xi$ و $\zeta = \tilde{\lambda}_r(f)\xi$ ، در این صورت $\eta, \zeta \in \ell^2(S)$ و برای هر $x \in S$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_r(f)\tilde{\rho}_r(g)\xi(x) &= \sum_{y \in S} f(y)(\lambda_r(y)\eta)(x) = \sum_{yy^*=xx^*} f(y)\eta(y^*x) \\ &= \sum_{yy^*=xx^*} f(y) \sum_{u \in S} g(u)(\rho_r(u)\xi)(y^*x) \\ &= \sum_{yy^*=xx^*} f(y) \sum_{uu^*=x^*uu^*x} g(u)\xi(y^*xu) \\ &= \sum_{yy^*=xx^*} f(y) \sum_{uu^*=x^*x} g(u)\xi(y^*xu),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_r(g)\tilde{\lambda}_r(f)\xi(x) &= \sum_{u \in S} g(u)(\rho_r(u)\zeta)(x) = \sum_{uu^*=x^*x} g(u)\xi(xu) \\ &= \sum_{uu^*=x^*x} g(u) \sum_{yy^*=xx^*} f(y)\xi(y^*xu).\end{aligned}$$

و بنابراین حکم ثابت می شود. $\square$

لم ۱۸.۶. برای هر $\pi \in \sum_r(S)$ و $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ ، تابع ضریب $u = \langle \pi(\cdot)\xi, \xi \rangle$ در $P_{r,e}(S)$ است.

برهان. برای هر $n \geq 1$ ، $c_1, \dots, c_n$ در $\mathbb{C}$ و $x_1, \dots, x_n$ در S و نمایش تحدید شده π روی S داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i c_j (\lambda_r(x_i)(u)(x_j)) &= \sum_{x_i x_i^* = x_j x_j^*} \bar{c}_i c_j u(x_i^* x_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \bar{c}_i c_j \langle \pi(x_j)\xi, \pi(x_i)\xi \rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n c_i \pi(x_i)\xi \right\|_\pi^2 \geq 0.\end{aligned}$$

و با توجه به این‌که داریم $\pi \in \sum_{\circ}(S_r)$ و $u(\circ) = \circ$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n c_k u(x_k) \right|^2 &= \left| \sum c_k \langle \pi(x_k) \xi, \xi \rangle \right|^2 \\ &\leq \|\xi\|^2 \sum_{i,j=1}^n \bar{c}_i c_j (u)(x_i^* \bullet x_j) \end{aligned}$$

و بنابراین $u \in P_{\circ,e}(S_r) = P_{r,e}(S)$ □

قضیه زیر راه ورود به تعریف جبرهای از نوع فوریه روی نیم‌گروه وارون را باز می‌کند. از نوشتن برهان صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه ۱۹.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون یک‌دار باشد و $\varphi \in \ell^\infty(S)$ ، احکام زیر معادل هستند

(الف) $\varphi \in P_{r,e}(S)$ ؛

(ب) $\xi \in \ell^n(S)$ چنان موجود است که $\tilde{\xi} \bullet \xi = \varphi$.

علاوه‌براین، اگر ξ با تکیه‌گاه متناهی باشد، دراین صورت φ نیز چنین است.

۴.۶ جبر فوریه تحدید شده روی نیم‌گروه وارون

در این فصل توصیف ایمارد از جبرهای فوریه و فوریه اشتیل‌یس روی گروه‌های توپولوژیکی موضعاً فشرده به نیم‌گروه‌ها را گسترش می‌دهیم. تاریخچه نسبتاً مفصلی در این موضوع وجود دارد. ریاضی‌دانان صورت‌هایی از این جبرها برای * - نیم‌گروه‌های گسسته جابه‌جایی یک‌دار ساخته‌اند. اما در حالت کلی به نظر می‌رسد ساختن این جبرها پیچیدگی زیادی داشته باشد. در این فصل از کتاب که بخشی از آن براساس یافته‌های امینی و مدقالچی در [۵] نوشته شده است، از صورت تحدید شده جبرها که در قسمت‌های قبل مقدمات آن آورده شد، استفاده می‌کنیم.

جبر فوریه اشتیل‌یس تحدید‌شده روی یک نیم‌گروه وارون را با فضای خطی تولید شده از $P_{r,e}(S)$ تعریف می‌کنیم و با $B_{r,e}(S)$ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌شود این مجموعه با ضرب نقطه‌ای و نرم مناسبی که در زیر معرفی می‌شود، یک جبر باناخ است و با فضای توابع ضریب از نمایش‌های تحدید شده برابر است [۵]. همچنین بستار فضای خطی تولید شده توسط $P_{r,e,f}(S)$ (توابع

مثبت معین تحدید شده با تکیه گاه فشرده) را جبر فوریه تحدید شده از S می نامیم و با $A_{r,e}(S)$ نمایش می دهیم. نرم زیر را برای $u \in B_{r,e}(S)$ تعریف می کنیم

$$\|u\|_r = \sup \left\{ \sum_{x \in S} f(x)u(x) \mid f \in \ell_r^1(S), \|f\|_{\sum_r(S)} \leq 1 \right\}.$$

قضیه ۲۰.۶. فضای توابع ضریب از اعضای $\sum_r(S)$ است.

برهان. فرض کنید $u \in P_{r,e}(S)$ و u توسیع طبیعی u به S_r باشد. در این صورت $v \in P_{r,e}(S_r)$ بنابراین نمایش دوری $\pi \in \sum(S_r)$ با بردار دوری $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ چنان موجود است که
اما $v = \langle \pi(\cdot)\xi, \xi \rangle$

$$\circ = v(\circ) = \langle \pi(\circ)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(\circ^*)\xi, \xi \rangle = \|\pi(\circ)\xi\|$$

بنابراین $\pi(\circ)\xi = \circ$. بنابر دوری بودن ξ داریم $\pi(\circ) = \circ$. بنابراین $\pi \in \sum_\circ(S_r)$.
□ $\sum_r(S)$

نتیجه ۲۱.۶. یکریختی طولی $(C_r^*(S))^* \cong B_{r,e}(S)$ وجود دارد.

برهان. داریم $B_{\circ,e}(S_r) \cong (C^*(S_r)/\mathbb{C}\delta_\circ)^* \cong B_{r,e}(S)$ و همچنین $C_r^*(S) \cong B_{\circ,e}(S_r)$ و $C^*(S_r)/\mathbb{C}\delta_\circ$.
□

در حالت نیم گروهی، نتایج مشابه با آنچه در مورد گروه های توپولوژیکی وجود دارد، به دست آمده است که خواننده علاقه مند به این حوزه را به [۵] ارجاع می دهیم.

قضیه ۲۲.۶. برای $f, g \in \ell^2(S)$ داریم $f \bullet \tilde{g} \in B_{r,e}(S)$ و $\|f \bullet \tilde{g}\|_r \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

برهان. با توجه به این که برای هر $h \in \ell^2(S)$ یک تابع مثبت معین تحدید شده است و با کمک اتحاد قطبی عضویت $f \bullet \tilde{g}$ در $B_{r,e}(S)$ واضح است. همچنین داریم

$$\begin{aligned} \|u\|_r &= \sup \left\{ \left| \sum_{y \in S} u(y)\varphi(y) \right| : \varphi \in \ell_r^1(S), \|\varphi\|_{\sum_r} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{y \in S} \langle \lambda_r(y^*)f, g \rangle \varphi(y) \right| : \varphi \in \ell_r^1(S), \|\varphi\|_{\sum_r} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \langle f, \tilde{\lambda}_r(\varphi)g \rangle \right| : \varphi \in \ell_r^1(S), \|\varphi\|_{\sum_r} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|f\|_2 \|g\|_2. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲۳.۶. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$E_1 = \langle f \bullet \tilde{g} : f, g \in \ell_f^\vee(S) \rangle$$

$$E_2 = \langle h \bullet \tilde{h} : h \in \ell_f^\vee(S) \rangle$$

$$E_3 = \langle P_{r,e,f}(S) \rangle$$

$$E_4 = \langle P(S) \cap \ell^\vee(S) \rangle$$

$$E_5 = \langle h \bullet \tilde{h} : h \in \ell^\vee(S) \rangle$$

$$E_6 = \langle f \bullet \tilde{g} : f, g \in \ell^\vee(S) \rangle$$

در این صورت $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq E_4 \subseteq E_5 \subseteq E_6 \subseteq B_{r,e}(S)$ و بستارهای این مجموعه‌ها در $A_{r,e}(S)$ ، $B_{r,e}(S)$ برابر است.

لم ۲۴.۶. $B_{r,e}(S)$ نقاط را جدا می‌کند.

گزاره ۲۵.۶. $A_{r,e}(S)$ نقاط را جدا می‌کند.

برهان. فرض کنید $x \in S$ و $u = \delta_{x^*x} \bullet \tilde{\delta}_{x^*}$ متعلق به $A_{r,e}(S)$ باشد، در این صورت $u(x) = 1$ و برای هر $y \neq x$ اگر $u(y) \neq 1$ آنگاه حکم ثابت شده است. اگر $u(y) = 1$ ، v متعلق به $B_{r,e}(S)$ چنان موجود است که $v(y) \neq 1$. بنابراین $u(x) = u(y) = 1$ و $uv(x) = v(x) \neq v(y) = uv(y)$ اما $uv \in A_{r,e}(S)$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

گزاره ۲۶.۶. برای هر زیرمجموعه متناهی K از S ، $u \in P_{r,e,f}(S)$ موجود است به طوری که $u|_K \equiv 1$.

برهان. برای $F \subseteq S$ قرار می‌دهیم $F_e = \{x^*x \mid x \in F\}$ ، در این صورت $F \subseteq F \bullet F_e$ (زیرا $x = x(x^*x)$). حال برای مجموعه دلخواه فشرده $K \subseteq S$ ، قرار می‌دهیم $F = K \cup K^* \cup K_e$ و چون $K_e = K_e^*$ داریم $K_e = F = F^*$ و چون $K_e = (K^*)_e$ و $F = F \bullet F_e$ داریم $(K_e)_e = K_e$. بنابراین $K \subseteq F \subseteq F \bullet F$. مجموعه $F \bullet F$ متناهی است و اگر قرار می‌دهیم $f = \chi_F$ در این صورت

$$u = f \bullet \tilde{f} = \chi_F \bullet \tilde{\chi}_F = \chi_{F \bullet F^*} = \chi_{F \bullet F} \in P_{r,e,f}(S)$$

و $u|_K \equiv 1$. $\square$

نتیجه ۲۷.۶. $B_{r,f}(S) = \langle P_{r,e,f}(S) \rangle$ و $\overline{B_{r,f}(S)} = A_{r,e}(S)$.

۵.۶ p -صورت جبر فوریه اشتیل‌یس نیم گروهی، $B_{p,r}(S)$

با توجه به روح اصلی حاکم بر این کتاب که تعمیم جبر فوریه به p -صورت آن است، در این بخش به معرفی p -صورت جبر فوریه اشتیل‌یس نیم گروهی تحدید شده می‌پردازیم که تعمیم جبر فوریه اشتیل‌یس نیم گروهی تحدید شده به p -صورت آن و همچنین تعمیم p -صورت جبر فوریه اشتیل‌یس از حالت گروه به نیم گروه است. مرجع این قسمت [۵۹] است.

شایان ذکر است در مرجع [۴۷] نتایج جالب توجهی در مورد p -صورت جبر فوریه نیم گروهی توسط مدقالبچی و حسن پور اقابابا داده شده است.

نمادگذاری. برای نیم گروه وارون S و $p \in (1, \infty)$ ، مجموعه همه (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های تحدید شده S روی یک QSL_p -فضا را با $\sum_{p,r}(S)$ نمایش می‌دهیم.

برای اطلاعات بیشتر خواننده را به بخش (۸.۳) ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۲۸.۶. فرض کنید (π, E) و (ρ, F) به $\sum_{p,r}(S)$ متعلق باشند، در این صورت $(\pi \otimes \rho, E \otimes_p F)$ به $\sum_{p,r}(S)$ تعلق دارد.

برهان. بنابر تعریف داریم

$$(\pi \otimes \rho)(x)(\xi \otimes \eta) = \pi(x)\xi \otimes \rho(x)\eta, \quad x \in S, \xi \in E, \eta \in F$$

برای $x, u \in S$ که $x^*x = yy^*$ داریم

$$\begin{aligned} \pi \otimes \rho(xy)(\xi \otimes \eta) &= \pi(xy)\xi \otimes \rho(xy)\eta = \pi(x)\pi(y)\xi \otimes \rho(x)\rho(y)\eta \\ &= \pi(x)(\pi(y)\xi) \otimes \rho(x)(\rho(y)\eta) \\ &= (\pi \otimes \rho)(x)(\pi(y)\xi \otimes \rho(y)\eta) \\ &= (\pi \otimes \rho)(x)(\pi \otimes \rho)(y). \end{aligned}$$

در حالتی که $x^*x \neq yy^*$ داریم

$$\begin{aligned} (\pi \otimes \rho)(x)(\pi \otimes \rho)(y)(\xi \otimes \eta) &= \pi \otimes \rho(xy)(\pi(y)\xi \otimes \rho(y)\eta) \\ &= \pi(x)(\pi(y)\eta) \otimes \rho(x)\rho(y)\eta \end{aligned}$$

□

که با صفر برابر است.

تعریف ۲۹.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون باشد و $(\pi, E) \in \sum_{p,r}(S)$. یک تابع ضریب از (π, E) تابع $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ به فرم

$$f(x) = \langle \pi(x)\xi, \phi \rangle, \quad x \in S$$

است که در آن $\xi \in E$, $\phi \in E^*$.

تعریف ۳۰.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون و $p, q \in (1, \infty)$ اسکالرهای دوگان باشند، به این معنی که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. تعریف می‌کنیم

$$B_{p,r}(S) = \left\{ f: S \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{q,r}(S) \text{ در } (\pi, E) \text{ است.} \right\}$$

گزاره ۳۱.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون و $p, q \in (1, \infty)$ اسکالرهای دوگان باشند. همچنین فرض کنید $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ به صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi_n(x)\xi_n, \phi_n \rangle \quad (x \in S)$$

تعریف شده باشد، که در آن $((\pi_n, E_n))_{n=1}^{\infty}$ و $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی به ترتیب در E_n^* و E_n هستند به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| \|\phi_n\| < \infty$. در این صورت f به $B_{p,r}(S)$ تعلق دارد.

برهان. برهان شبیه حالت گروهی است. بدون خلل به کلیت فرض می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_q < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n\|_p < \infty.$$

در این صورت $E := \ell_q - \oplus_{n=1}^{\infty} E_n$ یک QSL_q -فضاست. برای $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ و $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ داریم $\phi \in E$ و $\xi \in E^*$. حال نگاشت $\pi: S \rightarrow B(E)$ با تعریف

$$\pi(x)\eta = (\pi_1(x)\eta_1, \pi_2(x)\eta_2, \dots), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in E$$

یک نمایش تحدید شده از S روی E و f تابع ضریب وابسته به π است. $\square$

تعریف ۳۲.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون و $p, q \in (1, \infty)$ اسکالرهای دوگان باشند. فضای $A_q(S)$ شامل همه توابع $x \in \ell(S)$ است به‌طوری‌که دنباله‌های $(f_n)_{n=1}^\infty$ در $\ell_q(S)$ و $(g_n)_{n=1}^\infty$ در $\ell_p(S)$ با شرط $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \|g_n\|_q < \infty$ وجود داشته باشند که $x = \sum_{n=1}^\infty f_n \bullet g_n$. برای $u \in A_q(S)$ قرار می‌دهیم

$$\|u\| = \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \|g_n\|_q : u = \sum_{n=1}^\infty f_n \bullet g_n \right\}.$$

گزاره ۳۳.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون باشد و $p \in (1, \infty)$ ، در این صورت $A_p(S)$ یک فضای باناخ است. در واقع $A_p(S)$ بستار توابع با محمل متناهی است.

برهان. گزاره ۳۰.۲ از منبع [۴۶] را ببینید. $\square$

گزاره زیر مانند حالت گروهی ثابت می‌شود.

گزاره ۳۴.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون باشد و $p \in (1, \infty)$ ، در این صورت $B_{p,r}(S)$ یک زیرفضای $C_b(S)$ و شامل $A_p(S)$ است. همچنین اگر $2 \leq q \leq p$ یا $p \leq q \leq 2$ ، داریم $B_{q,r}(S) \subseteq B_{p,r}(S)$.

تعریف ۳۵.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون، $p, q \in (1, \infty)$ اسکالرهای دوگان و $f \in B_{p,r}(S)$ یک تابع باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{B_{p,r}(S)} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \|\xi_n\| \|\phi_n\| \right\}$$

که در آن برای هر n ، (π_n, E_n) یک نمایش دوری تحدید شده است $((\pi_n, E_n) \in C_{ycq,r}(S))$ و $\phi_n \in E_n^*$ و $\xi_n \in E_n$ ،

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \langle \pi_n(x) \xi_n, \phi_n \rangle, \quad (x \in S)$$

قضیه زیر شبیه به حالت گروهی ثابت می‌شود.

قضیه ۳۶.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون، $p \in (1, \infty)$ و f و g به‌ترتیب توابع ضرب از نمایش‌های (π, E) و (ρ, F) در $\sum_{p,r}(S)$ باشند. در این صورت ضرب نقطه‌ای f و g ، تابع ضرب $(\pi \otimes \rho, E \tilde{\otimes}_p F)$ است.

در ادامه به خواصی از فضای $B_{p,r}(S)$ و ارتباطش با p - صورت جبر فیگا - تالامانکا - هرتس اشاره می‌کنیم.

قضیه ۳۷.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون باشد و $p \in (1, \infty)$. در این صورت

(الف) $B_{p,r}(S)$ یک جبر باناخ جابه‌جایی است.

(ب) شمول $A_p(S) \subseteq B_{p,r}(S)$ انقباضی است.

(ج) برای $2 \leq p' \leq p$ یا $2 \leq p' \leq p$ ، شمول $B_{p',r}(S) \subseteq B_{p,r}(S)$ انقباضی است.

(د) برای $2 = p$ ، به‌طور طولی $B_r(S)$ با $B_{p,r}(S)$ به‌عنوان جبرهای باناخ یکرخت است.

برهان. الف. فرض کنید $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، فضای $B_{p,r}(S)$ فضای خارج‌قسمتی q - ضرب تانسوری تصویری $E \otimes_q E^*$ از نمایش جامع تحدید شده (π, E) روی QSL_q - فضای E است. همچنین قضیه (۳۶.۶) نشان می‌دهد که $B_{p,r}(S)$ یک جبر است. زیرضربی بودن نرم نیز مشابه حالت گروهی و فقط از طریق خاصیت مشخصه اینفیمم ثابت می‌شود.

ب. از تعریف جبر هرتس نیم‌گروهی، برای اسکالره‌های دوگان p و q ، هر تابع $f \in A_p(S)$ تابع ضرب نمایش منظم چپ تحدید شده روی ℓ_q - فضای $\ell_q(S)$ است.

بنابراین $A_p(S) \subseteq B_{p,r}(S)$. همچنین بنابر تعریف نرم تابع $f \in B_{p,r}(S)$ ، اینفیمم روی تمامی نمایش‌های f به‌عنوان تابع ضرب یک نمایش تحدید شده روی یک QSL_q - فضا گرفته می‌شود و نرم در $A_p(S)$ روی نمایش‌های f به‌عنوان تابع ضرب نمایش منظم چپ تحدید شده گرفته می‌شود و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

ج. برای $2 \leq p' \leq p$ یا $2 \leq p' \leq p$ و اسکالره‌های q' و q که به‌ترتیب با p' و p دوگان هستند، هر نمایش تحدید شده روی یک QSL_q - فضا یک نمایش تحدید شده روی $QSL_{q'}$ - فضا است و حکم ثابت می‌شود.

د. بنابر تعریف، هر عضو $B_{r,e}(S)$ یک تابع ضرب از یک p - نمایش تحدید شده است. $\square$

فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. در این صورت یک رابطه هم‌ارزی $\wp$ روی S وجود دارد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$s \wp t \iff \exists x \in S, \text{ s.t. } Ss \cup \{s\} = Sx \cup \{x\} \text{ \& } tS \cup \{t\} = xS \cup \{x\}$$

اگر S یک نیم‌گروه وارون باشد، آنگاه

$$s \wp t \iff \exists x \in S, \text{ s.t. } s^*s = xx^*, t^*t = x^*x$$

گزاره زیر در مورد روابط معرفی شده در بالا اطلاعات مفیدی به‌دست می‌دهد:

گزاره ۳۸.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون باشد

(الف) اگر D یک $\emptyset$ -کلاس از S باشد. آنگاه $\ell_p(D)$ یک $\ell_r^1(S)$ -زیرمدول از $\ell_p(S)$ است.

(ب) اگر $\{D_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ یک خانواده از $\emptyset$ -کلاس‌های S باشد که توسط مجموعه Λ اندیس‌گذاری شده‌اند. آنگاه یک یکریختی طولیا از $\ell_r^1(S)$ -مدول‌های زیر وجود دارد.

$$\ell_p(S) \cong \ell' - \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \ell^1(D_\lambda) \quad (۱.۶)$$

نتیجه ۳۹.۶. اگر S یک نیم‌گروه و $\{D_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ یک خانواده از $\emptyset$ -کلاس‌ها از S باشد که توسط Λ اندیس‌دار شده است، آنگاه برای یک QSL_p -فضای E از توابع روی S یک خانواده از QSL_p -فضاهای $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ وجود دارد، که برای هر $\lambda \in \Lambda$ شامل توابع روی D_λ است و

$$E = \ell^p - \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$$

برهان. با توجه به این‌که رابطه (۱.۶) تحت اعمال زیرفضاگیری و خارج‌قسمت‌گیری پایاست، حکم برقرار است. $\square$

با توضیحات بالا و ابزارهای حاصل از کلاس‌های هم‌ارزی، مطالعه حالت خاصی از این جبر خالی از لطف نیست. در ادامه p -صورت جبر فوریه اشتیل‌یس را روی نیم‌گروه کلیفورد^۱ بررسی می‌کنیم. نیم‌گروه وارون S یک نیم‌گروه کلیفورد نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $s \in S$ ، $s^*s = ss^* = e$ برای $e \in E(S)$ تعریف می‌کنیم

$$G_e = \{s \in S | s^*s = ss^* = e\}.$$

در این صورت G_e یک گروه با همانی e است. در این حالت هر $\emptyset$ -کلاس D شامل یک خودتوان منحصر به فرد (به نام e) است و داریم $D = G_e$.

قضیه ۴۰.۶. فرض کنید S یک نیم‌گروه کلیفورد با خانواده $\emptyset$ -کلاس‌های $\{G_e\}_{e \in E(S)}$ و $p \in (1, \infty)$ باشد. در این صورت

$$B_{p,r}(S) \cong \ell^1 - \bigoplus_{e \in E(S)} B_p(G_e).$$

برهان. فرض کنید p و q اسکالرهای مزدوج $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ باشند. $e \in E(S)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $G_e = \{x \in S \mid x^*x = e\}$. برای هر $s \in S$ ، نگاشت $\pi : S \rightarrow B(l_q(G_e))$ با ضابطه

$$\pi(s)(\delta_t) = \begin{cases} \delta_t & \text{اگر } s^*s = e \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک نمایش تحدید شده است و $\chi_{G_e}(s) = \langle \pi(s)\delta_t, \delta_t \rangle$. بنابراین χ_{G_e} به $B_{p,r}(S)$ تعلق دارد و در واقع χ_{G_e} یک تابع مثبت معین تحدید شده است. حال برای هر $u \in B_{p,r}(S)$ ، $u \cdot \chi_{G_e}$ به $B_{p,r}(S)$ متعلق است. در واقع مجموعه

$$\{u \in B_{p,r}(S) \mid u(s) = 0, s \in S \setminus G_e \text{ برای } u\}$$

یک زیرفضای بسته $B_{p,r}(S)$ است و به‌طور طولی با $B_p(G_e)$ یکرخت است. در واقع هر تابع ضریب از یک نمایش تحدید شده روی یک QSL_q -فضا که روی G_e^c صفر است، یک تابع ضریب از یک نمایش روی یک QSL_q -فضا از G_e است. فرض کنید $u \in B_{p,r}(S)$. بنابر توضیحات بالا، می‌توانیم u را به $(u_e)_{e \in E(S)}$ تجزیه کنیم که در آن برای هر $e \in E(S)$ ، $u_e \in B_p(G_e)$. حال برای هر $e \in E(S)$ و هر نمایش از u_e به فرم $u_e = \langle \pi_e(\cdot)\xi_e, \eta_e \rangle$ که در آن $\pi_e \in \Sigma_{G_e}$ و ξ_e در یک QSL_q -فضا و η_e در یک QSL_q -فضاست، داریم $\|u_e\| \leq \|\xi_e\| \|\eta_e\|$ و همچنین

$$u = (u_e)_{e \in E(S)} = \langle \bigoplus \pi_e(\cdot) \oplus \xi_e, \bigoplus \eta_e \rangle$$

و $\bigoplus \pi_e$ یک نمایش تحدید شده از S روی یک QSL_q -فضاست و

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(S)} \|u_e\| &\leq \sum_{e \in E(S)} \|\xi_e\| \|\eta_e\| \\ &\leq \left(\sum_{e \in E(S)} \|\xi_e\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{e \in E(S)} \|\eta_e\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \|(\xi_e)\| \|(\eta_e)\|.$$

بنابراین

$$\sum_{e \in E(S)} \|u_e\| \leq \| (u_e) \| = \left\| \sum_{e \in E(S)} u_e \right\|.$$

□

قضیه ۴۱.۶. فرض کنید S یک نیم گروه کلیفورد با یک خانواده $\{G_e\}_{e \in E(S)}$ به عنوان $\varnothing$ - کلاس از گروه های میانگین پذیر باشد و $p \in (1, \infty)$. در این صورت $A_p(S)$ با بستار $B_{p,r}(S) \cap F(S)$ برابر است.

برهان. از آنجاکه برای هر $e \in E(S)$ گروه G_e میانگین پذیر است، نگاشت نشان دادن $i_e : A_p(G_e) \rightarrow B_p(G_e)$ طولپایی است. بنابر قضیه قبل برای $f \in B_{p,r}(S) \cap F(S)$

$$f = \sum_{e \in E(S)} f_e$$

که در آن $f_e \in B_p(G_e) \cap F(G_e)$. بنابراین $f_e \in A_p(G_e)$. حال از آنجاکه

$$A_p(S) \cong \ell_1 - \bigoplus_{e \in E(S)} A_p(G_e)$$

داریم $f \in A_p(S)$. از سوی دیگر اگر $f \in A_p(S) \cap F(S)$ ، آنگاه توابع f_e معرفی شده در قضیه قبل به $F(G_e) \cap A_p(G_e)$ و لذا به $B_p(G_e) \cap F(G_e)$ با همان نرم متعلق است. پس $f \in B_{p,r}(S) \cap F(S)$. چون $f \in B_{p,r}(S) \cap F(S)$ چگال است، حکم ثابت می شود. □

کتاب نامه

- [1] M. A. Ahmadpoor, M. Shams Yousefi *A note on the p -operator space structure of the p -analog of the Fourier-Stieltjes algebra*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 (2021).
- [2] M. A. Ahmadpoor, M. Shams Yousefi, *On the functorial properties of the p -analog of the Fourier-Stieltjes algebras and their homomorphisms*, Preprint.
- [3] M. A. Ahmadpoor, M. Shams Yousefi, *p -Completely bounded weighted homomorphisms on the p -analog of the Fourier-Stieltjes algebra* , arXiv:2104.01171.
- [4] M. A. Ahmadpoor, M. Shams Yousefi, *The General Form of p -Completely bounded homomorphisms on the p -analog of the Fourier-Stieltjes algebra* , arXiv:2104.0000.

-
- [5] M. Amini, A. R. Medghalchi, *Restricted Algebras on Inverse Semigroups I*, Math. Nachr., 279(16), (2006), 1-10.
- [6] M. Amini, R. Rezavand, *Module operator amenability of the Fourier algebra of an inverse semigroup* Semigroup Forum (2016) 92, 45–70
- [7] G. Arsac, *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire*, Publ. Dép. Math. (Lyon) **13** (1976) 1-101.
- [8] A. Beurling and H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers*, Mathemantica Scandinavia, **1** (1953), 120-126.
- [9] D. P. Blecher, *The standard dual of an operator space*, Pacific Math. J. **153** (1992) 15-30.
- [10] D. P. Blecher, V.I. Paulsen, *Tensor products of operator spaces*, J. Funct. Anal. **99** (1991) 262-292.
- [11] Brown, N. P., & Ozawa, N. (2008). *C*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations*. American Mathematical Society.
- [12] P. J. Cohen, *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures*, Amer. J. Math. **82** (1960) 191-212.
- [13] P. J. Cohen, *On homomorphisms of group algebras*, Amer. J. Math. **82** (1960) 213-226.

-
- [14] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York 1990.
- [15] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society 1999.
- [16] M. Cowling, *An application of Littlewood-Paley theory in harmonic analysis*, Math. Ann. **241**(1) (1979) 83-96.
- [17] M. Daws, *Arens regularity of the algebra of operators on a Banach space*, Bull. London Math. Soc. **36**(4) (2004) 493-503.
- [18] M. Daws, *p -Operator spaces and Figà-Talamanca-Herz algebras*, J. Operator Theory **63** (1) (2010) 47-83.
- [19] A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.
- [20] J. Dixmier, *C^* -algebras*, North-Holland Mathematical Library, vol. 15, North-Holland, Amsterdam, 1977. Translated from the French by Francis Jellett.
- [21] C. F. Dunkl, D.E. Ramirez, *Homomorphisms on groups and induced maps on certain algebras of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971) 475-485.
- [22] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *On approximation properties for operator spaces*, Int. J. Math. **1** (1990) 163-187.

-
- [23] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *A new approach to operator spaces*, Canad. J. Math. **34** (1991) 329-337.
- [24] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.) **23** Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [25] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964) 181-236.
- [26] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry*, CMS Books Math. **8** Springer-Verlag, New York, 2001.
- [27] A. Figà-Talamanca, *Translation invariant operators in L_p* , Duke Math. J. **32** (1965) 495-501.
- [28] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Fla. 1995.
- [29] B. E. Forrest, *Amenability and the structure of the algebras $A_p(G)$* , Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994) 233-243.
- [30] B. E. Forrest, P.J. Wood, *Cohomology and the operator space structure of the Fourier algebra and its second dual*, Indiana Univ. Math. J. **50** (3) (2001) 1217-1240.
- [31] Foucart, S., & Rauhut, H. (2013). *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Birkhäuser Basel.

-
- [32] E. Gardella, *A modern look at algebras of operators on L_p -spaces*, Expositiones Mathematicae (2020) In Press.
 - [33] R. Godment, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 1-84.
 - [34] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory*, J. reine angew. Math. **313** (1980), 72-104.
 - [35] C. Herz, *The theory of p -spaces with an application to convolution operators, its second dual*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971) 69-82.
 - [36] B. Host, *La the'ore'me des idempotents dans $B(G)$* , Bull. Soc. Math. France **114** (1986) 215-223.
 - [37] M. Ilie, *A note on p -completely bounded homomorphisms of the Figà-Talamanca-Herz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014) 273-284.
 - [38] M. Ilie, *Homomorphisms of the Fourier algebras and coset spaces of a locally compact group*, Ph.D. Thesis, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 2003.
 - [39] M. Ilie, *On Fourier algebra homomorphisms*, J. Funct. Anal. **213** (2004) 88-110.
 - [40] M. Ilie, N. Spronk, *Completely bounded homomorphisms of the Fourier algebra*, J. Funct. Anal. **225** (2005) 480-499.

- [41] M. Ilie, R. Stokke, *Weak*- continuous homomorphisms of Fourier-Stieltjes algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **145** (2008) 107-120.
- [42] V. I. Istratescu, *Strict Convexity and Complex Strict Convexity: Theory and Applications*, Taylor & Francis Inc. 1983.
- [43] S. Kwapien, *On operators factorizable through L_p space*, Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), 215-225.
- [44] C. Le Merdy, *Factorization of p -completely bounded multilinear maps*, Pacific J. Math. **172** (1996), 187-213.
- [45] V. Losert, *On tensor products of the Fourier algebras*, Arch. Math. **43** (1984) 370-372.
- [46] A. R. Medghalchi, H. Pourmahmood Aghababa, *Figà-Talamanca-Herz algebras for restricted inverse semigroups and Clifford semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **395** (2012), 473-485.
- [47] A. R. Medghalchi, H. Pourmahmood Aghababa, *Figà-Talamanca-Herz algebras for restricted inverse semigroups and Clifford semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **395** (2012), 473-485.
- [48] T. Miao, *Compactness of a locally compact group G and geometric properties of $A_p(G)$* , Canad. J. Math. **48** (1996) 127-1285.

-
- [49] G. J. Murphy, *C*-Algebra and Operator Theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990.
- [50] M. A. Nielsen, & I. L. Chuang, (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.
- [51] J. P. Pier, *Amenable Locally Compact Groups*, Pure and Applied Math., Wiley-Interscience, New York, 1984.
- [52] G. Pisier, *Completely bounded maps between sets of Banach space operators*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990) 249-277.
- [53] G. Pisier, *Introduction to Operator Space Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 294 (2003).
- [54] Z.-J. Ruan, *The operator amenability of $A(G)$* , Amer. J. Math. **117** (1995) 1449-1474.
- [55] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York 1973.
- [56] V. Runde, *Representations of locally compact groups on QSL_p -spaces and a p -analog of the Fourier-Stieltjes algebra*, Pacific J. Math. **221** (2005) 379-397.
- [57] V. Runde, *Cohen-Host type idempotent theorems for representations on Banach spaces and applications to Figà-Talamanca-Herz algebras*, J. Math. Anal. Appl. **329** (2007) 736-751.

- [58] R. A. Ryan *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, London New York 2002.
- [59] M. Shams Yousefi, *p-analog of the semigroup Fourier-Stieltjes algebras*, Iranian J. Math. Sci. and Inf. **10** (2) (2015) 55-66.
- [60] Saeki *The L^p -conjecture and Young's inequality*, Illinois J. Math. **34**(3) (1990) 614-627.
- [61] R. Stokke, *Quasi-central bounded approximate identities in group algebras of locally compact groups*, Illinois J. Math. **48** (2004) 151-170.
- [62] G. Wittstock, B. Betz, H. J. Fischer, A. Lambert, K. Louis, M. Neufang, and I. Zimmermann, *What Are Operator Spaces?*, Universitat des Saarlandes. **294** (2001).

[۶۳] محمد علی احمدپور جاده کناری، مرضیه شمس یوسفی، معرفی یک ساختار p -عملگری بر روی جبر گروهی شبه توابع جهانی، $UPF_p(G)$ ، پژوهش‌های نوین در ریاضی ۲۰۲۳.۶۵۵۷۴.۲۲۱۲ \JNRM.۱۰.۳۰۴۹۵، (۱۴۰۲).

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A		Bessel's inequality	نامساوی بسل
Abelian	آبلی	bilinear form	صورت دوخطی
abstract operator space	فضای عملگری مجرد	bilinear mapping	نگاشت دوخطی
abstract p -operator space	فضای p -عملگری مجرد	Borel measure	اندازه بورل
Affine	آفین	Bochner integral	انتگرال باختر
algebra	جبر	bounded	کراندار
algebraic tensor product space	فضای ضرب تانسوری جبری	C	
almost everywhere	تقریباً همه جا	Cauchy-Schwarz	کوشی-شوارتز
angle	زاویه	characteristic function	تابع مشخصه
B		cross-norm	نرم صلیبی
Banach space	فضای باناخ	cyclic representation	نمایش دوری
base	پایه	coefficient matrix	ماتریس ضرایب
		compactification	فشرده‌سازی
		compatible	سازگار

completely bounded map	نگاشت کاملاً کراندار	convolution product	ضرب پیچشی
completely contractive map	نگاشت کاملاً انقباضی	C^* -algebra	جبر- C^*
completely isometric map	نگاشت کاملاً طولپا	coordinate	مختصات
complete isomorphism	یکریختی کامل	coset	همدسته
completely positive map	نگاشت کاملاً مثبت	D	
completely quotient map	نگاشت کاملاً خارج قسمتی	decomposition	تجزیه
commutator operator	عملگر جابجاگر	definite	معین
complement	مکمل	determinant	دترمینان
complete	کامل	dense	چگال
complex	مختلط	diagonal	قطری
complex measure	اندازه مختلط	diagonalizable	قطری‌شدنی
concrete operator space	فضای عملگری واقعی	dimension	بعد
concrete p -operator space	فضای p -عملگری واقعی	direct sum	جمع مستقیم
conjugate	مزدوج	discrete	گسسته
conjugate operator	عملگر مزدوج	divergent	واگرا
connected component	مولفه همبندی	dual space	فضای دوگان
contractive operator	نگاشت انقباضی	E	
convergence	همگرایی	eigenvalue	مقدار ویژه
convergent	همگرا	eigenvector	بردار ویژه
		entry	درایه
		equations	معادلات
		essentially bounded function	تابع اساساً کراندار
		essential representation	نمایش ضروری
		essential supremum	سوپریمم اساسی

Euclidean norm	نرم اقلیدسی	group	گروه
evaluation functional	تابعک ارزیابی	H	
existence	وجود	Haar measure	اندازه هار
F		Hahn-Banach theorem	قضیه هان-باناخ
field	میدان	Hermitian	هرمیتی
faithful representation	نمایش وفادار	hermitian element	عضو هرمیتی
Figà-Talamanca-Herz algebra	جبر فیگا-تالامانکا-هرتز	Hilbert	هیلبرت
filter	فیلتر	homogeneous	همگن
finite	متناهی	Hölder inequality	نامساوی هولدر
finitely representable	به‌طور متناهی قابل نمایش	Hilbert space	فضای هیلبرت
Fourier	فوریه	I	
Fourier algebra	جبر فوریه	ideal	ایده آل
Fourier expansion	بسط فوریه	idempotent	خودتوان
Fourier series	سری فوریه	identity	همانی
Fourier Stieltjes algebra	جبر فوریه اشتیل‌یس	induction	استقرا
free ultrafilter	ابرفیلتر آزاد	injective norm	نرم تزریقی
full	پُر	imaginary	موهومی
functional calculus	حسابان تابعی	induced norm	نرم القایی
functorial	افکنشی	inequality	نامساوی
G		infinity norm	نرم بینهایت
Gelfand-Naimark-Segal (GNS)	قضیه گلفند-نیمارک-سگال	injective tensor product space	فضای ضرب تانسوری تزریقی
theorem		inner product	ضرب داخلی
generalized	تعمیم‌یافته	inner product space	فضای ضرب داخلی
Gram-Schmidt	گرام-اشمیت		

inner regular	منظم درونی	linearly dependent	وابسته خطی
intersection	اشتراک	linearly independent	مستقل خطی
invariant subspace	زیرفضای پایا	locally finite	موضعیاً متناهی
inverse	معکوس	locally compact group	گروه‌های موضعیاً فشرده
inverse semigroup	نیم‌گروه وارون		
invertible	معکوس‌پذیر	M	
invertible operator	نگاشت وارون‌پذیر	map	نگاشت
involution	برگردان	matricially normed space	فضای نرم‌ماتریسی
involutive algebra	جبر برگرداننده	matrix	ماتریس
isometric embedding	نشانیدن طولپا	matrix norm	نرم‌ماتریسی
irreducible representation	نمایش‌های تحویل‌ناپذیر	maximal ideal	ایده آل ماکسیمال
isometric	طولپا	maximum	ماکسیمم
J		maximum norm	نرم‌ماکسیمم
Jacobi	ژاکوبی	measure	اندازه
Jordan decomposition theorem	قضیه تجزیه جردن	measurable function	تابع اندازه‌پذیر
		measurable set	مجموعه اندازه‌پذیر
K		metric mapping property	خاصیت نگاشت‌متری
Kronecker	کرونکر	minimum	کمینه
L		modulus of convexity	پیمانه تحدب
Lebesgue measure	اندازه لبگ	multiplicative	ضربی
Lie groups	گروه لی	multiplicative functional	تابعک ضربی
linear	خطی	N	
linear functional	تابعک خطی	natural norm	نرم طبیعی
linear mapping	نگاشت خطی		

nilpotent	پوچ توان	p -integrable function	تابع p -انتگرال پذیر
non-degenerate representation	نمایش ناتبیهگون	p -operator space projective tensor norm	نرم تانسوری تصویری فضای p -عملگری
nonempty	ناتهی	parallelogram law	قانون متوازی الاضلاع
nonnegative	نامنفی	Parseval's identity	تساوی پارسوال
nonsingular	نامنفرد	partial	جزئی
nonzero	ناصفر	permutation	جایگشت
norm	نرم	polynomial	چندجمله‌ای
normal	نرمال	positive	مثبت
normal group	گروه نرمال	positive definite	مثبت معین
normed algebra	جبر نرم‌دار	positive element	عضو مثبت
normed space	فضای نرم دار	positive map	نگاشت مثبت
null set	مجموعه پوچ	positive operator	عملگر مثبت
nullspace	فضای پوچ	principal ultrafilter	ابرفیلتر اصلی
1-norm	نرم-۱	projection	تصویر
O		projective norm	نرم تصویری
one-to-one	یک‌به‌یک	projective tensor product space	فضای ضرب تانسوری تصویری
ordinary	معمولی	Q	
orthogonal	متعامد	QSL_p -space	فضای QSL_p
orthogonal group	گروه‌های متعامد	quotient mapping	نگاشت خارج قسمتی
orthogonality	تعامد	R	
orthonormal	یک‌امتعامد	Radon measure	اندازه رادون
orthonormal basis	پایه متعامد یکه	range	برد
P			
p -completely bounded operator	عملگر p -کاملاً کراندار		

rank	رتبه	special linear group	گروه‌های خطی خاص
real	حقیقی	state	حالت
reasonable cross-norm	نرم صلیبی معقول	step function	تابع پله‌ای
reflexive space	فضای بازتابی	strongly measurable function	تابع به‌طور قوی اندازه‌پذیر
representation	نمایش	strong operator topology (SOT)	توپولوژی عملگری قوی
restrivted product	ضرب تحدید شده	subspace	زیرفضا
Riesz representation theorem	قضیه نمایش ریس	subcross-norm	نرم زیر-صلیبی
ring	حلقه	super-reflexive	فوق بازتابی
S		symmetric	متقارن
semi direct product	ضرب نیم مستقیم	symmetric set	مجموعه متقارن
separable Hilbert space	فضای هیلبرت جدایی‌پذیر	spatial norm	نرم فضایی
series	سری	semi-norm	نیم‌نرم
scaler	اسکالر	smooth	هموار
Schatten dual norm	نرم دوگانی شاتن	T	
Schur	شور	tensor dual norm	نرم دوگانی تانسوری
Schwarz's inequality	نامساوی شوارتس	tensor norm	نرم تانسوری
signed measure	اندازه علامت دار	tensor product	ضرب تانسوری
similar	متشابه	trace	رد
simple function	تابع ساده	Trace class operator	عملگر از کلاس رد
skew-symmetric	متقارن کج	transitive space	فضاهای ترایا
spatial tensor product	ضرب تانسوری فضایی	transpose	ترانهاد
spectrum	طیف	triangle	مثلث
		topological group	گروه توپولوژیکی

topological vector space (T.V.S)
فضای برداری توپولوژیکی

topology توپولوژی

Taylor تیلور

U

ultrafilter ابرفیلتر

ultraproduct space فضای ابرضرب

ultrapower space فضای ابرتوان

ultralimit ابرحد

uniform cross-norm نرم صلیبی

یکنواخت

uniformly convex یکنواخت محدب

unique یکتا

uniqueness یکتایی

unimodular تک پیمانه‌ای

unit یکه

unitary یکانی

unitary element عضو یکانی

unital Banach algebra جبر باناخ یکدار

V

vector بردار

vector-valued function تابع

بردار-مقدار

vector space فضای برداری

von Neumann algebra جبر فون نویمان

W

weak operator topology (WOT)

توپولوژی عملگری ضعیف

weak-star topology توپولوژی

ضعیف-ستاره

weak topology توپولوژی ضعیف

W^* -algebra جبر W^*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

complex measure	اندازه مختلط	آ
Haar measure	اندازه هار	آبلی
Bochner integral	انتگرال باختر	آفین
induction	استقرا	ابرفیلتر
scaler	اسکالر	ابرفیلتر اصلی
intersection	اشتراک	ابرفیلتر آزاد
functorial	افکنشی	ابرحد
ideal	ایده آل	اثر
maximal ideal	ایده آل ماکسیمال	اندازه
range	ب برد	اندازه بورل
vector	بردار	اندازه رادون
eigenvector	بردار ویژه	اندازه لبگ
		اندازه علامت دار
		signed measure
		Lebesgue measure
		Radon measure
		Borel measure
		measure
		trace
		ultralimit
		free ultrafilter
		principal ultrafilter
		ultrafilter
		Affine
		Abelian

multiplicative functional	تابع ضربی	involution	برگردان
characteristic function	تابع مشخصه	Fourier expansion	بسط فوریه
transpose	ترانهاده	dimension	بعد
decomposition	تجزیه	finitely representable	به‌طور متناهی قابل نمایش
Parseval's identity	تساوی پارسوال		پ
projection	تصویر	base	پایه
orthogonality	تعامد	orthonormal basis	پایه متعامد یک‌ه
generalized	تعمیم‌یافته	full	پُر
almost everywhere	تقریباً همه جا	nilpotent	پوچ توان
unimodular	تک پیمان‌ه‌ای	modulus of convexity	پیمان‌ه تحدب
topology	توپولوژی		ت
weak topology	توپولوژی ضعیف	essentially bounded function	تابع اساساً کراندار
weak-star topology	توپولوژی ضعیف-ستاره	measurable function	تابع اندازه پذیر
strong operator topology (SOT)	توپولوژی عملگری قوی	vector-valued function	تابع بردار-مقدار
weak operator topology (WOT)	توپولوژی عملگری ضعیف	simple function	تابع ساده
Taylor	تیلور	p-integrable function	تابع انتگرال-p پذیر
permutation	جایگشت	step function	تابع پله‌ای
algebra	جبر	strongly measurable function	تابع به‌طور قوی اندازه پذیر
involutive algebra	جبر برگرداننده	evaluation functional	تابع ارزیابی
		linear functional	تابع خطی

linear	خطی	unital Banach algebra	جبر باناخ یک‌دار
idempotent	خودتوان	von Neumann algebra	جبر فون نویمان
	د	Fourier algebra	جبر فوریه
determinant	دترمینان	Fourier Stieltjes algebra	جبر فوریه اشتیل‌یس
entry	درایه		
rank	رتبه	Figà-Talamanca-Herz algebra	جبر فیگا-تالامانکا-هرتز
trace	رد	normed algebra	جبر نرم‌دار
angle	زاویه	C*-algebra	جبر C*
subspace	زیرفضا	W*-algebra	جبر W*
invariant subspace	زیرفضای پایا	partial	جزئی
	ژ	direct sum	جمع مستقیم
Jacobi	ژاکوبی		چ
	س	dense	چگال
compatible	سازگار	polynomial	چندجمله‌ای
series	سری		
Fourier series	سری فوریه		ح
essential supremum	سوپریمم اساسی	state	حالت
		functional calculus	حسابان تابعی
Schur	شور	ring	حلقه
	ص	real	حقیقی
bilinear form	صورت دوخطی		خ
convolution product	ضرب پیچشی	metric mapping property	خاصیت نگاشت متری

ultrapower space	فضای ابرتوان	tensor product	ضرب تانسوری
reflexive space	فضای بازتابی	spatial tensor product	ضرب تانسوری فضایی
Banach space	فضای باناخ	restrivted product	ضرب تحدید شده
vector space	فضای برداری	inner product	ضرب داخلی
topological vector space (T.V.S)	فضای برداری توپولوژیکی	semi direct product	ضرب نیم مستقیم
transitive space	فضاهای ترایا	multiplicative	ضربی
nullspace	فضای پوچ	spectrum	طیف
dual space	فضای دوگان	isometric	طولپا
algebraic tensor product space	فضای ضرب تانسوری جبری	positive element	ع عضو مثبت
injective tensor product space	فضای ضرب تانسوری تزریقی	hermitian element	عضو هرمیتی
projective tensor product space	فضای ضرب تانسوری تصویری	unitary element	عضو یکانی
inner product space	فضای ضرب داخلی	Trace class operator	عملگر از کلاس رد
concrete operator space	فضای عملگری واقعی	commutator operator	عملگر جابجاگر
QSL_p -space	فضای QSL_p	conjugate operator	عملگر مزدوج
normed space	فضای نرم دار	positive operator	عملگر مثبت
matricially normed space	فضای نرم ماتریسی	p -completely bounded operator	عملگر p -کاملاً کراندار
abstract operator space	فضای عملگری مجرد	compactification	ف فشردہ سازی
		ultraproduct space	فضای ابرضرب

Kronecker	کرونکر	concrete p -operator space	فضای p - عملگری واقعی
minimum	کمینه		
Cauchy-Schwarz	کوشی-شوارتز	abstract p -operator space	فضای p - عملگری مجرد
	گروه	Hilbert space	فضای هیلبرت
گروه توپولوژیکی	group topological	separable Hilbert space	فضای هیلبرت جدایی‌پذیر
group	گروه	Fourier	فوریه
special linear group	گروه‌های خطی خاص	super-reflexive	فوق بازتابی
Lie groups	گروه لی	filter	فیلتر
orthogonal group	گروه‌های متعامد		ق
locally compact group	گروه‌های موضعاً فشرده	parallelogram law	قانون متوازی الاضلاع
normal group	گروه نرمال	Jordan decomposition theorem	قضیه تجزیه جردن
discrete	گسسته		قضیه گلفند-نیمارک-سگال
Gram-Schmidt	گرام-اشمیت	Gelfand-Naimark-Segal (GNS) theorem	
	م	Hahn-Banach theorem	قضیه هان-باناخ
matrix	ماتریس		
coefficient matrix	ماتریس ضرایب	Riesz representation theorem	قضیه نمایش ریس
maximum	ماکسیمم	diagonal	قطری
similar	متشابه	diagonalizable	قطری‌شدنی
orthogonal	متعامد		
symmetric	متقارن	complete	ک
skew-symmetric	متقارن کج	bounded	کامل کراندار

inner regular	منظم درونی	finite	متناهی
locally finite	موضعیاً متناهی	parallelogram	متوازی‌الاضلاع
field	میدان	positive	مثبت
nonempty	ناتهی	positive definite	مثبت معین
nonzero	ناصفر	triangle	مثلث
inequality	نامساوی	null set	مجموعه پوچ
Bessel's inequality	نامساوی بسل	symetric set	مجموعه متقارن
Schwarz's inequality	نامساوی شوارتس	measurable set	مجموعه اندازه پذیر
Hölder inequality	نامساوی هولدر	coordinate	مختصات
nonsingular	نامنفرد	complex	مختلط
nonnegative	نامنفی	conjugate	مزدوج
norm	نرم	linearly independent	مستقل خطی
Euclidean norm	نرم اقلیدسی	equations	معادلات
normal	نرمال	inverse	معکوس
induced norm	نرم القایی	invertible	معکوس پذیر
infinity norm	نرم بینهایت	ordinary	معمولی
tensor norm	نرم تانسوری	definite	معین
projective norm	نرم تصویری	eigenvalue	مقدار ویژه
injective norm	نرم تزریقی	complement	مکمل
tensor dual norm	نرم دوگانی تانسوری	imaginary	موهومی
		connected component	مولفه همبندی
		outer regular	منظم بیرونی

completely quotient map	نگاشت کاملاً خارج قسمتی	Schatten dual norm	نرم دوگانی شاتن
completely isometric map	نگاشت کاملاً طولپا	subcross-norm	نرم زیر-صلیبی
completely bounded map	نگاشت کاملاً کراندار	cross-norm	نرم صلیبی
completely positive map	نگاشت کاملاً مثبت	reasonable cross-norm	نرم صلیبی معقول
positive map	نگاشت مثبت	uniform cross-norm	نرم صلیبی یکنواخت
invertible operator representation	نگاشت وارون پذیر نمایش	natural norm	نرم طبیعی
cyclic representation	نمایش دوری	spatial norm	نرم فضایی
irreducible representation	نمایش های تحویل ناپذیر	matrix norm	نرم ماتریسی
non-degenerate representation	نمایش ناتبگون	maximum norm	نرم ماکسیمم
essential representation	نمایش ضروری	1-norm	نرم ۱
faithful representation	نمایش وفادار		نرم تانسوری تصویری فضای p - عملگری
inverse semigroup semi-norm	نیم گروه وارون نیم نرم	p -operator space projective tensor norm	
linearly dependent	وابسته خطی	isometric embedding	نشانندن طولپا
divergent existence	واکرا وجود	map	نگاشت
Hermitian identity	هرمیتی همانی	linear mapping	نگاشت خطی
coset	همایسته	contractive operator	نگاشت انقباضی
convergent	همگرا	bilinear mapping	نگاشت دوخطی
convergence	همگرایی	quotient mapping	نگاشت خارج قسمتی
homogeneous	همگن		
smooth	هموار		
Hilbert	هیلبرت		
unitary	یگانگی		
orthonormal	یکایک معامد		
one-to-one	یک به یک		
unique	یکتا		
uniqueness	یکتایی		
complete	یکریختی کامل		
isomorphism			
unit	یکه		
uniformly convex	یکنواخت محدب		
		completely contractive map	نگاشت کاملاً انقباضی

نمایه

- C^* - جبر نیم گروهی تحدید شده، ۲۳۸
 C^* - جبر پرتحدید شده، ۲۴۰
 C^* - جبر، ۴۳
 C^* - جبر گروهی کاهش یافته نامیده، ۱۳۱
 p - صورت جبر فوریه اشتیلیس، ۱۷۶
 p - صورت جبر فوریه اشتیلیس نیم گروهی تحدید شده، ۲۴۸
بروریختی، ۹۶
تقریباً همبند، ۹۹
جبر جامع p - شبه توابع، ۱۳۳
قضیه هان - باناخ، ۱۷
مولفه همبندی همانی، ۹۹
ابرتوان، ۴۰
ابرفیلتر، ۳۹
اتحاد پارسوال، ۱۲۷
اندازه، ۲۵
اندازه از راست پایا، ۱۰۴
اندازه از چپ پایا، ۱۰۴
اندازه بورل، ۲۶
اندازه پذیر موضعی، ۳۰
اندازه هار چپ، ۱۰۵
ایده آل اولیه، ۱۲۸
ایده آل ماکسیمال، ۴۴
برگردان، ۴۲
تابع اساساً کراندار، ۳۱
تابع اندازه پذیر، ۲۶
تابع ساده، ۲۹
تابع مثبت معین، ۲۴۱
تابع مثبت معین تحدید شده، ۲۴۳
تابع مشخصه، ۲۹
تابعک ارزیابی، ۱۷
تام، ۱۴
تساوی پارسوال، ۲۴
توپولوژی، ۱۳

- توپولوژی ضعیف، ۲۱
 توپولوژی عملگری ضعیف، ۲۲
 توپولوژی عملگری قوی، ۲۲
 توپولوژی فضای دوگان یا توپولوژی فل، ۱۲۹
 توپولوژی هال-کرنل، ۱۲۸
 توپولوژی گلفند، ۱۲۲
 تک پیمانه‌ای، ۱۰۷
 تکریمتی، ۹۶
 جبر برگرداننده، ۴۲
 جبر جامع p -شبه توابع، ۱۷۶
 جبر ضربگر، ۱۶۴
 جبر فوریه، ۱۴۵
 جبر فوریه اشتیلیس، ۱۳۵
 جبر فون نویمان، ۴۳
 جبر فیگا-تالامانکا-هرتس، ۱۶۴
 جبر نرم دار، ۴۲
 جبر کاملاً انقباضی، ۱۵۹
 حسابان تابعی، ۱۱۸
 حلقه، ۹۵
 حلقه همدسته‌های باز، ۲۱۴
 رابطه آفین، ۹۵
 رادون، ۲۷
 زیرفضای π -پایا، ۱۱۷
 زیرنمایش دوری، ۱۷۸
 ساختار فضای عملگری ماکسیمال، ۶۵
 سری فوریه، ۲۴
 سوپریمم اساسی، ۳۱
 ضرب تحدید شده، ۲۳۱
 ضرب نیم مستقیم گروه‌ها، ۱۰۲
 ضرب پیچشی، ۱۰۸
 طولپا، ۱۵
 عضو هرمیتی، ۴۳
 عملگر p -کاملاً انقباضی، ۶۹
 عملگر p -کاملاً طولپا، ۷۰
 عملگر p -کاملاً کراندار، ۶۹
 عملگر جابجاگر، ۱۱۷
 فضای p -عملگر مجرد، ۱۹۱
 فضای p -عملگری، ۱۷۶
 فضای p -عملگری مجرد، ۶۹
 فضای اندازه‌های بول منظم مختلط، ۱۰۹
 فضای بازتابی، ۱۸
 فضای باناخ، ۱۴
 فضای برداری، ۱۲
 فضای برداری توپولوژیکی، ۱۳
 فضای به طور یکنواخت محدب، ۱۹۷
 فضای تراپا، ۱۱۳
 فضای دوگان، ۱۶
 فضای ضرب تانسوری تزریقی، ۷۶
 فضای ضرب تانسوری تصویری، ۷۴
 فضای ضرب تانسوری جبری، ۷۴
 فضای ضرب داخلی، ۲۳
 فضای عملگرهای از کلاس رد، ۱۵۱
 فضای عملگری مجرد، ۴۸
 فضای نرم‌ماتریسی، ۴۸
 فضای هیلبرت، ۲۳، ۱۱۶
 فضای هیلبرت جدایی‌پذیر، ۲۴
 فوق بازتابی، ۱۸
 قضیه اول وارونگی فوریه، ۱۲۶
 قضیه باختر، ۱۲۵
 قضیه تجزیه جردن، ۲۸
 قضیه جابجاگر مکرر، ۱۵۲
 قضیه دوم وارونگی فوریه، ۱۲۶
 قضیه دوگانی پونتریاگین، ۱۲۰
 قضیه نمایش، ۵۶

- قضیه وارونگی فوریه ، ۱۲۰
 قضیه چگالی کاپلانسکی، ۱۴۰
 قضیه کراین-میلین ، ۱۲۵
 قضیه گسترش، ۲۲۲
 قضیه یکتایی فوریه، ۱۲۶
 لم شور، ۱۱۷
 مجموعه اندازه پذیر، ۲۶
 مجموعه متقارن، ۹۲
 محمل، ۱۰۶
 مشخصه ، ۱۱۹
 منظم بیرونی، ۲۶
 منظم درونی، ۲۶
 مهار ضعیف، ۱۲۸
 موضعاً متناهی، ۲۷
 مکانیک کوانتومی، ۱۰۳
 میانگین پذیر، ۱۱۲
 ناتبگون ، ۴۵
 نامساوی بسل، ۲۴
 نامساوی هولدر، ۳۲
 نرم، ۱۳
 نرم زیر-صلیبی، ۷۳
 نرم صلیبی، ۷۳
 نرم صلیبی معقول، ۷۷
 نرم ماتریسی، ۴۸
 نرم کاملاً کراندار ، ۵۰
 نمایش تحویلناپذیر، ۱۱۷، ۱۳۳
 نمایش ریس، ۲۵
 نمایش ضروری، ۱۳۲
 نمایش ماتریسی، ۱۸۰
 نمایش ماتریسی دوری، ۱۸۰
 نمایش منظم راست، ۱۳۴
 نمایش منظم چپ، ۱۳۴
 نمایش نا تبهگون، ۱۳۲
 نمایش یکانی پیوسته، ۱۱۶
 نمایش‌های منظم چپ و راست ، ۱۱۷
 نگاشت آفین، ۹۶
 نگاشت بکریختی کامل، ۵۱
 نگاشت تکه‌ای آفین، ۲۱۳
 نگاشت خطی، ۱۴
 نگاشت دوخطی، ۲۰
 نگاشت مثبت، ۴۴
 نگاشت کاملاً انقباضی، ۵۱
 نگاشت کاملاً خارج قسمتی، ۵۱
 نگاشت کاملاً طولپا، ۵۱
 نگاشت کاملاً مثبت، ۵۱
 نگاشت کاملاً کراندار، ۵۱
 نیم‌نرم، ۱۳
 نیم‌گروه وارون ، ۲۳۰
 همریختی انقباضی، ۱۸۴
 همریختی دوسویی، ۹۶
 همریختی وزنی، ۲۱۳
 همریختی گروهی، ۹۶
 وفادار، ۴۵
 پایه متعامد یک‌ه، ۲۴
 پوچ، ۲۶
 پوچ موضعی، ۳۰
 کلاً ناهمبند، ۹۹
 گروه توپولوژیکی ، ۹۲
 گروه موضعاً فشرده، ۹۲
 گروه نرمال، ۹۴
 گروه هایزنبرگ، ۱۰۳
 گروه‌های خطی خاص، ۱۰۱
 گروه‌های لی، ۱۰۰
 گروه‌های متعامد، ۱۰۲

- گروه‌واره، ۲۳۰
- یک میانگین G -پایا، ۱۱۲
- یکانی، ۴۳
- یکریخت یکانی، ۱۱۷
- یکنواخت محدب، ۱۹
- یکه تقریبی چپ، ۱۱۰
- یکه تقریبی کراندار شبه-مرکزی، ۱۱۱

University of Guilan Press

Fourier-type Algebras & Their Homomorphisms

By:

Marzieh Shamsi Yousefi, Ph.D
MohammadAli Ahmadpoor Jaddehkenari, Ph.D